き裂の発生と伝ばを分離した疲労寿命の信頼性工学的研究*

市 川 昌 弘** 田 倉 隆 行*** 田 中 栄**

Statistical Investigation of Fatigue Life by Separating Crack Initiation and Propagation Lives

by

Masahiro ICHIKAWA, Takayuki TAKURA and Sakae TANAKA

(Department of Mechanical Engineering, University of Electro-Communications, Chofu)

A statistical nature of fatigue life (total life) N_f was studied by decomposing N_f into the crack initiation life N_i and crack propagation life N_p . By assuming that both N_i and N_p follow log-normal distributions and that the coefficient of variation is larger for N_i than for N_p , the distribution of N_f was derived theoretically by using Monte Carlo simulation. Mutual independence of N_i and N_p was also assumed. It was shown that N_f followed a composite log-normal distribution approximately. In the regions left of and right of the transition point, this composite distribution was similar to that of N_p and to that of N_i , respectively (the "transition point" denotes the point at which plot of N_f breaks into two segments on log-normal probability paper). The transition point moved downwards with an increase in the average ratio of N_i to N_p . When this ratio was significantly small or large, N_f followed actually a simple log-normal distribution similar to the distribution of N_p or to that of N_i , respectively. By combining the above results with the well-known experimental fact that the ratio of the crack initiation life to the crack propagation life increases with a decrease in stress level, a new interpretation was presented to the stress level dependence of the fatigue life distribution. This interpretation is different from the conventional one which is based on the mixed distribution. The present theory was examined experimentally. The data on an aluminum alloy and a low carbon steel showed that both N_i and N_p followed log-normal distributions approximately and that the coefficient of variation was larger for N_i than for N_p . Furthermore, the distribution of N_f as derived by Monte Carlo simulation was in good agreement with the measured distribution of N_f . (Received Dec. 4, 1981)

キー・ワード：疲労寿命，信頼性，き裂発生寿命分布，き裂伝ば寿命分布

1 緒 言

さきに著者らは高強度鋼の遅れ破壊において，破断寿命（最終破壊までの寿命）の分布の全領域および左裾野の特性を理解し予測するうえで，き裂の発生寿命と伝ば寿命を分離するというアプローチが有効であることを示した^{1)~3)}．本論文はこのアプローチを疲労に適用したものである．

さて，疲労寿命の統計的性質については相当数の実験データが発表されており，寿命分布には一般に次の(1)，(2)，(3)のような応力依存性があることが知られている．すなわち，(1) $S-N$ 曲線の直線傾斜部の応力レベルではワイブル分布または対数正規分布にはほぼ従う．(2) $S-N$ 曲線の折曲り点付近の応力レベルではワイブ

ル確率紙ないし対数正規確率紙上で直線からはずれ，上に凸の曲線となる．(3) さらに低応力レベルではこれらの確率紙上で再び直線に漸近するが，その傾斜は高応力レベルの分布の傾斜より小さい．この(3)の傾向はたとえば Bastenaire⁴⁾ や 下河ら⁵⁾の実験データにみられ

Fig. 1. Schematic illustration of the stress level dependence of the fatigue life distribution on Weibull or log-normal probability paper.

* 原稿受理 昭和56年12月4日

** 正 会 員 電気通信大学 調布市調布ヶ丘

*** 電気通信大学 調布市調布ヶ丘

る. Fig. 1 は以上(1)~(3)の傾向を模式的に示したものである. こうした傾向を示す理由について, 混合母集団モデルによる混合分布としての解釈が従来なされているようである. すなわち, 高応力レベルと低応力レベルでは疲労のメカニズムが異なるので寿命分布も異なり, 中間の応力レベルでは両者が混在する(すなわち試験片集団の一部は高応力レベルでのメカニズムで破壊し, 残りは低応力レベルでのメカニズムで破壊する)ので混合分布になるという解釈である. これに対し最近著者らは, ワイブル確率紙上で上記のような応力依存性に関し, これがき裂の発生寿命の分布と伝ば寿命の分布のたたみこみ(convolution)によって生ずる分布として, すなわち重畳ワイブル分布としても解釈できることを示した(たたみこみによって得られる分布を重畳分布とよぶことにする). 本報は対数正規確率紙上で前述のような応力依存性に関し, 同様の観点から重畳対数正規分布として理論的に考察し, また実験的検討を加えたものである.

2 理 論

2・1 重畳分布による解釈の背景

さきに著者らは¹⁾ Ni-Cr-Mo 鋼 SNCM 439 (旧記号 SNCM 8) 切欠き材の 3.5% 食塩水中での統計的遅れ破壊試験を行い, 破断寿命 t_f (最終破壊までの時間) が複合ワイブル分布にほぼ従うという結果を得た (Fig. 2). さらに t_f をき裂の発生寿命 t_i (き裂発生までの時間) と伝ば寿命 t_p (き裂発生から最終破壊までの時間) に分離して各々の分布を調べたところ, t_i と t_p は形状母数の異なる (すなわち変動係数の異なる) 2 母数ワイブル分布にほぼ従い, t_f の分布は屈曲点より短寿命側では, t_p の分布に類似し, 屈曲点より長寿命側では t_i の分布に類似していることがわかった (この場合き裂の発生点は試験片 (片持はり型試験片) のたわみ-時間曲線の立上り点として定義した). この結果

Fig. 2. Weibull plot of the crack initiation life t_i , crack propagation life t_p and total life t_f in stress corrosion cracking of a Ni-Cr-Mo steel (SNCM439) in 3.5% NaCl. The sample size is 37 including one truncated at 500 min before crack initiation. The data points of $t_i \leq 1$ min are not shown in the figure.

は t_f の折線状分布 (ワイブル確率紙上での) が t_i と t_p のたたみこみによって得られる重畳ワイブル分布として生じたことを示唆している. そこで t_i と t_p が形状母数の異なる 2 母数ワイブル分布に従う場合について, 分布の母数を系統的に変えて $t_f = t_i + t_p$ の分布をモンテカルロシミュレーションにより調べたところ (ただし t_i と t_p は互いに独立とした), 次の (1)~(3) のことがわかった. すなわち, (1) t_f は一般にワイブル確率紙上で折線状の分布となり (ただし折点は丸味をもつ), 折点の丸味を無視すれば, 複合ワイブル分布で近似できる. (2) t_i と t_p の中央値を $\tilde{t}_i$, $\tilde{t}_p$ とするとき, $\tilde{t}_i/\tilde{t}_p$ の増加に伴い屈曲点は下方に移動し, ついには t_i とほぼ同じ直線状分布に近づく. (3) $\tilde{t}_i/\tilde{t}_p$ の減少に伴い屈曲点は上方に移動し, ついには t_p とほぼ同じ直線状分布に近づく.

以上のモンテカルロシミュレーションの結果は疲労に対しても応用できる. すなわち, t_i , t_p , t_f を疲労き裂の発生寿命 N_i , 伝ば寿命 N_p , 破断寿命 N_f で置きかえればよい. 一方, 疲労では応力レベルが低くなるほど破断寿命に占める発生寿命の割合 (平均的意味での) が大きくなることが実験的に知られている. よって N_i と N_p がそれぞれ 2 母数ワイブル分布に従い, かつ N_i の方が N_p より形状母数が小さければ (すなわち N_i の方が N_p より変動係数が大きければ), N_f の分布は Fig. 1 に示したような応力依存性を示すことになる. これが⁶⁾ワイブル確率紙上での N_f の分布特性に対して著者らがさきに提案した新しい解釈である. 次節では同様の考え方により, 対数正規確率紙上での分布特性について考察する.

2・2 重畳対数正規分布による疲労寿命分布の解釈

疲労き裂の発生寿命 N_i と伝ば寿命 N_p が 2 母数対数正規分布に従うとき, 破断寿命 $N_f = N_i + N_p$ がいかなる分布に従うかを調べる. ただし, N_i と N_p は互いに独立とする. $\log_{10} N_i$ と $\log_{10} N_p$ の (平均値, 分散) をそれぞれ, (μ_i, σ_i^2) , (μ_p, σ_p^2) とする. N_i と N_p の確率密度関数をそれぞれ $f_i(N_i)$, $f_p(N_p)$ とすると

$$f_i(N_i) = \frac{k}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}N_i} \exp\left[-\frac{(\log_{10} N_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right] \quad (1)$$

$$f_p(N_p) = \frac{k}{\sqrt{2\pi\sigma_p^2}N_p} \exp\left[-\frac{(\log_{10} N_p - \mu_p)^2}{2\sigma_p^2}\right] \quad (2)$$

ここで $k = \log_{10} e = 0.4343$. $N_f = N_i + N_p$ の確率密度関数 $f_f(N_f)$ は次のたたみこみ積分によって表される.

$$f_f(N_f) = \int_0^{N_f} f_p(N_f - N_i) f_i(N_i) dN_i \quad (3)$$

しかし, いまの場合(3)式の積分は解析的に求められないので, 以下計算機によるモンテカルロシミュレーションにより N_f の分布を調べる. 対数正規確率紙上で

の N_i の分布直線と N_p の分布直線の相対的位置関係は、(1) σ_i と σ_p の相違、(2) μ_i と μ_p の相違、の両者により規定される。(1)は両直線の傾斜の相違を規定し、(2)は両直線の横軸（繰返し数）方向の平均的な距

Fig. 3. The effect of σ_i and σ_p on the distribution of total fatigue life N_f in the case when both the crack initiation life N_i and crack propagation life N_p follow log-normal distributions. (μ_i, σ_i) and (μ_p, σ_p) are (mean, standard deviation) of $\log N_i$ and $\log N_p$, respectively.

離を規定する。

まず、 N_f の分布に対する σ_i と σ_p の相違の影響を調べるため、 μ_i と μ_p は固定し σ_i と σ_p を変えて、Fig. 3 の (a)~(d) の四つのケースについて N_f の分布を求めた。この場合 $\sigma_i > \sigma_p$ とした。これは N_i の方が N_p より変動係数が大きいということに対応する。各ケースにつきそれぞれ 9999 個の N_f をモンテカルロ法により作り出し、ミーンランク法 $F=i/(n+1)$ によって対数正規確率紙にプロットした結果を Fig. 3 に示す。Fig. 3 より N_f の分布は対数正規確率紙上で一般に折線状（ただし折点は丸味をもつ）となることがわかる。ただし σ_i と σ_p の差が小さくなると屈曲は不明りようとなり、次第に単純対数正規分布の様相に近づく。Fig. 3 の N_f の分布は二つの対数正規分布のたたみこみによって得られたものであるから、これを重畳対数正規分布とよぶことができよう。従って重畳対数正規分布は対数正規確率紙上で一般に折線状（ただし折点は丸味をもつ）となることが Fig. 3 からわかる。また複合ワイブル分布の定義にならって、対数正規確率紙上で完全な折線（折点が丸味をもたない）となる分布を複合対数正規分布と定義することになると、重畳対数正規分布は折点の丸味を無視すれば一般に複合対数正規分布によって近似できることがわかる。

つぎに、 N_f の分布に対する μ_i と μ_p の相違の影響を調べるため、 σ_i と σ_p は固定し、 μ_i/μ_p を Fig. 4 に示した(a)~(e)の5とおりに変えて N_f の分布を調べた。この場合 μ_p は一定に保ち、 μ_i を変えた。(a)~(e)の各ケースにつきそれぞれ 9999 個の N_f をモンテカルロ法で作作り出し、ミーンランク法で対数正規確率紙にプロットした結果を Fig. 4 に示す。この図から次の(i)~(v)のことがわかる。すなわち、(i) N_f は一般に

Fig. 4. The effect of μ_i and μ_p on the distribution of the total fatigue life N_f in the case when both the crack initiation life N_i and crack propagation life N_p follow log-normal distributions. (μ_i, σ_i) and (μ_p, σ_p) are (mean, standard deviation) of $\log N_i$ and $\log N_p$, respectively. The distribution of N_f in the case (a) almost coincides with that of N_p . Hence, the line for N_p ((a)~(e)) is covered with the plots of N_f (a).

複合対数正規分布によって近似される, (ii) この複合対数正規分布は屈曲点より左側の短寿命域では N_b の分布に類似し, 屈曲点より右側の長寿命域では N_i の分布に類似している. (iii) μ_i/μ_b の増加に伴い屈曲点は下方に移動する. (iv) μ_i/μ_b がある程度小さくなると屈曲点は実験的にカバーされる破壊確率の範囲 ($1/(n+1) \leq F \leq n/(n+1)$, n はサンプルサイズ) の外に出てしまい, N_b とほぼ同じ直線としてあらわれる. (v) μ_i/μ_b がある程度大きい場合にも屈曲点は実験的にカバーされる F の範囲外に出てしまい, N_i とほぼ同じ直線分布としてあらわれる. 以上(i)~(v)の結果は形状母数の異なる二つのワイブル分布のたたみこみの場合の結果と類似している. なお, 前報で提唱した発生支配型分布と伝ば支配型分布の概念によれば, 上記(ii)より N_f の分布は短寿命域では伝ば支配型分布, 長寿命域では発生支配型分布であるといえることができる.

さて, 前述のように応力レベルが低くなるほど破断寿命中に占める発生寿命の比率 (平均的意味での) が大きくなる. この実験事実と Fig. 4 の結果より, N_f の分布は対数正規確率紙上で Fig. 1 のような応力依存性を示すことになり, 一般にみとめられている特性が説明される. すなわち, 二つの対数正規分布の混合分布としての混合対数正規分布によってだけでなく, N_i と N_b の分布のたたみこみによって得られる重畳対数正規分布によっても説明されることがわかる.

3 実験

前節の考察は疲労き裂の発生寿命 N_i と伝ば寿命 N_b がいずれも 2 母数対数正規分布に従い, かつ $\sigma_i > \sigma_b$ であることを前提としている (σ_i と σ_b はそれぞれ $\log_{10} N_i$ と $\log_{10} N_b$ の標準偏差). 以下ではこの前提を以下の二つの実験データについて検討する.

(1) 実験データ 1

このデータは著者らの実験によるものである. 供試材は 2024-T3 アルミニウム合金で, その化学成分と機械的性質を Table I, II に示す. 厚さ 1 mm の板材より Fig. 5 に示す形状・寸法の切欠き試験片を機械加工した. 疲労試験は偏心重すい回転型試験機によ

Table I. Chemical composition of 2024-T3 Al alloy used (wt. %).

Cu	Si	Fe	Mn	Mg	Cr	Zn	Zr+Ti	Ti
4.35	0.13	0.30	0.66	1.42	0.01	0.03	0.05	0.02

Table II. Mechanical properties of 2024-T3 Al alloy used.

Tensile strength (kgf/mm ²)	Yield stress (kgf/mm ²)	Elongation (%)
48.8	33.4	19.9

Fig. 5. The shape and dimension of the 2024-T3 Al alloy specimen.

り繰返し曲げ (面外曲げ) 試験を行った. 繰返し速度は 30 Hz で, 試験環境は室温大気中である. 公称応力振幅 $\sigma_a = 15 \text{ kgf/mm}^2$, 応力比 $R = -1$ の場合について, 30 個の試験片を用いて (すなわちサンプルサイズ $n = 30$ として) N_i , N_b , N_f の分布をしらべた (この応力レベルは平均破断寿命で約 1.1×10^5 サイクルに相当する). き裂の発生寿命 N_i は次のようにして測定した. 各試験片について, 5 000 サイクル毎に切欠き (円孔) 周辺のレプリカをとり, 試験終了時からさかのぼることによって最終破壊をひきおこしたき裂を見出す. このき裂が円孔の縁から 0.1 mm の長さに達したときをもってき裂発生点とした. 観察は最大応力の生ずる 4 箇所 (試験片の片面につき 2 箇所, 両面で 4 箇所) について行い, 各箇所について上記の意味のき裂発生点を求め, そのうちの最小値を N_i とした. き裂伝ば寿命 N_b は $N_b = N_f - N_i$ より求めた. N_i , N_b , N_f をミーンランク法により対数正規確率紙にプロットした結果を Fig. 6 に示す. 図より N_i と N_b は 2 母数対数正規分布にはほぼ従っており, かつ直線の傾斜の大小より $\sigma_i > \sigma_b$ であることがわかる. 実測値より直接計算した母数は $\mu_i = 4.27$, $\sigma_i = 0.170$, $\mu_b = 4.94$, $\sigma_b = 0.088$ である. これらの母数を用いて $N_f = N_i + N_b$ の分布をモンテカルロシミュレーションより求めてみると (ただし N_i と N_b は互いに独立として), Fig. 6 に示した点線のようになり, N_f の実験的分布によく

Fig. 6. Log-normal plot of the crack initiation life N_i , crack propagation life N_b and total life N_f in reversed bending fatigue of 2024-T3 Al alloy.

Fig. 7. Correlation between the crack initiation life N_i and crack propagation life N_p in the data shown in Fig. 6 (2024-T3 Al alloy).

一致している。この実験条件に対しては N_i の分布直線と N_p の分布直線が実験でカバーされた F の範囲内 ($1/31 \leq F \leq 30/31$) で交差しないため、 N_f の分布には折点があらわれず、ほぼ直線となっている。なお、 N_i と N_p の相関の程度をみるため、 (F_i, F_p) 平面上に 30 個のデータをプロットしてみると Fig. 7 のようになる。 (F_i, F_p) は N_i, N_p の分布関数。スピアマンの順位相関係数 r_s を求めてみると $r_s = 0.169$ であり、相関は小さい。

(2) 実験データ 2

第 2 の実験データとして、著者の一人（田中）が以前行った低炭素鋼の実験結果をとりあげた。この実験は繰返し数 N をパラメータとしてき裂長さの確率分布を調べたものであるが、ここでは N_i と N_p の分布に着目してデータを整理し直した。供試材（低炭素鋼）の化学成分（重量％）は C : 0.04, Si : 0.06, Mn : 0.28, P : 0.01, S : 0.01 で、機械的性質は、上降伏点 20.3 kgf/mm², 降伏点 19.6 kgf/mm², 引張強さ 30.5 kgf/mm², 伸び 43.5%, 絞り 63.9% である。試験片は長さ 110 mm, 幅 52 mm, 厚さ 1 mm で、だ円に近い切欠き（長軸 2 mm, 長軸端曲率半径 0.2 mm）を有する平板試験片であり、厚さ 1 mm の板材から加工された。負荷形式はこの場合も面外繰返し曲げで、公称応力振幅 $\sigma_a = 18.7$ kgf/mm², 応力比 $R = -1$ のもとでサンプルサイズ $n = 25$ の試験が行われた。この応力レベルは平均寿命で約 3.1×10^5 サイクルに対応する。繰返し速度は 30 Hz, 試験環境は室温大気中である。この場合の実験データは試験片の片面について、き裂の全長（切欠きの長さをふくむ）を繰返し数 N の関数として記録したものであるため、実験データ(1)における N_i の定義にほぼ対応するものとして、き裂成長量が全長で 0.2 mm となった点を N_i とした。 N_i, N_p, N_f をミーンランク法で対数正規確率紙にプロットした結果を Fig. 8 に示す。図よりこのデータの場合にも N_i と N_p はほぼ 2 母数対数正規分布に従い、かつ $\sigma_i > \sigma_p$ であることがわかる。実測値より直接計

Fig. 8. Log-normal plot of the crack initiation life N_i , crack propagation life N_p and total life N_f in reversed bending fatigue of a low carbon steel.

Fig. 9. Correlation between the crack initiation life N_i and crack propagation life N_p in the data shown in Fig. 8 (low carbon steel).

算した母数は、 $\mu_i = 4.35$, $\sigma_i = 0.089$, $\mu_p = 5.45$, $\sigma_p = 0.041$ である。これらの母数を用いて $N_f = N_i + N_p$ の分布をモンテカルロシミュレーションにより求めると Fig. 8 の点線のようになり、 N_f の実験的分布とよく一致している。この場合も実験データ(1)の場合と同じ理由により N_f の分布には折点はあらわれず、ほぼ直線となっている。 N_i と N_p の相関については Fig. 9 のようになり、スピアマンの相関係数は $r_s = 0.378$ で、相関はそれほど大きくない。

以上のように、著者らの利用できる二つの実験データについてき裂発生寿命 N_i と伝ば寿命 N_p の分布を調べたところ、 N_i と N_p はほぼ 2 母数対数正規分布に従い、かつ $\sigma_i > \sigma_p$ となっており、2 節の理論的考察の前提が成立している。また、実験で得られた $\mu_i, \sigma_i, \mu_p, \sigma_p$ を用いてモンテカルロシミュレーションにより計算した N_f の分布は、実験による N_f の分布とよく一致している。

4 結 論

(1) 疲労き裂の発生寿命 N_i と伝ば寿命 N_p がそれぞれ 2 母数対数正規分布に従うとき、破断寿命 $N_f (=$

$N_i + N_p$ がいかなる分布に従うかを計算機によるモンテカルロシミュレーションによって調べ, 次のことを明らかにした. ただし, $\log_{10} N_i$ と $\log_{10} N_p$ の(平均値, 分散)をそれぞれ (μ_i, σ_i^2) , (μ_p, σ_p^2) とし, $\sigma_i > \sigma_p$ の場合をしらべた. また N_i と N_p は互いに独立とした.

(i) N_f の分布は対数正規確率紙上で上に凸の折線状の分布(ただし折点は丸味をもつ)となる. 複合ワイブル分布の定義にならって対数正規確率紙上で完全な折線(折点が丸味をもたない)となる分布を複合対数正規分布と定義すると, N_f の分布は折点の丸味を無視すれば一般に複合対数正規分布によって近似される.

(ii) N_f の分布は屈曲点より左側の短寿命域では N_p の分布に類似し, 屈曲点よりも右側の長寿命域では N_i の分布に類似している. すなわち, 短寿命域は伝ば支配型分布, 長寿命域は発生支配型分布といえることができる.

(iii) μ_i/μ_p の増加(すなわちき裂発生寿命と伝ば寿命の平均的比率の増加)に伴い, 屈曲点は下方に移動する.

(iv) μ_i/μ_p がある程度より小さくなると, 実験的にカバーされる破壊確率 F の範囲内では N_f の分布は折線とならず, N_i とほぼ同じ直線となって現れる.

(v) μ_i/μ_p がある程度より大きくなると, N_f の分布はやはり実験的にカバーされる破壊確率 F の範囲内では折線とならず, N_p とほぼ同じ直線となって現れる.

以上(i)~(v)の結果は N_i と N_p が2母数ワイブル分布に従う場合に N_f がワイブル確率紙上で示す分布特性と類似している.

(2) 疲労き裂の発生寿命と伝ば寿命の平均的比率は応力レベルの低下とともに増加するという実験事実に留意すると, N_i と N_p が $\sigma_i > \sigma_p$ なる2母数対数正

規分布に従うならば, 上記(i)より N_f の分布は Fig. 1 のような応力依存性を示すことになり, 一般にみとめられている実験特性が説明される. すなわち, 二つの対数正規分布の混合分布として得られる混合対数正規分布によってだけでなく, 二つの対数正規分布のたたみこみにより得られる重畳対数正規分布によっても N_f の分布の応力依存性を説明することができる.

(3) N_i と N_p がそれぞれ2母数対数正規分布にほぼ従い, かつ $\sigma_i > \sigma_p$ であることが若干の実験例について確かめられた. また, これらの実験で得られた N_i と N_p の母数を用いてモンテカルロシミュレーションにより計算した N_f の分布は N_f の実験的分布とよく一致した.

本研究の一部は文部省科学研究費補助金(昭和56年度)によるものであり, 記して謝意を表する. また, モンテカルロシミュレーションなど数値計算には, 電気通信大学情報処理センタを利用したことを付記する.

(昭和56年11月10日 第15回疲労シンポジウムにて講演)

参 考 文 献

- 1) Ichikawa, M., T. Takura, and S. Tanaka, Int. J. Fracture, **16**, R251 (1980).
- 2) 市川昌弘, 田倉隆行, 田中 栄, 日本機械学会第20回シンポジウム講演論文集, No. 810-7, 101 (1981).
- 3) 市川昌弘, 田倉隆行, 辻元 純, 日本機械学会講演論文集, No. 820-2, 223 (1982).
- 4) Bastenaire, F., M. Bastien, and G. Pomey, Acta Technica, Academiae Scientiarum Hungaricae, **35**, 7 (1961).
- 5) 下河利行, 浜口泰正, 日本材料強度学会誌, **10**, 179 (1976).
- 6) Ichikawa, M., and S. Tanaka, Int. J. Fracture (accepted).
- 7) 田中 栄, 秋田 敏, 小林信之, 日本材料強度学会誌, **8**, 56 (1973).