機械・構造物の信頼性設計理論*

石 川 浩**

State-of-the-Art Survey on the Reliability-Based Design Theory of Machines and Structures

by

Hiroshi ISHIKAWA

(Department of Information Science, Kagawa University, Takamatsu)

1 はじめに

航空機、橋りょう、ビル建造物、原子炉压力容器等、それらの破壊がいずれも直接もしくは間接に多くの人命にかかわるような重要な機械・構造物に対しては、設計の段階から可能な限り破壊に対する信頼性を考慮し、安全な設計を行う必要があることは論を待たない。ここにおいて、近年、信頼性設計 (reliability-based design) もしくは確率論的設計 (probability-based design) ということが重大な社会的要請として急速な関心を集めるに至っている^{1)~31)}。

さて、JISによれば、信頼性とは「系、機器、部品などの、機能の時間的安定性を表す度合または性質」と定義されており、また信頼度とは「系、機器、部品などが、規定の条件の下で、意図する期間中、規定の機能を遂行する確率³²⁾」と定義されている。周知のように、土木構造物の設計に際して最初にこのような信頼性の概念に基づく確率統計論的な手法を導入し、より合理的な安全性の評価を試みたのは A. M. Freudenthal¹¹⁾³³⁾ であるが、彼の研究を端緒にして、現在までにこの方面の研究は非常な進展を見るに至っている。筆者も参加し研究発表を行った1979年1月の ASCE (アメリカ土木学会) の Specialty Conference³⁴⁾ の中心課題も信頼性設計に関連したものであったし、また我国においても信頼性設計に関する研究は各所で活発に行われ始めている^{*1}。さらには、昨年6月ノルウェーで開催された ICOSSAR '81 (The Third International Conference on Structural Safety and Reliability)³⁵⁾ には

世界各国から300人近くの人々が集まり、MITの C. A. Cornell 教授ならびにソ連科学アカデミーの V. V. Bolotin 教授の基調講演を端緒に、(1)外部荷重の確率的評価、(2)構造物ならびに土質強度の確率的評価、(3)信頼性設計理論、(4)構造物の信頼性、(5)事故と破壊事例、(6)設計規格の策定、等々多くのセッションに分かれて、3日間にわたって活発な研究発表と討論が交された。

機械・構造物の安全性や信頼性に対する取扱いは上述の ICOSSAR '81 における主題毎のセッションに例示されるように、非常に広範な内容を包含するものではあるが、本稿ではこれらすべてを体系的に述べることは紙幅の制約から到底不可能である。それゆえここでは、機械・構造物の信頼性設計理論という観点に焦点を当てて論じることとしたい。

2 決定論的設計手法と信頼性 (確率論的) 設計手法

さて、機械・構造物は通常自然環境あるいは運用状態の下で様々な荷重もしくは環境ストレスを受ける。このような機械・構造物の設計を考える場合、各々の構成部材に作用する荷重 (応力) とその部材のもつ抵抗力 (強度) とのかかわりが重要となる。そこでいま、荷重を S 、抵抗力を R と表すことにしよう。もちろんこの S と R とはそれぞれ荷重によって生じる部材応力および部材強度と解釈してもよい。あるいはもっと一般的に考えて、 S は部材の破壊をもたらす変数、また R はその S に耐える部材の能力ともいうことができよう。明らかなように、作用荷重や材料特性は本質的に変動性をもった確率変量であり、設計段階でこれらを決定論的には予知することができない。また設計に際しての構造解析や応力解析に当たっては様々な近似化や理想化が行われることが多く、さらには実際の製

* 原稿受理 昭和57年2月23日

** 正 会 員 香川大学経済学部 高松市幸町

*1 例えば、日本機械学会、日本材料学会、土木学会、日本鋼構造協会、日本高圧力技術協会などの学・協会に信頼性に関する委員会や分科会が設置され、種々の観点から活発な活動が展開されている。

作・施工段階においても種々の誤差が混入することは避けえず、結局、本質的な変動性なり、あるいは人為的な所作なりに基づく多種多様な不確定性 (uncertainties) が存在する所となつて、^{*2} これらを正しく設計に反映させるのでなければ、所定の信頼度レベル³⁷⁾での設計は望みうべくもないと言えよう。

しかしながら、設計に付随した上述のような不確定性に関する確率的背景を明確としないまでも、従来よりこのような不確定性を何らかの意味で勘案するものとして種々の設計安全率 (factor of safety) という概念を用いた決定論的設計手法 (conventional or deterministic design method) が採用されてきた。

(1) 許容応力設計法

許容応力設計法 (allowable stress design method) とは、設計荷重値に基づいて設計応力 S^* を算出し、この応力値を、材料の公称強度 R^* を安全率 $Q^*(\geq 1)$ で除したいわゆる許容応力 (allowable stress) S_a 以下に抑えるという設計哲理をもつものである。すなわち、

$$S^* \leq S_a \leq R^* \quad (1)$$

ここに、

$$S_a = R^* / Q^* \quad (2)$$

この手法の意図する所は、真の荷重作用力と材料の抵抗力とを設計段階で評価することは不可能であるとの観点から、設計応力と公称強度の限界値でそれぞれを代表し、そのために予想される危険性 (リスク; risk) に対しては、設計安全率 Q^* によって獲得される安全性の余裕 (safety margin) を以て対処しようという主旨のものであるが、具体的な安全率の値の選定は経験や勘に頼らざるをえず、安全性の程度が不明確となりやすい欠点がある。

(2) 荷重係数設計法

土木工学の分野では構造物に作用する種々の異種荷重のばらつきの程度の違いや作用頻度、構造物に及ぼす影響度の違い等を考慮し、各荷重毎に用いる安全率を変化させることによって、よりバランスのとれた設計の実施を意図したものとして荷重係数設計法 (load factor design method) が行われている。^{38)~40)} この設計理念は一般には次式で表される。

$$\xi_g \left\{ \sum_{i=1}^k \xi_{S_i} \cdot S_i^* \right\} \leq \xi_m \cdot R^* \quad (3)$$

$$\xi_m = 1 / Q_m \quad (4)$$

ここに、 S_i^* 、 R^* はそれぞれ設計基準に規定された公称荷重作用力および構造物の公称抵抗力 (強度) である。また係数 ξ_{S_i} は一つの部分的な荷重 S_i^* に関する

荷重係数 (load factor)、 $\xi_m (\leq 1)$ は強度係数、 $Q_m (\geq 1)$ は部分安全率、 ξ_g は構造物の重要度や設計の対象となる限界状態の特性などを考慮した全体的な係数である。なお k は考慮の対象となる部分荷重の数を表す。

(3)、(4)式からわかるように、この荷重係数設計法は荷重ならびに抵抗力にかかわる不確定性をそれぞれ荷重係数および強度係数という係数を通して捕え、各係数の選定を合理的に行うことによって安全性の余裕をバランスよくもたせようとするもので、現在土木構造物の設計では広く用いられており、許容応力設計法に比べればその合理性は高いものと言うことができる。しかしながらこの場合にも各種の設計係数の選定に確率論的背景が乏しい難点がある。

上述のように、従来の設計手法はいずれも単一の代表値を以て荷重もしくは抵抗力を代表させるという決定論的手法であって、確率論的基盤に乏しい。これに対して、荷重および抵抗力のいずれもがあるばらつきをもった確率変数 (random variable) であると考え、両者の結合的考察の下に所定の信頼度に応じた設計を行おうとするのが信頼性設計手法もしくは確率論的設計手法と呼ばれるものである。以下、本稿ではこのような考え方に基づく信頼性設計理論を重点的に取扱う。

3 古典的信頼性理論

設計に際して従来決定論的に与えられていた安全率に代えて、荷重および抵抗力の統計的なばらつきの中に設計に伴う種々の確率的不確定性をも含めてこれらを確率変数として捕え、破壊確率 (probability of failure) p_f という概念を用いて安全性の評価基準とする設計理論が A. M. Freudenthal¹¹⁾¹³⁾ によって初めて提唱され、今日この理論が古典的信頼性理論 (classical reliability theory) と呼ばれている。

さて、抵抗力 (強度) R をもつ部材に荷重 (応力) S が作用している場合を考え、両者は互いに独立な確率変数であると仮定する。破壊は S が R を超過したときに生じるものと定義することによって、破壊確率 p_f を以下のようにして計算することができる。すなわち、 S および R の分布の密度関数をそれぞれ $f_S(s)$ 、 $f_R(r)$ 、またそれぞれの分布関数を $F_S(s)$ 、 $F_R(r)$ とすれば、図1を参照して

$$P[s \leq S \leq s + ds] \cong f_S(s) ds \quad (5)$$

$$P[R \leq s] = \int_{-\infty}^s f_R(r) dr = F_R(s) \quad (6)$$

S と R は統計的に独立であるから、 S が $s \sim s + ds$ の微小範囲に存在するときの破壊事象の確率は上の二つの確率の積で与えられることがわかる。それゆえ一般に破壊確率 p_f は

$$p_f = P[R \leq S]$$

*2 上述のように、不確定性という言葉の中には、各因子が本来もっている「統計的な変動性」に基づくものと、各因子の「予測精度あるいは予測誤差」に基づくものとの2側面が考えられるが、ここでは後者にも統計的な性質をもたせて取扱うこととする。

図1 破壊確率 p_f の求め方

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_S(s) F_R(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f_R(r) \{1 - F_S(r)\} dr \quad (7)$$

で求められる。最後の式は R と S の相対性から明らかである。破壊確率 p_f に対して、信頼度もしくは生存確率 (probability of survival) r は、破壊の余事象の確率として

$$r = 1 - p_f \quad (8)$$

で与えられる。もっと具体的に、例えば、 S および R が互いに独立に正規分布 $N(\mu_S, \sigma_S^2)$ および $N(\mu_R, \sigma_R^2)$ に従うとしたときには、

$$p_f = 1 - \Phi\left[\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right] = \Phi\left[-\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right] \quad (9)$$

ただし、 $\Phi(u)$ は標準正規分布 $N(0, 1^2)$ の分布関数であって次式で定義されるものである。

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt \quad (10)$$

設計に際しては上で計算された p_f をある与えられた許容値 (acceptable risk) p_{fa} 以下となるように安全性を保证する。すなわち、

$$p_f \leq p_{fa} \quad (11)$$

荷重側の情報は通常設計時には与えられており、換言すれば、 μ_S, σ_S は既知であると考えてよいから、設計哲理としては σ_R を与えて抵抗力の平均値 μ_R を(7)、(11)式によって規定することにあると考えられる。したがって S および R が互いに独立に正規分布に従う場合には(9)、(11)式から

$$\mu_R \geq \mu_S + \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \Phi^{-1}(1 - p_{fa}) \quad (12)$$

によって部材寸法を規定することができる。ここに、 $\Phi^{-1}(\cdot)$ は $\Phi(u)$ の逆関数である。なお、

$$Q = R/S \quad (13)$$

とすれば、この Q はまた確率変数であって、これを統計的安全率 (statistical safety factor) と呼び、また

$$Q_0 = \mu_R / \mu_S \quad (14)$$

を中央安全率 (central safety factor) と言う。⁴²⁾ S および R が共に独立な正規分布に従うものとし、またそれぞれの変動係数 (coefficient of variation) を

$$\left. \begin{aligned} V_S &= \sigma_S / \mu_S \\ V_R &= \sigma_R / \mu_R \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

としたとき、中央安全率 Q_0 は

$$Q_0 = \frac{1 + u_{pf} \sqrt{V_R^2 + V_S^2} - (V_R V_S u_{pf})^2}{1 - (V_R V_S)^2} \quad (16)$$

ただし

$$u_{pf} = \Phi^{-1}(1 - p_f) \quad (17)$$

として求められる。換言すれば、構造物に関して V_R と V_S と p_f が与えられれば中央安全率 Q_0 が計算される。

ここで、 S と R との密度関数のかわりにおいて破壊確率 p_f を概念的に捕えてみよう。図2に示すように、中央安全率 Q_0 が大となれば p_f は減少し、したがって信頼度は増大し、逆に S もしくは R の不確定性 (標準偏差) が増大すれば p_f は増加し、したがって信頼度は減少する。

図2 破壊確率 p_f の動向

S および R の分布が正規分布以外の場合でも、理論的には(7)式を用いて破壊確率 p_f が計算されるが、必ずしも解析的な形になるとは限らず、数値積分やモンテカルロ法 (Monte Carlo simulation method) によらなければならないこともある。またここで注意しなければならないことは p_f は破壊の定義式によっても異なる場合があることである。すなわち安全性の余裕を Z と表すこととすれば、これまでは $Z = R - S$ と定義し、破壊事象 $\{Z \leq z_0\}$ の判定レベルを $z_0 = 0$ と考えてきたわけであるが、その他の Z の定義式とそれに基づく破壊確率 p_f の算定結果を表Iに掲げておく。 R と S の分布が既知であれば、 Z を標準化した

$$\xi = (Z - \mu_z) / \sigma_z \quad (18)$$

の分布関数 $F_\xi(\xi)$ も原則的には既知となるが、必ずしも標準正規分布になるとは限らない。そこで参考のため ξ が $N(0, 1^2)$ に従うとした場合の p_f も併せて表示しておいた。なお、同表においては S と R とは統計的に独立と仮定し、場合によっては小変動係数の仮定 ($V_R^2 \leq 0.1, V_S^2 \leq 0.1$) を用いて結果を近似してある。

さて、上述した古典的信頼性理論は従来の決定論的設計手法に比べて、非常に簡明な確率論的根拠を与えるものではあるが、現実の適用に当たってはなお以下のような種々の制約がある。すなわち、

(i) S と R の分布形が既知という前提に立って解析が進められるが、設計段階でこれらの分布形を厳密に確定するに足るだけの情報量をもちえないことが多い。それゆえ、分布形とかその母数値とかは何らかの仮定を用いて決めることになるが、図3に示すように、一

表 I 目的関数 Z の定義式と破壊確率 p_f

Z の定義式		$Z = \ln R/S$	$Z = R - S$	$Z = R/S$
破壊事象 $\{Z \leq z_0\}$ の判定レベル		$z_0 = 0$	$z_0 = 0$	$z_0 = 1$
Z の 平 均 値 μ_Z		$\ln \frac{\mu_R}{\mu_S} = \ln Q_0$	$\mu_R - \mu_S$	Q_0
Z の 標 準 偏 差 σ_Z		$\sqrt{V_R^2 + V_S^2}$	$\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$	$Q_0 \sqrt{V_R^2 + V_S^2}$
破壊確率 p_f	$\zeta = \frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z}$ の分布関数 $F_\zeta(\zeta)$ を用いた場合	$F_\zeta\left(\frac{-\ln Q_0}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}}\right)$	$F_\zeta\left(\frac{-(\mu_R - \mu_S)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right)$	$F_\zeta\left(\frac{1 - Q_0}{Q_0 \sqrt{V_R^2 + V_S^2}}\right)$
	ζ が $N(0, 1^2)$ に従う場合	$1 - \Phi\left(\frac{\ln Q_0}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}}\right)$	$1 - \Phi\left(\frac{Q_0 - 1}{\sqrt{Q_0^2 V_R^2 + V_S^2}}\right)$	$1 - \Phi\left(\frac{Q_0 - 1}{Q_0 \sqrt{V_R^2 + V_S^2}}\right)$
備 考		R S	平 均 μ_R μ_S	標準偏差 σ_R σ_S
			変動係数 V_R V_S	中央安全率 $Q_0 = \frac{\mu_R}{\mu_S}$

図3 分布形が破壊確率に及ぼす影響 (古典的信頼性理論)

般に小さな破壊確率 p_f の値 ($p_f < 10^{-3}$) に対しては分布形の及ぼす影響が非常に大きく、 p_f によって設計安全率を決定することが困難である。

(ii) 情報量の不足によって生じる不確定性の取扱いがなされていない。

(iii) S および R の分布特性の中には荷重および抵抗力の本来のばらつきに加えて、荷重のモデル化、構造解析上の仮定、あるいは設計・製作・施工の各段階で生じる誤差などに基づく不確定性をも含み込んでおり、後者の取扱いの根拠が明確ではない。

以上のような種々の制約を有しながらもなお本古典的信頼性理論は信頼性理論の基礎概念を与えるものとして極めて重大な意義を有するものであることは言うまでもない。

4 拡張信頼性理論

古典的信頼性理論における欠点を克服するために、Ang, Amin らによって提案されたものが拡張信頼性

理論 (extended reliability theory) と呼ばれるものである。この理論では不確定性を客観的なもの (objective uncertainty) と主観的なもの (subjective uncertainty) とに分けて取扱う。前者は本来の統計的な変動性に基づくものであり、後者は荷重のモデル化や構造解析上のモデル化に伴う誤差、設計・製作・施工段階で混入する人為的誤差などその性質上設計者の主観的判断に基づいて決定せざるをえないようなものである。

さて、荷重 S ならびに抵抗力 R に関する不確定性をそれぞれ客観的なもの S_0 , R_0 および主観的なもの N_S , N_R に分け

$$R = R_0/N_R, \quad S = N_S \cdot S_0 \quad (19)$$

と表されるものとすれば、破壊確率 p_f (安全性の余裕 $Z = R - S$ に対する) は

$$\begin{aligned} p_f &= P[R \leq S] = P[R_0/N_R \leq N_S \cdot S_0] \\ &= P[R_0 \leq N \cdot S_0] \end{aligned} \quad (20)$$

ここに、

$$N = N_S \cdot N_R \quad (21)$$

であって、これを判定係数 (judgement factor) と呼ぶ。

ここで、確率変数 S_0 , R_0 , N_S , N_R は互いに統計的に独立であるものとし、判定係数 N に対してある特定の値 ν を導入して、二つの事象 $\{R_0 \leq N \cdot S_0\}$ と $\{R_0 \leq \nu S_0 \cap N > \nu\}$ との間に次の包含関係

$$\{R_0 \leq N \cdot S_0\} \supset \{R_0 \leq \nu S_0 \cap N > \nu\}$$

が成り立つことを勘案すれば、(20)式の p_f は

$$\begin{aligned} p_f &= P[R_0 \leq N \cdot S_0] \geq P[R_0 \leq \nu S_0 \cap N > \nu] \\ &= P[R_0 \leq \nu S_0] \cdot P[N > \nu] \end{aligned} \quad (22)$$

となる。ところで上式においては N を $N > \nu$ と条件付けるため破壊確率 p_f を過小評価するであろうから、これを補正するために補正係数 h ($0 < h < 1.0$) を導入

し、 p_f を次式によって近似する。

$$p_f \cong P[R_0 \leq \nu S_0] \cdot P[N > \nu h] = p_0 p_s \quad (23)$$

ここに、Ang, Amin によれば、 h はほぼ $h \cong 0.85$ としてよいとされ、また p_0, p_s はそれぞれ客観的不確定性および主観的不確定性に基づく破壊確率であり、結局全体の破壊確率 p_f は両者の積で評価されることが示される。

図4に拡張信頼性理論に基づく p_f (23式) に及ぼす分布形の影響を示す。ただし、23式の p_0, p_s の関係としては $p_0 = p_s = \sqrt{p_f}$ を用い、確率変数 N については平均値 $\bar{N} = 1.0$ 、変動係数 $\Delta N = 0.2$ の対数正規分布に従うものと仮定されている。また同図中の分布形の略号は先の古典的信頼性理論に関する図3と同じで

図4 不確定性の分離と破壊確率 p_f
(拡張信頼性理論)
(注) 分布記号は図3と同じ

ある。図に明らかなように拡張信頼性理論による場合には $p_f = 10^{-6}$ 程度の小さな p_f の領域でも分布形の及ぼす影響はそれほど大きくないことが観察される。これは図4においては $p_0 = p_s = \sqrt{p_f}$ を仮定しているため、 $p_f = 10^{-6}$ の場合でも客観的不確定性に基づく p_0 は $p_0 = \sqrt{p_f} = 10^{-3}$ となっており、この程度の破壊確率の領域では先の図3に見られたように分布形の影響が小さい領域に相当するからである。

拡張信頼性理論によれば上述のように不確定性に対するより合理的な取扱いが可能となるが、一方において、許容破壊確率 p_{fs} に対して客観的なもの (p_0) と主観的なもの (p_s) との割合をどのように割振するかについては明確な根拠をもたない。 $p_0 = p_s = \sqrt{p_f}$ とするのはあくまでも便宜的なものであるし、また判定係数 N が対数正規分布に従うと仮定するのも明確な論拠をもつものではないという制約がある。

5 線形化2次モーメント法に基づく信頼性理論

5・1 序説

古典的信頼性理論、さらには拡張信頼性理論のもつ制約を克服し、また利用可能なデータがそれ程多くはないという工学的現状の中で機械・構造物の信頼性設計を実施するための手法として勘案されてきたのが本節の線形化2次モーメント法による信頼性理論である。¹⁴⁾

さて、設計に際して考慮する必要のある不確定性を含んだ設計変数を確率変数として捕え、 $X_1, X_2, \dots, X_n$ と表すことにしよう。一般に破壊とは機械・構造物もしくはその構成部材が規定の機能を損うことによって生じるわけであるから、その機能遂行状態を表す目的関数

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (24)$$

を構成し、事象 $\{Z=0\}$ がその構造物の限界状態 (limit state) を表し、 $\{Z \leq 0\}$ が破壊状態、また $\{Z > 0\}$ が安全状態を表すものと定義する。もちろん構造物に対しては種々の機能を同時に取扱う (モードの異なる破壊を同時に考慮する) 必要のある場合も多々あるであろうが考え方は全く同様である。それゆえ、構造物の破壊確率 p_f および信頼度 γ はそれぞれ

$$p_f = P[Z \leq 0] \quad (25)$$

$$\gamma = P[Z > 0] = 1 - p_f \quad (26)$$

として評価できることになる。

いま仮に Z の分布が既知であるものとすれば

$$\begin{aligned} p_f &= \int_{-\infty}^0 f_z(z) dz = F_z(0) \\ &= \int \dots \int_D f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\quad dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (27) \end{aligned}$$

として p_f が計算可能である。ただし、 $f_z(z)$ 、 $F_z(z)$ はそれぞれ Z の密度関数、分布関数を表し、 $f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ は $X_1, X_2, \dots, X_n$ の結合密度関数であって、また D は

$$z = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad (28)$$

を満足する n 次元空間内の領域である。全く理想の場合として、各々の設計変数が互いに独立であって、それぞれの密度関数が完全に既知なものとしても、

$$F_z(z) = \int \dots \int_{\{g \leq z\}} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (29)$$

という一般には非常に複雑な形の多重積分を解くことによらなければ p_f が求められない。さらに現実的観点に立脚して考えてみると、各々の X_i の密度関数 $f_{X_i}(x_i)$ 自体も、恐らくは限られた標本データからの推定であろうから、(29式)によって厳密に $F_z(z)$ を求め得たとしても、誤差の混入はまぬがれぬ所であることが容易に推察され、さらにはまた(24式)の目的関数 g の形そのものも、何らかの理想化されたモデルに基づいて導出されていることが現実問題としては多々あるであろうと思われる。それゆえ、実務的には何らかの

近似的取扱いによって計算効率を高め、経済的にバランスのとれた解析を行う方が望ましいものと考えられる。そこで、通常設計変数の変動性に関する情報は多くの場合が平均値と変動係数もしくは標準偏差という形で与えられているのが一般であるという事実を勘案して、 Z の平均値 μ_z と変動係数 V_z とを設計変数のそれから近似的に求めて、その後 Z の分布形に対する配慮を行うという、いわゆる線形化2次モーメント法が採用されるところとなる。分布形の正確にわかっていない変数を用いて信頼性解析を行うことは、言わばある仮定した分布形の下での信頼度の相対評価を行うにすぎないという反論もあるであろうが、正にこの相対評価が重要度評価 (sensitivity study)⁴⁾ などにおいては実用上大きな意味を有するものと考えられるのである。

5・2 1次近似の手法

設計変数 X_i の平均 (1次モーメント) μ_{X_i} および分散 (2次モーメント) $\sigma_{X_i}^2$ のみを用いて目的関数 Z の平均 μ_z と分散 σ_z^2 を評価するためには1次近似の手法を用いる。

n 個の設計変数 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ に関する n 次元空間内で定義された4式)の目的関数 Z を各設計変数 X_i の平均値 μ_{X_i} の点 $\bar{X}=(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})$ の回りに Taylor 展開⁴⁵⁾すれば、

$$\begin{aligned} Z &= g(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ &= g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) \\ &\quad + \sum_i (X_i - \mu_{X_i}) \left[\frac{\partial g}{\partial X_i} \right]_{\bar{X}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j}) \left[\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right]_{\bar{X}} \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (30)$$

ここに $[\partial g / \partial X_i]_{\bar{X}}$ および $[\partial^2 g / \partial X_i \partial X_j]_{\bar{X}}$ はいずれも点 $\bar{X}$ において評価された微係数を表す。

上式において2次以上の項を無視すれば

$$Z \cong g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) + \sum_i (X_i - \mu_{X_i}) \left[\frac{\partial g}{\partial X_i} \right]_{\bar{X}} \quad (31)$$

すなわち Z を X_i に関する1次式に線形化して取扱おうとするのが1次近似の手法である。(31)式から

$$\mu_z = E[Z] \cong g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) \quad (32)$$

$$\sigma_z^2 = E[(Z - \mu_z)^2] \cong \sum_i \sum_j A_i A_j \text{Cov}[X_i, X_j] \quad (33)$$

ただし、

$$A_i = [\partial g / \partial X_i]_{\bar{X}} \quad (34)$$

$$\text{Cov}[X_i, X_j] = E[(X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j})] \quad (35)$$

であって、(33)式は $i \neq j$ のときには X_i と X_j の共分散を、 $i=j$ のときには X_i の分散を表す記号である。なお、 X_i と $X_j (i \neq j)$ が統計的に独立ならば $\text{Cov}[X_i, X_j] = 0$ であるから

$$\sigma_z^2 \cong \sum_i A_i^2 E[(X_i - \mu_{X_i})^2] = \sum_i A_i^2 \sigma_{X_i}^2 \quad (36)$$

となる。また特殊な場合として $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ が変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ のすべてに関して、1次の積もしくは商のみの形 (X_i について $X_i^{\pm 1}$ の形) で表される場合には、 Z の変動係数 V_z は各々の変数 X_i の変動係数 V_{X_i} を用いて、

$$V_z^2 = \sum_i V_{X_i}^2 \quad (37)$$

と表すことができる。これを繰返し用いれば、 Z が X_i に関して $X_i^{m_i}$ (m_i は整数) の形のみで構成されるときには、

$$V_z^2 = \sum_i m_i V_{X_i}^2 \quad (38)$$

と拡張することができる。

5・3 不確定性のモデル化と Ang の信頼性理論

Ang は先の拡張信頼性理論を発展させ、設計変数 X_i や目的関数形 g のもつ固有の統計的ばらつき (客観的不確定性) に加えて、推定やモデル化の不備に付随した不確定性 (主観的不確定性) をもうまくモデル化して数量的に取扱い、線形化2次モーメント法を用いて¹⁰⁾⁴⁶⁾ μ_z や V_z を評価する信頼性設計理論を提案している。

はじめに不確定量のモデル化について述べよう。いま任意の設計変数 X_i を考える。設計に際してはこの X_i のもつ変動性を何らかの情報に基づいて客観的に推測するわけであるから、そのような予測モデルを $\hat{X}_i$ としよう。もちろんこの $\hat{X}_i$ は情報量の不足あるいはモデル化の不備 (imperfection) のために真の X_i とは異っているであろうと考えられるので、この差異を勘案した補正係数 N_{X_i} を導入して、

$$X_i = N_{X_i} \cdot \hat{X}_i \quad (39)$$

で表されるものとする。ここで、真の X_i のもつ本来的な (客観的) 変動性は推定モデル $\hat{X}_i$ が代表するものとし、またモデル化の不備に伴う (主観的) 変動性は補正係数 N_{X_i} に含まれるものとする。

さて、 $\hat{X}_i$ は通常利用可能なデータもしくは他の情報に基づいて推定された標本平均 $\bar{X}_i$ 、標本標準偏差 s_{X_i} をもつ確率変数と考えてよい。またその不確定性の程度は変動係数 $\delta_{X_i} = s_{X_i} / \bar{X}_i$ で評価することができる。一方、補正係数 N_{X_i} は主観的確率 (subjective or personal probability) を基としたベイズ的な意味での確率変数であるとし、その平均値 $\bar{N}_{X_i}$ が $\bar{X}_i$ のもつ真の X_i の平均値からの偏り (bias) を代表するものとする。またその変動係数 $\delta_{N_{X_i}}$ は厳密には推定モデル $\hat{X}_i$ を選ぶことに関連したすべての誤差を含むべきものとする必要があるが、ここでは取扱いの簡便さと近似手法としての意味からも、第1近似として $\bar{X}_i$ の推定誤差のみを反映させて考えることにする。すなわち、

$$N_{X_i} = \mu_{X_i} / \bar{X}_i \quad (40)$$

ここに、 μ_{X_i} は平均値 $\bar{\nu}_{X_i}\bar{X}_i$ をもったベイズ的な意味での確率変数として考える。換言すれば、 N_{X_i} に関しては

$$E[N_{X_i}] = \bar{\nu}_{X_i} \quad (41)$$

であり、その変動係数 A_{X_i} は $\mu_{X_i}/\bar{X}_i$ の変動係数として求めることができる。

上述のように、設計変数 X_i を③式のような形でモデル化したとき、 N_{X_i} と $\hat{X}_i$ とはそれぞれ平均値 $\bar{\nu}_{X_i}$ 、 $\bar{X}_i$ 、および変動係数 A_{X_i} 、 δ_{X_i} をもち、したがって N_{X_i} と $\hat{X}_i$ が互いに統計的に独立であるものとすれば、 X_i の平均 μ_{X_i} および変動係数 V_{X_i} は、前小節に述べた1次近似の手法を用いて、

$$\mu_{X_i} \cong \bar{\nu}_{X_i} \bar{X}_i \quad (42)$$

$$V_{X_i} \cong \sqrt{\delta_{X_i}^2 + A_{X_i}^2} \quad (43)$$

として算定することができる。④3式の V_{X_i} が X_i のもつ全不確定性の指標を与える。

ところで不確定性の解析に際しては設計変数それ自体の不確定性のみならず、目的関数 g 自身のもつ不確定性に関してもまた考慮する必要がある。すなわち通常は $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ の真の姿は未知であろうから、その代用として一つのモデル関数 $\hat{g}$ を用いていると考え、再びここでも補正係数 N_g を導入し、

$$g = N_g \cdot \hat{g} \quad (44)$$

と置く。 X_i の場合と全く同様の議論に基づいて、補正係数 N_g は平均値が $\bar{\nu}_g$ のベイズの確率変数であり、この $\bar{\nu}_g$ は $\hat{g}$ の平均的な偏りを表すものとする。換言すれば、比 $g/\hat{g}$ の平均が $\bar{\nu}_g$ となることを意味する。また N_g の不確定性はその変動係数 A_g で表され、これはまた $g/\hat{g}$ の変動係数として把握される。

一方、目的関数のモデル形 $\hat{g}$ に関しては、これが確率変数であると考えられる場合には変動係数 δ_g を導入することによって、結局 g の不確定性は

$$V_g \cong \sqrt{\delta_g^2 + A_g^2} \quad (45)$$

で評価することができる。また、 g が通常よく見られるように決定論的関数であると考えられる場合には、 $\delta_g = 0$ とすればよいから、

$$V_g = A_g \quad (46)$$

となる。

以上、各設計変数 X_i と目的関数の形 g のもつ不確定性を総合的に考慮することによって、③2、③3式に与えた目的関数 Z の1次近似手法による平均 μ_z と分散 σ_z^2 は以下のように求めることができる。

$$\mu_z \cong \bar{\nu}_g \cdot \hat{g}(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) \quad (47)$$

$$\sigma_z^2 \cong (V_g \mu_z)^2 + \sum_i \sum_j \rho_{ij} A_i A_j \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \quad (48)$$

ここに、

$$\mu_{X_i} = \bar{\nu}_{X_i} \bar{X}_i \quad (49)$$

$$\sigma_{X_i} = \mu_{X_i} V_{X_i} \quad (50)$$

$$\rho_{ij} = \text{Cov}[X_i, X_j] / (\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}) \quad \left. \begin{array}{l} (i \neq j \text{ のとき}) \\ = 1 \quad (i = j \text{ のとき}) \end{array} \right\} \quad (51)$$

$$A_i = [\partial \hat{g} / \partial X_i] \bar{X} \quad (52)$$

であって、 ρ_{ij} は X_i と X_j ($i \neq j$) の相関係数 (coefficient of correlation) と呼ばれるものである。

ところで、本手法は各設計変数の分布特性としてそれぞれの平均値および標準偏差もしくは変動係数のみを用いることによって、目的関数 Z の分布特性を同じく平均値と標準偏差もしくは変動係数という形で捕えて評価しているわけであるから、全設計変数 X_i の密度関数および目的関数 Z の関数形 g が与えられるのであれば、 Z の正確な分布形は未知であり、したがってそれを標準化した変数

$$\zeta = (Z - \mu_z) / \sigma_z \quad (53)$$

の分布関数 $F_\zeta(\zeta)$ の正確な形も未知である。しかしながら不確定性を本来の客観的なものと人為的・主観的なものとに分けて取扱った拡張信頼性理論における Ang らの結果 (図4) によれば、破壊確率 p_f は分布形の影響をそれほど受けなくなるということ、およびある分布形を仮定した場合には、信頼度の評価が相対的尺度によってしかなされないといえども、その相対評価が実用上の合理性を欠くものでは決してないこと等の理由から、⑤3式の ζ の分布として標準正規分布 $N(0, 1^2)$ を仮定することがよく行われる。

さて、ここで設計許容信頼度 γ_a が与えられたとしよう。対応する許容破壊確率は

$$p_{fa} = 1 - \gamma_a \quad (54)$$

で与えられる。したがって信頼性設計のためには

$$p_f = P[Z \leq 0] = F_\zeta\left(\frac{0 - \mu_z}{\sigma_z}\right) \leq p_{fa} (= 1 - \gamma_a) \quad (55)$$

が満足されなければならない。それゆえ

$$-\mu_z / \sigma_z \leq -\beta, \quad \text{つまり} \quad \mu_z \geq \beta \sigma_z \quad (56)$$

ここに、

$$\beta = -F_\zeta^{-1}(p_{fa}) = -F_\zeta^{-1}(1 - \gamma_a) \quad (57)$$

は信頼性指標 (reliability index) または安全性指標 (safety index) と名付けられている。 Z の標準形 ζ が $N(0, 1^2)$ に従うときには

$$\beta = -\Phi^{-1}(p_{fa}) = -\Phi^{-1}(1 - \gamma_a) = \Phi^{-1}(\gamma_a) \quad (58)$$

となるから、 β を信頼性 (安全性) 指標と呼ぶ意義が明らかである。⑤6式がこの理論における信頼性設計の基準式を与える。

なお、 γ_a もしくは p_{fa} の値をいくらに選ぶかについては、理想的には機械・構造物が破壊した場合に受けるであろう経済的・社会的な影響・損害と企画、設計を含めての建設費との相対比較の中で、機械・構造物がもつ重要度や耐用期間の長さなども考慮して決める必要があるであろうが、一般に、土木構造物のよう

な場合にはこれらの諸因子を数量化することが極めて困難であり、必然的に μ_{fa} や γ_a の定量的な設定については技術者の経験的な判断に頼らざるをえないという場合も多い。このような観点から、先に μ_{fa} や γ_a を与えて信頼性指標 β を求めるという立場とは逆に、 β を先に定義し、安全性の尺度とするということも考えられるが、これについては次節で論じる。

5・4 FOSM 法

FOSM 法とは First-Order Second-Moment による方法、すなわち線形化 2 次モーメント法を用いた信頼性解析法であって、¹⁴⁾ 概念的には前小節 Ang の理論の後半の部分と類似的である。すなわち、破壊に対する限界状態の定義式 (24 式の目的関数) Z を各設計変数 X_i の平均値の点 $\bar{\mathbf{X}} = (\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})$ の回りに Taylor 展開することによって線形近似し、先の (31 式) として取扱う 1 次近似の手法を用いる。したがって、各々の設計変数が統計的に独立であると仮定すれば、(32), (36) 式から

$$\mu_z = E[Z] \cong g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) \quad (59)$$

$$\sigma_z^2 = E[(Z - \mu_z)^2] \cong \sum_i \left[\left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_0^2 \cdot \sigma_{X_i}^2 \right] \quad (60)$$

上両式がどの程度正確な近似であるかは (30 式) の Z を (31 式) のように 2 次以上の項を無視して取扱う影響と X_i の変動係数の大きさに依存することは明らかである。

ここで、信頼性指標または安全性指標と呼ばれる β を

$$\beta = \mu_z / \sigma_z \quad (61)$$

すなわち Z の変動係数の逆数として定義する。⁴³⁾ Z が荷重 S および抵抗力 R の 2 変数のみで定義される場合の μ_z と σ_z ならびに μ_f はすでに表 I に例示したとおりであるから、 S と R とが互いに独立に正規分布に従うときには

$$\beta = (\mu_R - \mu_S) / \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (62)$$

であり、さらに S と R とが互いに独立対数正規分布に従い、かつ $Z = \ln(R/S)$ と表されるとき指標 β は小分散近似を用いれば

$$\beta = \{\ln(\mu_R/\mu_S) / \sqrt{V_R^2 + V_S^2}\} \quad (63)$$

で与えられることになる。これらの β の式は実際に設計において用いられている。^{7) (38)}

S と R とが正規分布をしている場合には破壊確率 p_f は (62 式) の β を用いて $\Phi(-\beta)$ と表すことができ、この β は直接 p_f や信頼度 γ を表す一つの尺度となる。

Z を平均値点の回りに線形化して評価する FOSM 法は簡便ではあるが以下にのべる基本的な欠点をもっている。すなわち第 1 には、目的関数 $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ が非線形のときには高次項を無視した線形化近似による誤差が線形化点 $\bar{\mathbf{X}}$ から離れるにつれて大きく導入されるであろうことが考えられる。一般には信頼性設計で取扱われる限界状態 $\{Z=0\}$ の表す曲面は

平均値の線形化点 $\bar{\mathbf{X}}$ とはかなり離れた位置にあるであろうから特に注意が肝要である。換言すればこのような場合には指標 β のもつ意義がどの程度明確であるのかが疑問となる。第 2 には、FOSM 法による β は破壊のクライテリオン、すなわち Z の定義式によって影響を受け、内容的には等価な領域であっても解析的な表現が異なる場合には必ずしも同一の、すなわち不変の (invariant な) β を提供するものではないという欠点である。⁴⁷⁾

以上いずれの欠点も、 Z を限界状態を表す曲面上の適当な 1 点で線形化することによって、取除くことができる。これが次節に述べる AFOSM (Advanced First-Order Second-Moment) 法である。^{14) (48)}

6 AFOSM 法

Z を限界状態曲面上のどの点で線形評価すればよいかを考えるため、初めにすべての設計変数 X_i を標準化して考える。

$$x_i = (X_i - \mu_{X_i}) / \sigma_{X_i} \quad (64)$$

明らかに (64 式) の変換による $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ の平均値と標準偏差は $\mu_{x_i} = 0, \sigma_{x_i} = 1$ である。一方、 X_i に関する限界状態曲面

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (65)$$

は (64 式) の標準化変数を用いれば

$$Z = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (66)$$

と書き表すことができる。

ここで、限界状態曲面 (66 式) 上の 1 点 $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ を考え、点 $\mathbf{x}_0$ の回りに (66 式) を Taylor 展開して 2 次以上の項を無視すれば

$$g_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0 \quad (67)$$

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cong g_0(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (68)$$

$$g_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \Delta x_i^0 \left[\frac{\partial g_1}{\partial x_i} \right]_0 = \Delta \mathbf{x}_0^T \mathbf{G}_0 \quad (69)$$

ここに、

$$\Delta x_i^0 = x_i - x_i^0 \quad (70)$$

$$\Delta \mathbf{x}_0 = [\Delta x_1^0 \Delta x_2^0 \dots \Delta x_n^0]^T \quad (71)$$

$$\mathbf{G}_0 = \left[\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right)_0 \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right)_0 \dots \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_n} \right)_0 \right]^T \quad (72)$$

であって、 $(\partial g_1 / \partial x_i)_0$ の添字 0 は線形化点 $\mathbf{x}_0$ に関する評価であることを表し、 $\Delta \mathbf{x}_0$ と $\mathbf{G}_0$ はともに列ベクトルであって、 T は転置行列の記号である。

さて、 x_i が互いに独立であると仮定し、(69 式) の関数 $g_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の期待値を μ_{g_0} および標準偏差を σ_{g_0} とすれば、

$$\mu_{g_0} = - \sum_{i=1}^n x_i^0 \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_i} \right)_0 = - \mathbf{x}_0^T \mathbf{G}_0 \quad (73)$$

$$\sigma_{g_0} = \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_i} \right)_0^2 \right]^{1/2} = (\mathbf{G}_0^T \mathbf{G}_0)^{1/2} \quad (74)$$

ここに、 $\mathbf{x}_0^T$ は行ベクトルであって

$$\mathbf{x}_0^T = [x_1^0 \ x_2^0 \ \cdots \ x_n^0] \quad (75)$$

である。FOSM 法における(7)式にならって

$$\beta_0 = \frac{\mu g_0}{\sigma_{g_0}} = - \frac{\mathbf{x}_0^T \mathbf{G}_0}{(\mathbf{G}_0^T \mathbf{G}_0)^{1/2}} \quad (76)$$

と定義することにすれば β_0 の値は明らかに線形化点 $\mathbf{x}_0$ に依存する。 $Z = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が原点に向って凹であり、 $\beta_0 > 0$ と仮定すると、(76)式の β_0 のうち最小値を β とし、これを信頼性指標もしくは安全性指標と定義する。 β_0 の最小値を与える点 $\mathbf{x}_0$ を $\mathbf{x}^*$ と表し、これを設計点 (design point or checking point) と呼ぶ。

$$\beta = \frac{\mu g^*}{\sigma_{g^*}} = - \frac{\mathbf{x}^{*T} \mathbf{G}^*}{(\mathbf{G}^{*T} \mathbf{G}^*)^{1/2}} \quad (77)$$

ここに、

$$\mathbf{G}^* = \left[\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right)_* \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right)_* \cdots \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_n} \right)_* \right]^T \quad (78)$$

$$\mathbf{x}^{*T} = [x_1^* \ x_2^* \ \cdots \ x_n^*] \quad (79)$$

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \quad (80)$$

AFOSM 法による β の求め方を $n=2$ の場合を例にとって図5(a)および(b)に例示してある。また図6には β_0 と β の図式解釈を与えてある。

設計点 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ はまた次のようにしても求められる。すなわち、連立方程式

$$\alpha_i = - \frac{\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_i} \right)_*}{\left[\sum_i \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_i} \right)_*^2 \right]^{1/2}} \quad (81)$$

$$x_i^* = -\alpha_i \beta \quad (82)$$

$$g_1(x_1^*, x_2^*, x_n^*) = 0 \quad (83)$$

(b) 標準化変数 x_1, x_2 の座標系

図5 AFOSM 法による信頼性指標 β の求め方

図6 AFOSM 法における β_0 と β の説明図

を反覆法 (iterative method) によって解き、 β を最小にする方向余弦 α_i を求めることによって設計点 $\mathbf{x}^*$ を決定すればよい。このとき元の設計変数 X_i の n 次元空間では設計点 $\mathbf{X}^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$ は

$$\begin{cases} X_i^* = \mu_{X_i} (1 - \alpha_i \beta V_{X_i}) \\ g(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) = 0 \end{cases} \quad (84)$$

$$g(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) = 0 \quad (85)$$

で与えられることがわかる。

逆に予め目標の信頼性指標 β の値が与えられているものとすれば、これまでに述べた手法を逆にたどって設計点 $\mathbf{x}^*$ もしくは $\mathbf{X}^*$ を求めることができる。

(7)式の信頼性指標 β は Lagrange の乗数法を用いて容易に求められることが Shinozuka¹⁶⁾ によって示され、また設計点を最大尤度点と解釈して求める手法も開発されているが、本節ではこれ以上触れない。

7 β に及ぼす分布形の影響

これまで述べた FOSM 法にしろ、AFOSM 法にしろ、 β は限界状態を定義する目的関数 Z を構成する設計変数の平均と分散のみに依存するものと考え、設計変数の分布形にはあまり考慮を払わなかった。事実、 X_i がすべて独立な正規変数であり、 Z がその線形結合で表されるような場合には、これまでの β が破壊確率なり信頼度なりを直接規定するものとしての役割をもっていたのであるが、現実にはこのような理想的な場合はあまりないであろう。そこでこれまで述べた AFOSM による β は全設計変数が正規であるとしたときの一つの基準値 (reference value) を与えるものと考え、ここでは設計変数の非正規性をも考慮した β の決定法について述べよう。⁴⁹⁾

簡単のため、標準化された変数 x_i はすべて独立であると仮定し、 n 個の変数 x_i のうちで正規性をもたないものを x_j と表し、これを正規性変数 u_j に次式によって変換する。

$$u_j = \Phi^{-1}\{F_j(x_j)\} \quad (86)$$

ただし、 $F_j(x_j)$ は非正規変数 x_j の分布関数であり、また $\Phi^{-1}(\cdot)$ は標準正規分布関数の逆関数である。

一方, x_i のうちで残りの正規性をもつものに対してはそれらを u_k と改めて書くことにすれば, n 個の要素をもつランダム・ベクトル $\mathbf{x}$ がすべて正規性の要素をもつランダム・ベクトル $\mathbf{u}$ に変換されることになり, またこの変換によって限界状態の定義式

$$Z = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (87)$$

は, 変換

$$\mathbf{x} = F^{-1}(\Phi(\mathbf{u})) \quad (88)$$

を通して

$$Z = g_1[F^{-1}\{\Phi(\mathbf{u})\}] = h_1(\mathbf{u}) \quad (89)$$

として $\mathbf{u}$ 空間で定義される. $\mathbf{u}$ 空間ではすべての変数は正規性をもつから, 先に AFOSM 法の所で述べたと全く同様の考え方から $\mathbf{u}$ 空間での設計点 $\mathbf{u}^*$ が求まり, これを

$$\mathbf{x}^* = F^{-1}\{\Phi(\mathbf{u}^*)\} \quad (90)$$

によって逆変換すれば $\mathbf{x}$ 空間での設計点 $\mathbf{x}^*$ が求められる. また, 破壊確率 p_f は次式で算定される.

$$p_f = \int_D f_u(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \quad (91)$$

ただし, D は $h_1(\mathbf{u}) \leq 0$ を満足する領域である.

あるいはまたこの場合にも Rackwitz の反覆法としての (81)~(89) 式が用いられることが示されている.

なお, 本節に述べた手法は非正規性の影響を勘案した手法ではあるが, 一般には設計点において非線形の Z を線形近似する際の誤差を解消せしめるものではないので, 非線形性が強い場合¹³⁾には Z をもっと高次の項までとって評価すればよい.

8 おわりに

信頼性に基づいた機械・構造物の強度設計の考え方として信頼性設計理論に焦点をあて, その基礎的概念から最新の応用的研究に至るまでを概説した. 信頼性の考え方は近年非常な関心を見るに至り, 広範な研究が各所で行われ始めている. もとより本稿はそれらのすべてを包括するものではないが, 基本的立場として信頼性をどのように捕え, それを設計に反映させて行くべきかという点については詳しく論じたつもりである.

また本稿は主として荷重と抵抗力とのかかわりという立場から時間的には静的な側面から信頼性設計の在り方を捕えたものである. 複雑な機械・構造物の設計という観点からは構造物信頼度の各部材への配分問題, 繰返し荷重を受ける場合には時間的な強度劣化を考慮した疲労信頼性設計, さらに効率のよい設計のためには, 複雑な設計変数の重要度評価等が, いずれも重要な課題になってくるが, これらについての詳細は機会を見て別稿にて論じることとした.^{50)~57)}

最後に主観的な確率概念の導入という点についてもう少し触れておきたい. およそ, ある機械・構造物の

設計を考える場合, 設計時点ですべての条件が完全に明らかであるということはまずありえないであろう. したがって信頼性設計といわば不完全な情報と乏しい経験を基にして最大の合理性を追求して行かざるをえない宿命にあると言えよう. 情報が不完全であるからといってなおざりな設計を行うことは技術者にとって許されることではない. むしろ不完全であればあるほど, たとえ相対的にせよ説明力のある合理性の追求が望まれ, この点に主観的確率(個人確率)の導入の基盤があり, かつまた確率論におけるベイズの定理が有用となる一因でもある.^{58)~60)} 技術者は自己の信念の下に主観的なある判断を下す. その後の情報の追加を見る度に, 自己の主観的な判断を修正し, より客観的な真実への接近を図るべく努力を続けて行く必要がある.

参 考 文 献

- 1) Freudenthal, A. M., U. S. Air Force Materials Lab., AFML-TR-74-198, WPAFB (1975).
- 2) Heer, E., and J. N. Yang, AIAA Journal, **9**, 621 (1971).
- 3) Impellizzeri, L. F., et al., AFML-TR-73-150, WPAFB (1973).
- 4) Shinozuka, M., AFFDL-TR-76-36, Vol. 1, WPAFB (1976).
- 5) Shinozuka, M., and J. N. Yang, Annals of Assurance Science, Proc. of the 8th Reliability and Maintainability Conf., **8**, 375 (1969).
- 6) Cornell, C. A., Journal of the Structural Division, ASCE, **93**, ST1, 171 (1968).
- 7) Cornell, C. A., Journal of the American Concrete Institute, **66**, 974 (1969).
- 8) Ellingwood, B. R., Building Science Series No. 110, National Bureau of Standards, Washington D. C., p. 95 (1978).
- 9) Ellingwood, B., T. V. Galambos, J. G. MacGregor, and C. A. Cornell, National Bureau of Standards Special Publication, No. 577, (1980).
- 10) Ang, A., and C. A. Cornell, Journal of the Structural Division, ASCE, **100**, ST9, 1755 (1975).
- 11) Freudenthal, A. M., J. Garrelts, and M. Shinozuka, Journal of the Structural Division, ASCE, **92**, ST1, 267 (1966).
- 12) Freudenthal, A. M., and M. Shinozuka, WADD Technical Report **61**-677, p. 15 (1961).
- 13) Fiessler, B., H. J. Neumann, and R. Rackwitz, EMD Journal, ASCE, **105**, EM4, 661 (1979).
- 14) Rackwitz, R., Comité Européen du Béton, Bulletin D'Information, No. 112, Munich, (1976) West Germany.
- 15) Shinozuka, M., Journal of Engineering Mechanics

- Division, ASCE, **90**, EM5, 147 (1964).
- 16) Shinozuka, M., Columbia University Technical Report, Prepared for Brookhaven National Laboratory under Grant No. BNL-517722-S, p.1 (1980).
 - 17) Stevenson, J. D., Nuclear Engineering and Design, **60**, 197 (1980).
 - 18) Wen, Y. K., Journal of Nuclear Engineering and Design, **60**, 61 (1980).
 - 19) Ed. by Freudenthal, A. M., *et al.*, "Reliability Approach in Structural Engineering", (1975) Maruzen Press
 - 20) Shinozuka, M., 航空技術, No. 264, p. 3 (1977).
 - 21) 小西一郎, M. Shinozuka, 日本鋼構造協会誌, **11**-110, 9 (1975).
 - 22) 小西一郎, M. Shinozuka, 日本鋼構造協会誌, **11**-111, 9 (1975).
 - 23) 小西一郎, M. Shinozuka, 「鋼橋—基礎編Ⅱ」 p. 805 (1977) 丸善
 - 24) 土木学会編, 「構造物の安全性・信頼性」(1976).
 - 25) Shinozuka, M., *et al.*, "Probability Based Load Criteria for the Design of Nuclear Structures: A Critical Review of the State-of-the-Art", BNL-NUREG-51356 (1981).
 - 26) Ed. by Shinozuka, M., Journal of the Structural Division, ASCE, ST4, p. 845 (1972).
 - 27) 伊藤 学, 土木学会誌, **60**-10, 35 (1975).
 - 28) Hasofer, A. M., and N. C. Lind, Proc. ASCE, EM1, p. 111 (1974).
 - 29) Lind, N. C., Proc. ASCE, EM2, p. 273 (1977).
 - 30) Ang, A. H-S., Annals of Reliability and Maintainability, **9**, 256 (1970).
 - 31) Ang, A. H-S., and N. Amin, Proc. ASCE, **95**, ST7, 1968 (1969).
 - 32) 高木 昇, 日本機械学会誌, **74**, 1326 (1971); なお, 信頼性用語 JIS Z8115-1970 を参照のこと.
 - 33) Freudenthal, A. M., Trans. ASCE, **112**, 125 (1947).
 - 34) ASCE, Proc of Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, Tucson, AZ, USA (1979).
 - 35) Proc. of ICOSSAR '81 (The Third International Conference on Structural Safety and Reliability), Trondheim, Norway (1981).
 - 36) 例えば, 小西一郎, M. Shinozuka, 「鋼橋—基礎編Ⅱ」, p. 805 (1977) 丸善
 - 37) 例えば, 石川 浩, 木村 等, 香川大学経済論叢, **53**, 824 (1981).
 - 38) 例えば, Galambos, T., and M. Ravindra, Journal of the Structural Division, ASCE, **104**, ST9, 1335 (1978).
 - 39) Galambos, T. V., M. Ravindra, Journal of the Structural Division, ASCE, **104**, ST9, 1459 (1978).
 - 40) Ravindra, M., and T. V. Galambos, Journal of the Structural Division, ASCE, **106**, ST9, 1427 (1979).
 - 41) 例えば, 木村 等, 石川 浩, 「確率・統計学入門」, p. 92 (1980) 新日本印刷
 - 42) 石川 浩, 信頼性設計の基礎と応用に関する講習会教材, p. 1 (1981) 日本材料学会中国四国支部
 - 43) 例えば, 文献 25) の p. 4-4 参照.
 - 44) Ang, A. H-S., and B. R. Ellingwood, Proc of the Conf. on Applications of Statistics and Probability to Soil and Structural Engineering, (1971) Hong Kong
 - 45) Kreyszig, E., Advanced Engineering Mathematics, p. 646 (1967) John Wiley & Sons
 - 46) Ang, A. H-S., "Seminar Note on Analysis of Engineering Uncertainties", (1976).
 - 47) 白石成人, 信頼性工学の基礎と構造工学の応用に関する講習会教材, p. 1 (1979) 日本材料学会関西支部
 - 48) 例えば, 文献 9) の p. 19 参照.
 - 49) Rackwitz, R., and B. Fiessler, "Note on Discrete Safety Checking When Using Non-Normal Stochastic Models for Basic Variables", Loads Project Working Session, MIT, (1976) Cambridge
 - 50) Davidson, J. R., Fatigue of Composite Materials, ASTM STP-569, p. 323 (1975).
 - 51) Varanasi, S. R., and I. C. Whittaker, ASTM STP-595, 292 (1976).
 - 52) Yang, J. N., and W. J. Trapp, Journal of Aircraft, AIAA, **14**, 430 (1976).
 - 53) Yang, J. N., and W. J. Trapp, AIAA Journal, **12**, 1623 (1974).
 - 54) Yang, J. N., AIAA Journal, **14**, 1225 (1976).
 - 55) 中川隆夫, 日本機械学会中四国支部特別講演会講演集, p. 32 (1980).
 - 56) 石川 浩, 「実働荷重に対する機械・構造物疲労寿命の信頼性解析 (Ⅰ)~(Ⅷ)」, 材料, **24**, No. 259~266 (講座), (1975).
 - 57) 石川 浩, 谷本敏夫, 木村 等, M. Shinozuka, 材料, **30**, 39 (1981).
 - 58) 中川隆夫, 信頼性工学の基礎と構造工学の応用に関する講習会教材, p. 14 (1979) 日本材料学会関西支部
 - 59) 板垣 浩, 日本機械学会誌, **78**, 496 (1975).
 - 60) 木村 等, 石川 浩, 香川大学経済論叢, **53**, 1 (1980).