和紙のき裂伝ば*

黒部利次** 今中 治*** 佐藤 彰****

Crack Propagation in Japanese Paper

by

Toshiji KUROBE, Osamu IMANAKA and Akira SATO

(Department of Engineering, Kanazawa University, Kanazawa)

The strength of Japanese paper is known to be strongly dependent upon the structure of its constituent fibers. The present study has been conducted to evaluate theoretically the fracture strength of Japanese paper. The paper was postulated to be made with the three dimensional net structure of fibers. The fracture strength of the paper was discussed on the basis of investigations related to the crack propagation mode of paper. The crack growth rate of paper was measured experimentally. Its rupture speed was calculated from the cut rate of strips coated on the paper with an electro-conductive paint.

The theoretical analyses showed that crack growth rate was dependent upon the cut direction of specimen sheet, the fiber geometry and its elastic modulus. This theoretical predictions were found to be consistent fairly with the experimental results.

(Received July 10, 1981)

キー・ワード：和紙，箔打紙，力学的異方性，き裂伝ば

1 緒 言

和紙は古来，伝統的に流し漉きによる手漉きによって製造されるため，繊維の配向が一樣でなく，力学的異方性を有している。すなわち，和紙の強度は方向によってその値が異なる。箔打紙としての和紙は，その力学的性質が箔の展延に直接影響を及ぼす（生産性に係わる）ため，古くから種々の秘技をこらして打紙作りがなされてきた。しかしながら，近年生産性の向上を目指したより高品位の打紙が強く望まれるようになり，合理的なある紙力設計を行うことが必要になってきた。一般に紙の強度は外力の作用状態によって分類すると，破裂強度，引張強度，引き裂き強度，耐折強度の4種類が考えられるが¹⁾，衝撃荷重などの動的変動荷荷を受ける場合には，衝撃強度やき裂伝ば挙動が実際重要な問題となる。本研究は，和紙としての箔打紙の動力学的挙動を把握するために，き裂伝ば試験を行い，伝ば速度が試験片の切り出し角によってどのように変わるかを調べた。さらに，打紙を構成する繊維の集合

状態をモデル化して，き裂伝ば速度を理論的に解析した。その結果，二，三の興味ある現象が観察されたので報告する。

2 和紙のき裂伝ばの理論解析

紙の強度は繊維の物理・化学的作用によって決まるが，一般に次の3要素から構成されている。(1)繊維自体の強度，(2)繊維相互間の接着強度²⁾，(3)繊維相互の絡み合いによる摩擦強度である。前報で述べたように，和紙としての箔打紙 場合には，上の3要素のうち(2)の接着強度が大きく影響すると思われるので，ここでは特に(2)を考慮して和紙の破壊強度の解析を行った。したがって，紙の破壊強度の計算においては，繊維自身の切断効果および繊維相互の絡み合いによる摩擦効果も無視し得るものと仮定する。³⁾

2・1 和紙のき裂伝ば速度

Fig. 1 にき裂が伝ばしている様子を示す。和紙の形状は短冊形であり，その寸法は長さ L ，幅 B ，厚さ d である。いま，座標軸 X' ， Y' ， Z を図のように定める。ここで，き裂の伝ばに伴うエネルギーの収支関係を

* 原稿受理 昭和56年7月10日

** 正 会 員 金沢大学工学部 金沢市小立野

*** 金沢大学工学部 金沢市小立野

**** 金沢大学大学院生 金沢市小立野

*1 紙の異方性とは，例えば紙の Machine Direction の弾性率と Cross Direction の弾性率が異なる現象をいう。本論文では，Machine Direction に相当する方向を MD 方向，Cross Direction を CD 方向とそれぞれ記すことにする。

*2 一般に，箔打紙のような比較的小さい和紙では，繊維自体の強度>繊維相互の接着強度>繊維相互の摩擦強度，の大小関係が成り立っている。¹⁾*3 座標系は前報と同じである。したがって， X' 軸は CD 方向と γ の角をなす方向である。²⁾

Fig. 1. Schematic view of crack propagation.

考える。き裂の伝ばは次に記す順序を経て起ると考える。

(i)シートに力Fを加える。すると、それに伴ってシートにはひずみエネルギーが蓄えられる。

(ii)外力が増加して、 $F=F_0$ になると、繊維間の接着強度が臨界値に達し、繊維結合が破れき裂が伝ばし始める。ここで、き裂が伝ばし始める直前までに蓄えられたひずみエネルギーを U_E とする。また、このときのシートの伸びきはき裂が伝ばし終るまで一定に保たれるものと仮定する。すなわち、き裂が伝ばし始めてから破断し終るまで、シート両端間の距離は一定であるとする。

き裂の伝ばに伴ってひずみエネルギー U_E が解放される。き裂が伝ばするにしたがって、き裂先端近傍の体積要素はき裂面に対して垂直方向に運動する。このとき、体積要素は運動エネルギーを得ることになる。き裂が伝ばし始めてから破断し終るまでに全体積要素が得る運動エネルギーを U_K とする。

以上の仮定を考慮すると、次式が成立つ。

$$\begin{aligned} U_K(r) &= U_E(r) - U_S(r) \\ &= U_E(r) \left(1 - \frac{U_S(r)}{U_E(r)} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 U_S はき裂伝ば面の表面エネルギー（破壊に関与した繊維接着部分表面のエネルギー）を表す。また、 $U_S(0)/U_E(0)$ の比を K とする。

き裂が伝ばし始めてから時間 t が経過し、き裂長さが c になったときのき裂の状態を Fig. 2 に示すように単純化して考える。き裂は $v_1 = dc/dt$ の速度で進行しており、 dt 時間後（き裂が dc 進んだ後）には、ひずみエネルギーの解放により図に示す斜線部の体積要素は v_2 の速度で X' 方向に運動する。これはき裂面近

Fig. 2. Crack geometry.

傍の体積要素についてであって、斜線部の体積要素の重心は $v_2/2$ の速度で運動する。したがって、斜線部の体積要素が得る運動エネルギー dU_K は、次式のようにになる。

$$dU_K = \frac{1}{2} \rho Ldc d\left(\frac{v_2}{2}\right)^2 \quad (2)$$

ここで、 ρ は紙の密度である。

v_2 はき裂伝ば速度 v_1 が増すにつれて次第に大きくなるから、 v_2 の増加関数 $v_2 = D(v_1)$ になっていると考えられる。いま、それを v_1 の一次関数 $v_2 = Dv_1$ であるとする。 D は繊維の幾何学的形状、繊維の集合状態、繊維の物性、繊維相互間の接着強度によって定まる値である。したがって、(2)式は次のように書き表される。

$$dU_K = \frac{1}{8} \rho Ldc dD^2 v_1^2 \quad (3)$$

v_1 をき裂が伝ばし始めてから破断し終るまで一定であると仮定すると、(3)式から運動エネルギー U_K は次のようになる。

$$\begin{aligned} U_K &= \int_V dU_K \\ &= \frac{1}{8} \rho V D^2 v_1^2 \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 V はシートの体積である。(1)、(4)式から、 v_1 は次式のようにになる。

$$v_1 = \sqrt{\frac{8}{\rho D^2 V} (U_E - U_S)} \quad (5)$$

ここで、 $K=0$ 、すなわち $U_S=0$ と仮定すると、

$$v_1 = \sqrt{\frac{8}{\rho D^2 V} U_E} \quad (6)$$

U_E は前報²⁾の解析結果から、

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{4 f_0^2 V}{l_0 \sqrt{ab} (\pi \cos \gamma + 2 \sin \gamma - 4 \gamma \cos \gamma) (2 \cos \gamma + \pi \sin \gamma)} \\ &\quad \times \frac{1}{6 \pi ab} \left\{ \left(3 + \frac{l_0^2}{b^2} \right) + \left(1 - \frac{l_0^2}{3b^2} \right) (2 \sin 2\gamma - \cos 2\gamma) \right\} \frac{1}{E} \end{aligned}$$

と求められている。ただし、 f_0 は繊維間の接着強さが破壊するときの臨界荷重、 l_0 はセグメントの長さ、

Fig. 3. Relation between crack growth rate and l_0 .

Fig. 4. Relation between crack growth rate and b .

a は繊維断面の長軸半径, b は短軸半径, E は繊維の弾性率である.

(6)式において簡単化のため, D の値を定数と仮定すると, 切り出し角 γ と和紙のき裂伝ば速度との関係は Fig. 3, 4 のようになる. $b=2\mu\text{m}$ 一定の場合, $v_1/v_{l=0}$ の値は, シートの切り出し角 γ の値が 0 より増えるにつれて次第に減少することがわかる. そして 50~60度のあたりで極小となり, 以後, 再び増加する傾向がみられた. Fig. 4 から, $l_0=50\mu\text{m}$ 一定の場合, b の値によって曲線の形状が変化することがわかる.

2・2 Dの値の理論的検討

2・1節では前報の仮定にしたがってき裂伝ば速度を計算した. ここでは, D の値を理論的に検討するために, 繊維の集合状態を次のように仮定し, より詳しくき裂伝ば速度の計算を行う. 前報と同様に, セグメントの座標の分布関数を, $\theta(\theta)=\delta\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\Gamma(\varphi)=\sin\varphi$ と仮定する. そして, 単位立方体シートを考え, X' , Y' , Z' の3方向にそれぞれ N_x' , N_y' , N_z 個のセグメントが存在するものとする. このとき, 単位立方体シートは面積が1(単位面積)の単層シートが $1/2b$ 層積み重なった状態となっている. ここで, そのうちの1層を取り出し, それを Fig. 5 のようにモデル化する. 繊維は水素結合で化学的に接着されているので, 繊維の集合状態はラメン構造になっていると考えてよい. いま, き裂がシート中を伝ばしている状態を考える.

Fig. 5. Schematic view of monolayer sheet containing crack.

Fig. 6. Schematic view of crack tip.

Fig. 5 に示すように, 1, 2の網目がはずれている状態がき裂であると仮定する. そして, き裂が伝ばするにしたがって 3, 4, ... と順次網目がはずれていくものとする. D の値を求めるためには, Fig. 5 のモデルについての変形状態を計算しなければならない. いま, 簡単化のために, き裂先端近傍の状態は Fig. 6 のようになっているものとする. き裂が Δt の時間の間に n_1 から n_2 まで(距離 $2l_0 \sin \alpha$) 進み, n_1 の部分が 2ε 変形したとすると(き裂によってラメン結合がはずれると, その部分はトラス結合に変わる), D の値は次のようになる.

$$D = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\varepsilon/\Delta t}{2l_0 \sin \alpha/\Delta t} = \frac{\varepsilon}{2l_0 \sin \alpha} \quad (7)$$

Fig. 6 のモデルは線形系を仮定しているので, ε の値は, $2f_1$ のみの力を加えた場合に生ずる変位 ε_1 と $2f_2$ のみの力を加えた場合に生ずる変位 ε_2 との和になる.

(i) ε_1 の計算

ε_1 の値を Fig. 7 に示す繊維構造図を用いて計算した. セグメントに働く力 f_1 をセグメントに平行な成分 f_{11} とそれに垂直な成分 f_{12} とに分解する. ε_1 の値は, 力 f_{11} による変位 ε_{11} と力 f_{12} およびモーメント M による変位 ε_{12} との和として求められる. ε_{11} , ε_{12} の値をそれぞれ計算するとその値は次式のようになる.

$$\varepsilon_{11} = \frac{f_1 l_0 \cos \alpha}{\pi a b E}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{f_1 l_0^3 \sin \alpha}{3 \pi a b^3 E}$$

したがって, ε_1 は,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} \cos \alpha + \varepsilon_{12} \sin \alpha = \frac{f_1 l_0 \cos^2 \alpha}{\pi a b E} + \frac{f_1 l_0^3 \sin^2 \alpha}{3 \pi a b^3 E} \quad (8)$$

となる.

Fig. 7. Applied force on segments.

Fig. 8. Applied force on sheet.

(ii) ε_2 の計算

ε_2 の値を計算するために, Fig. 6 に示すモデルをさらに近似して, Fig. 8 に示すモデルを考える. Fig. 8 における A_2 点の変位が ε_2 である. この値は, 点 A_1 の変位 ε_{21} とセグメント A_1A_2 の回転による変位 ε_{22} との和で表される. ε_{21} の値は ε_1 の値を求めた方向と同様にして求められる. いま, 力 $2f_2$ をセグメントに平行な成分とそれに垂直な成分に分解し, それぞれに対する変位を求める. 計算の結果, ε_{21} は次のようになる.

$$\varepsilon_{21} = \frac{2f_2 l_0 \cos^2 \alpha}{\pi a b E} + \frac{20 f_2 l_0^3 \sin^2 \alpha}{3 \pi a b^3 E}$$

つぎに, ε_{22} を求めるために, まず A_1 点の角変位 β を計算する. 計算の結果,

$$\beta = \frac{12 f_2 l_0^2 \sin \alpha}{\pi a b^3 E}$$

となる. したがって, ε_{22} は次のようになる.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= l_0 \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) \right] \\ &\doteq l_0 \beta \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{12 f_2 l_0^3}{\pi a b^3 E} \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

したがって, ε_2 は,

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} = \frac{2f_2 l_0 \cos^2 \alpha}{\pi a b E} + \frac{20 f_2 l_0^3 \sin^2 \alpha}{3 \pi a b^3 E} \\ &\quad + \frac{12 f_2 l_0^3}{\pi a b^3 E} \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (9)$$

いま, $f_1 = f_2 = f$ とすると, (8), (9)式から, ε は次のようになる.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{3f l_0 \cos^2 \alpha}{\pi a b E} + \frac{7f l_0^3 \sin^2 \alpha}{\pi a b^3 E} \\ &\quad + \frac{12f l_0^3}{\pi a b^3 E} \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (10)$$

したがって, (7), (10)式から, D の値は次のようになる.

$$D = \frac{3f \cos^2 \alpha}{2 \pi a b E \sin \alpha} + \frac{7f l_0^2 \sin \alpha}{2 \pi a b^3 E} + \frac{6f l_0^2}{\pi a b^3 E} \sin \alpha \quad (11)$$

ただし,

$$\cos \alpha = \frac{1}{N_{x'} \sqrt{\left(\frac{1}{N_{x'}}\right)^2 + \left(\frac{1}{N_{y'}}\right)^2}},$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{N_{y'} \sqrt{\left(\frac{1}{N_{x'}}\right)^2 + \left(\frac{1}{N_{y'}}\right)^2}}$$

また, 前報の解析結果から,

$$N_{x'} = \frac{1}{l_0 \left(\frac{1}{2} \cos \gamma + \frac{\pi}{4} \sin \gamma \right)},$$

$$N_{y'} = \frac{4}{l_0 (\pi \cos \gamma + 2 \sin \gamma - 4 \gamma \cos \gamma)}$$

ここで, f と f_0 の関係について, 前報のモデルとこの節で展開した Fig. 5, 6 のモデルの違いについて考えてみる. 前報では, セグメントに働く力がそのまま繊維間の接着部分にも働き, それが臨界荷重に達すると結合が切れると考えた. しかし, Fig. 6 のモデルでは繊維間の接着部分には力 $4f$ の他にモーメント $4l_0 f \sin \alpha$ が働くことになるから, 結合を切るのに必要な力 f は切り出し角 γ によって変化することになる. いま, それを $f = f_0(\gamma)$ とすると, Fig. 5, 6 に示すモデルから得られる結果に, 前報の解析結果を代入する場合には f_0 を $f_0(\gamma)$ と置き換えればよいことになる. [ただし, ここでは, 応力の集中などは考えず, $f = F/(N_{y'} \cdot N_z \cdot B \cdot d)$ と考えている.]

つぎに表面エネルギー U_s を Fig. 5 に示すモデルから計算する. 具体的には図に示す 1, 2 などの結合が切れるのに必要な表面エネルギーを計算することになるが, いま, 結合 1 個あたりの表面エネルギーを u_s とすると, 紙の表面エネルギー U_s は次のようになる.

$$U_s = \frac{N_{y'}}{2} N_z B d u_s = \frac{B d}{b l_0 (\pi \cos \gamma + 2 \sin \gamma - 4 \gamma \cos \gamma)} u_s \quad (12)$$

Fig. 9 に切り出した角 γ と表面エネルギーとの関係を示す. 図から, $U_s/U_{s\gamma=0}$ の値は上に凸の曲線になることがわかる.

Fig. 9. Relation between surface energy and γ .

つぎに, (5)式に(11), (12)式を代入し, 切り出し角 γ と引き裂伝ば速度との関係を求めてみた. 得られた結果を Fig. 10~12 にそれぞれ示す. 繊維の幾何学的形状を一定とした場合の Fig. 10 の結果を見ると, K の値によって曲線の形が大きく変化することがわかる. $K = 0.1$ の場合, 60度付近に最小値をもつ曲線となっており, K の値が小さくなるにつれて, 曲線は下に凸の形から上に凸の形へ変化している. 一方, K の値を 0.1 一定とし, かつ, 繊維の断面形状を一定として, セグ

Fig. 10. Relation between crack growth rate and K .

Fig. 11. Relation between crack growth rate and l_0 .

Fig. 12. Relation between crack growth rate and cross section of fiber.

メント長さを変化させた場合の Fig. 11 の結果をみると、セグメント長さが変化しても、曲線の形状はほとんど変化しないことがわかる。さらに、 K を 0.1、セグメント長さを $50\mu\text{m}$ 一定とし、断面形状を変化させた場合の Fig. 12 の結果をみると、曲線の形状が著しく異なることがわかる。

3 実験方法および結果

き裂伝ば試験は前報と同じシャルピ型衝撃試験機を用いて行った。試片形状は Fig. 13 に示すとおりであ

Fig. 13. Specimen geometry.

Fig. 14. Relation between crack growth rate and γ .

Fig. 15. Relation between crack growth rate and *aku-shori*.

る。試片中央の片側に鋭利なカミソリで 10 mm のノッチを入れ、導電性塗料（藤倉化成、ドータイト S-1）を烏口を用いて図の点線の位置に 2 本塗布する。 $\phi 0.3\text{ mm}$ の銅線を塗料の両端から出し、カウンタに接続して、①の線の切断から②の線の切断までの時間を測定する。この値から、試片のき裂伝ば速度を求める。

箔打紙^{*4}（大重）の未使用紙を用いて、切り出し角 γ とき裂伝ば速度の関係を求めたのが Fig. 14 である。図を見ると、 60 度付近に極小値をもつ下に凸の曲線となっている。これは、 D を定数とした場合の理論値および $K=0.1$ 、 $a=10\mu\text{m}$ 、 $b=2\mu\text{m}$ とした場合の理論値と傾向が定性的に合っているのがわかる。他の打紙についての実験においても同様の現象が観察された。紙力強度の増大を目途とした灰汁処理によって、箔打

*4 金箔の打ち立ては大別して、延べ金製造工程、上澄製造工程、箔打工程の 3 工程を経て行われるが、各工程はそれぞれ幾段もの工程から成っており、大重は澄工程中の箔打ち段階を表す。

紙のき裂伝ば速度がどのように変化するかを Fig. 15 に示す. 図の横軸 A~F の記号は, A—原紙, B—のべ紙, C—初灰汁, D—5 灰汁, E—11 灰汁, F—18 灰汁を示す. 図から, 灰汁処理回数が進むにつれて, き裂伝ば速度が増大することがわかる.

4 結 論

和紙のき裂伝ばに関する研究として, 箔打紙のき裂伝ば速度について主に理論面から検討を行った. 得られた結果は次のとおりである.

(1) 和紙を繊維の 3 次元網目構造と仮定し, 力学的異方性を考慮して, 和紙のき裂伝ば速度を理論的に求めた.

(2) き裂伝ば速度の理論式から, D を定数, $b=2\mu\text{m}$ 一定とした場合, 切り出し角 r とき裂伝ば速度との関係は, $50\sim 60$ 度のあたりで極小値をもつ下に凸の曲線となる. また, $l_0=20\mu\text{m}$ 一定とした場合, b の値によって曲線の形状が変化する.

(3) D を切り出し角 r の関数としたとき, K の値に

よって切り出し角とき裂伝ば速度の関係を示す曲線は大きく変化する. $a=10\mu\text{m}$, $b=2\mu\text{m}$, $K=0.1$ の場合, 60 度付近に最小値をもつ曲線となり, K の値が小さくなるにつれて, 曲線は下に凸の形から上に凸の形へ変化する.

(4) 大重の未使用紙を用いてき裂伝ば試験を行った結果, 切り出し角 r とき裂伝ば速度の関係は, 60 度付近に極小値をもつ下に凸の曲線となった. これは, D を定数とした場合の理論値および $a=10\mu\text{m}$, $b=2\mu\text{m}$, $K=0.1$ とした場合の理論値と傾向が定性的に合っている.

(昭和 56 年 5 月 18 日 日本材料学会第 30 期学術講演会にて講演)

参 考 文 献

- 1) 上野柱助, “紙の強度”, p. 197 (1972) 丸善
- 2) 黒部利次, 今中 治, 佐藤 彰, 材料, **30**, 200 (1981).
- 3) 小野木重治, 笹栗駿一郎, 紙々技協誌, **11**, 233 (1975).

書 評

“防 食 工 学”

木 島 茂 (著)

(1982 年, 日刊工業新聞社発刊, A 5 判, 318 ページ, 3 800 円)

著者はわが国の防食工学の草分けの一人で, 長い間住友化学工業(株)新居浜製造所において木島研究室の名で世に知られる研究室を主宰され, 文字どおり腐食, 防食技術の第一線で活躍されるとともに, わが国の腐食, 防食技術の基礎を築いた方である. 防食工学, 防食設計, 防食管理など, 我々が平常使い慣れている言葉も著者によってはじめて唱えられたように思う. 今回著者の畢生(ひっせい)の名書ともいべき本書が出版されたことは同慶に堪えないところである.

本書は湿食(水溶液腐食)を中心にその腐食機構, 実際の防食技術との関連を体系的にまとめたものがその主体となっているが, 著者の特に研究解明に努力された応力腐食割れや水素ぜい化, さらに, 最近の破壊力学との関係など機械的因子の影響についても本書独自のまとめがなされている. もちろん著者の提唱され, また本書の書名となっている防食工学については防食技術を工学的体系にまとめられた点で高く評価できるものとする. 最近わが国においても漸く腐食関係の本が多く出版されるようになった中において, 本書のもつ特長を強調して, とくに江湖の皆様方にお薦めする次第である.

(同志社大学工学部 奥田 聡)