機械・構造物の信頼性設計

7. 最適設計手法*

室 津 義 定**

1 はじめに

構造物に作用する荷重および構造部材の強度は必ずしも確定的には定められない場合が多いので、それらの統計的な変動を考慮して算出される信頼度あるいは構造破損確率は、構造の安全性に対する合理的な尺度であると考えられる。そのため、構造物の信頼性解析に関する研究やそれに基づいた設計に関して、近年多くの研究がなされている。特に信頼度基準に基づいて最小重量の構造を決定するなど、いわゆる最適設計^{9)~10)}についてもいくつかの報告が発表されている。以下では、信頼度基準に基づく構造の最適設計手法について紹介する。

2 構造物の信頼性解析法^{9)~17)}

構造物の破損モードは、一般に数多く存在する。その数は構造の形式と作用する荷重の条件によって異なるものの、個々の破損モードに着目すれば安全余裕は次のようなストレス強度モデルに帰着される。

$$Z_i = T_i - S_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

ここに、 T_i 、 S_i は破損モード i の強さと荷重作用である。 Z_i を一般の構造¹⁴⁾¹⁵⁾に対して生成するためには、有限要素法が用いられる。構造部材の強度を R_j ($j=1, 2, \dots, n$)、構造に作用する荷重を L_j ($j=1, 2, \dots, l$) とすると、それらは次のように表示することができる。

$$T_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} R_j, \quad S_j = \sum_{j=1}^l b_{ij} L_j \quad (1')$$

強度 R_j および荷重作用 L_j が確率変数である場合には、安全余裕 Z_i もまた確率変数となる。したがって、各破損モードの生起はその確率によって評価しなければならない。

破損モードが生起する、すなわち $Z_i \leq 0$ となる事象を F_i とする。破損モード i が生起する確率 P_{F_i} は次のように書くことができる。

$$P_{F_i} = P[Z_i \leq 0] = P[F_i] \quad (2)$$

構造の破損は、 m 個の破損モードのうちいずれかのモードが生起すれば発生する。したがって、構造破損確率 P_f は次式によって与えられる。

$$P_f = P[F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_m] \quad (3)$$

(1)' 式からわかるように、各破損モードの安全余裕 Z_i は、一般に部材強度 R_j および荷重 L_j を共通に含む。したがって、破損モードが生起する事象 F_i は、統計的に独立でも、排反的でもない。それらを互いに排反的事象で表すと構造破損確率は次のようになる。

$$P_f = P[F_1] + P[\bar{F}_1 \cap F_2] + P[\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2 \cap F_3] + \dots + P[\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2 \cap \dots \cap \bar{F}_{m-1} \cap F_m] \quad (4)$$

(4) 式を厳密に評価するためには、 m 次元までの同時確率を計算しなくてはならないがこれは一般に、困難である。そこで、(4) 式を近似的に評価する。一般に、事象の確率は非負の値であるから(4)式の第2項以下の項は0以上の寄与をする。(4)式の展開は、 m 個の破損事象のいずれに対しても可能であるので、構造破損確率は一般にどの破損モードの生起確率よりも大きい。

$$P_f^{(0)} = \max_i P_{F_i} \leq P_f \quad (5)$$

このことは、 $P_f^{(0)}$ は、 P_f の下限値を与えることを示している。また、一般に、二つの事象 A 、 B の共通事象 $A \cap B$ は、 A 、 B の部分事象であるから、 $P[A \cap B] \leq P[B]$ が成り立つ。これらの関係を、(4)式に適用すると次のことがいえる。

$$P_f \leq P[F] + P[F_2] + P[F_3] + \dots + P[F_m] = \sum_{i=1}^m P[F_i] = P_f^{(1)} \quad (6)$$

(6) 式は構造破損確率 P_f は、各破損モードの生起確率の和よりも大きくないことを示している。すなわち、 $P_f^{(1)}$ は P_f の上限値である。(5)、(6)式より構造破損確率は

$$P_f^{(0)} \leq P \leq P_f^{(1)} \quad (7)$$

によって評価できることがわかる。(7)式によって得られる構造破損確率の区間推定値は広すぎる場合もあるが、個々の破損モードの生起確率を計算するのみで構造破損確率が評価できる特長をもつ。

破損モード間の相関を考慮した上限値の計算法としては、次の方法が考えられる。¹²⁾¹³⁾ すなわち、各破損モードの生起確率の大きい順に破損モードを選択し、それらは次の関係を満たすものとする。

* 原稿受理 昭和57年6月1日

** 正 会 員 大阪府立大学工学部 堺市百舌鳥梅町

$$P_{f1} \geq P_{f2} \geq \dots \geq P_{fN\alpha} \quad (8)$$

ここで、 N_α は、 α を与えられた定数として $P_{f1} \geq 10^{-\alpha} \times P_{f1}$ を満す破損モードの個数である。これらの主要破損モードを用いて、 P_f を2次元の同時確率を用いて次式で近似する。

$$P_f \cong P_f^{(\alpha, 2)} = P[F_1] + \sum_{k=2}^{N\alpha} \min_{1 \leq j \leq k-1} P[\bar{F}_j \cap F_k] \quad (9)$$

3 最適構造設計問題とその解法 (1)^{16)~20)}

形態の指定された n 個の要素からなる骨組構造物について、信頼度の基準を満しながら構造費用または構造重量を最小にする構造要素を決定する問題を取扱う。構造の第 j 要素の強度 R_j は、その要素の設計諸元 X_j と使用材料の破損基準応力 C_{yj} との関係として次のように表される。

$$R_j = R_j(X_j, C_{yj}) \quad (10)$$

以下では簡単のために、破損基準応力のみを確率変数とする。このとき、 $R_j (j=1, 2, \dots, n)$ は確率変数となり、その確率的性質は破損基準応力 C_{yj} によって決定される。

一方、構造費用または構造重量 H_c は構造の形態と使用材料を指定すると設計諸元の関数となる。したがって、 H_c は次のように表される。

$$H_c = H_c(X_1, X_2, \dots, X_n) = H_c(\mathbf{X}) \quad (11)$$

ただし、 $\mathbf{X}$ は設計変数 X_j を要素とするベクトル $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ である。

構造破損確率 P_f は2の方法で計算され、この値もまた、設計変数の関数となる。すなわち、

$$P_f = P_f(X_1, X_2, \dots, X_n) = P_f(\mathbf{X}) \quad (12)$$

ここで、次の最適設計問題を設定する。

問題「構造の形態と使用材料が指定されたとき、構造破損確率に対する制約

$$P_f(\mathbf{X}) \leq P_{fa} \quad (13)$$

の下で、構造費用または重量 $H_c(\mathbf{X})$ を最小にする構造要素の設計諸元 $X_j (j=1, 2, \dots, n)$ を決定せよ。

ただし、 P_{fa} は指定された許容破損確率である。」

この問題は、制約式(13)のもとに目的関数(11)を最小にする一種の非線形計画問題である。そこで、非線形計画問題の代表的な解法である SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique) による解法をまず与える。この方法では、原問題に対する制約式(13)をペナルティとして目的関数(11)に含め、制約なしの最適化問題に変換する。すなわち、SUMT の目的関数 $F_{r(k)}(\mathbf{X})$ は次のようになる。

$$F_{r(k)}(\mathbf{X}) = H_c(\mathbf{X}) + r^{(k)} \frac{1}{P_{fa} - P_f(\mathbf{X})} \quad (14)$$

図1に示す静定トラスを設計例として、SUMT による最適解の精度と計算効率を検討する。設計変数として構造要素の断面積 $A_j (j=1, 2, \dots, 5)$ をとり、

図1 5部材静定トラス

材料の降伏応力 σ_{yj} を破損基準応力とする。また、構造破損確率を(6)式の $P_f^{(1)}$ で評価し、構造重量を次式で与える。

$$H_c = \sum_{j=1}^5 \rho_j l_j A_j \quad (15)$$

計算結果を表Iに示す。SUMT 法は最適解の各試行点で常に(14)式およびそのこう配を計算せねばならず、破損確率の計算回数が多大となり効率的でない。そこで、室津らは次の方法を提案している。すなわち、最適解の探索のために、次の副問題を逐次解くことによって与えられた問題の最適解を得る方法である。

表I 最適化法の比較²⁰⁾

(CV _{C_{yj}} , CV _{L_j}) = (0.05, 0.1), P _{fa} = 1 × 10 ⁻⁴ , P _f = P _{f⁽¹⁾} 初期値・A _i = 37.04 (i = 1, 2, ..., 5)				
部 材 No	SUMT		室津らの方法	
	A _i (cm ²)	P _{fi}	A _i (cm ²)	P _{fi}
1	4.49	0.2888 × 10 ⁻⁴	4.52	0.2000 × 10 ⁻⁴
2	1.66	0.1261 × 10 ⁻⁴	1.64	0.2000 × 10 ⁻⁴
3	1.12	0.0826 × 10 ⁻⁴	1.09	0.2000 × 10 ⁻⁴
4	1.68	0.0947 × 10 ⁻⁴	1.65	0.2000 × 10 ⁻⁴
5	4.45	0.4071 × 10 ⁻⁴	4.54	0.2000 × 10 ⁻⁴
P _f = Σ P _{fi}	0.9993 × 10 ⁻⁴		1.0000 × 10 ⁻⁴	
計算時間*	84.15 (sec)		0.37 (sec)	
H _c (kg)	4.44		4.46	

* Burroughs B-6700

副問題「各破損モードに対する確率制約

$$P_{fi}(\mathbf{X}) \leq P_{fa_i} (i=1, 2, \dots, m) \quad (16)$$

のもとで、構造費用または重量 $H_c(\mathbf{X})$ を最小にする構造要素の設計諸元 $X_j (j=1, 2, \dots, n)$ を決定せよ。ただし、 P_{fa_i} は各破損モードに対して与えられた許容破損確率である。」

室津らの方法によって得た結果を表Iに併記する。最適解はSUMTによるものと差異はない。しかし、室津らの方法の計算所要時間はSUMTの約1/12となっており、計算効率が著しく向上している。

つぎに、構造破損確率の計算に破損モード間の相関を考慮しない近似式(5)と、相関を考慮した近似式(9)を用いた場合の設計例を示し、両者の結果を比較することによって部材破損事象間の相関の影響を検討する。表IIは図1の静定トラスに対する最適解を、種々の許

表Ⅱ 破損モード間の相関の最適解に及ぼす影響²⁰⁾

$(CV_{\sigma_{y2}}, CV_{L_2}) = (0.05, 0.1)$

P_{fa}		A_1 (cm^2)	A_2 (cm^2)	A_3 (cm^2)	A_4 (cm^2)	A_5 (cm^2)	H_0 (kg)	P_f	ΣP_{fi}
10^{-3}	$P_f^{(1)}$	4.29	1.54	1.06	1.59	4.26	4.22	0.9991×10^{-3}	0.9991×10^{-3}
	$P_f^{(3,2)}$	4.30	1.52	1.06	1.59	4.25	4.22	0.9994×10^{-3}	1.0246×10^{-3}
10^{-5}	$P_f^{(1)}$	4.68	1.77	1.17	1.75	4.68	4.65	0.9991×10^{-5}	0.9991×10^{-5}
	$P_f^{(3,2)}$	4.69	1.75	1.17	1.75	4.68	4.65	0.9992×10^{-5}	1.0026×10^{-5}

$P_f^{(1)}$ の場合の計算時間: 15.2秒

$P_f^{(3,2)}$ の場合の計算時間: 68.2秒

図2 同一荷重を受ける各種トラス構造

図3 目的関数の形状

表Ⅲ 構造形態が構造重量に及ぼす影響²⁰⁾

$(CV_{\sigma_{y2}}, CV_{L_2}) = (0.05, 0.1)$, $P_{fa} = 10^{-5}$, $P_f = P_f^{(1)}$

Type	$A_1(\text{cm}^2)$	$A_2(\text{cm}^2)$	$A_3(\text{cm}^2)$	$A_4(\text{cm}^2)$	$A_5(\text{cm}^2)$	$A_6(\text{cm}^2)$	$H_0(\text{kg})$	$P_{fin} 10^{-5}$
1		2.45	3.79	4.98	1.46	5.82	5.98	0.9992
2	3.24		1.50	3.14	2.87	2.88	4.63	0.9991
3	3.77	1.14		2.44	3.56	1.45	4.12	0.9991
4	6.61	3.15	3.25		7.08	2.89	8.00	0.9991
5	1.17	1.75	2.88	4.29		4.68	4.67	0.9999
6	4.68	4.68	1.17	1.75	4.68		4.65	0.9991
6部材不静定トラス	3.29	0.80	0.44	2.29	3.04	1.51	3.80	0.9994

容破損確率 P_{fa} について示したものである。いずれの場合も最適解に対する相関の影響はほとんどみられない。しかし、相関を考慮した場合に得られる最適解に対して、 $\sum_{i=1}^5 P_{fi}$ を計算すると、 $P_f (= P_f^{(3,2)})$ の値より幾分高い値となっている。このことは、相関を考慮しない設計は安全側の解を与えることを示している。一方、両者の結果を計算時間の点から比較すると、 $P_f^{(3,2)}$ を用いた設計は $P_f^{(1)}$ を用いた場合の約4倍となっている。

最後に、構造形態の最適性について考察する。そのために、図1に示した $L_1 \sim L_5$ の荷重条件に対する基本的な構造形態として、図2(a)に示す不静定トラスと図2(b)の6種類の静定トラスを考える。表Ⅲは構造破

損確率を(6)式で評価し、許容破損確率を 10^{-5} としたときの各構造形態の最適値を示したものである。これらを比較すると、断面積および重量にはかなり差があり、設計問題における構造形態の選択の重要性がうかがわれる。設計例では、静定構造については Type 3 の形態が他の形態よりも軽く、これよりもさらに不静定構造の重量が小さくなっている。確定的な設計の場合、一般に、静定構造が優れていると言われるのに対し、この結果は、不静定構造が信頼性設計において重要な役割を果たすことを示すものである。

4 最適構造設計問題とその解法 (2)^{22)~24)}

構造破損確率の許容限界値が指定されたとき、構造費用を最小にする最適信頼性設計問題については前節

で与えた。しかし、実際問題に適用しようとするときと制約となるべき許容破損確率の値を指定することが困難な場合もある。このようなときには、構造物が破損した場合の構造物自体の損失、事故補償、社会的な信用失墜等種々の損失を考えただけで、構造費用のみならず、このような損失費用をも考慮した総費用を最小にするという一段上位レベルの問題を解くことが要求される。この節ではこれらの事情を考慮したうえで、考えられるいくつかの最適信頼性設計問題を設定し、その相互関係を考察するとともに、その解法を与える。

問題1「指定された許容破損確率 P_{fa} に対する制約のもとで、構造費用 $H_c(\mathbf{X})$ を最小にする設計変数 $X_j (j=1, 2, \dots, n)$ を決定せよ。」

この問題は前節で設定された問題であり、次のように記述される。

$$\min_{\mathbf{X} > 0} H_c(\mathbf{X}) \quad \text{s. b. t. } P_f(\mathbf{X}) \leq P_{fa} \quad (17)$$

“ $\mathbf{X} > 0$ ”は $\mathbf{X}$ の要求が非負であり、すべてが0ではないことを意味する。

問題2「構造費用および構造破損に伴う損失費用の両者から構成される期待総費用を最小にする設計変数を決定せよ。」

この問題において、構造が破損したときの損失費用が与えられる場合、その期待値としての期待損失費用は構造破損確率に依存する。すなわち、破損確率が小さいときは、期待損失費用は小さく、逆に破損確率が大きいときは期待損失費用も大きくなるであろうことが予測される。そこで一般に、期待損失費用 H_f が構造破損確率の関数として次のように与えられるものと

$$H_f = H_f(P_f) \quad (18)$$

一方、構造費用 H_c は、破損確率を小さくしようとすれば増大し、破損確率が大きい場合は低減する。すなわち、構造費用 H_c と期待損失費用 H_f とは一般に、図3に示されるように構造破損確率 P_f に関して互いに相反の関係にある。そこで、これら両費用の和を期待総費用 H_T として次式で定義し、この H_T を最小にする問題として設定されたのが問題2である。すなわち、

$$H_T = H_c(\mathbf{X}) + H_f(P_f) \quad (19)$$

ここで、構造破損確率 P_f が $\mathbf{X}$ の関数であることに注意すれば、問題2は次のように $\mathbf{X} > 0$ 以外には制約条件のない最小化問題として記述される。すなわち、

$$\min_{\mathbf{X} > 0} H_T(\mathbf{X}) \quad (20)$$

問題3「期待総費用が指定された許容限界値のもとで、構造破損確率を最小にする設計変数を決定せよ。」

この問題は、構造破損確率が非常に重要な意味をもつ場合、期待総費用が最小でなくても、ある一定限度

以下なら許容することにし、むしろ構造破損確率を小さくしたい場合に採用されるモデルで、次のように記述される。

$$\min_{\mathbf{X} > 0} P_f(\mathbf{X}) \quad \text{s. b. t. } H_T(\mathbf{X}) \leq H_{Ta} \quad (21)$$

ここで、 H_{Ta} は指定された許容期待総費用である。

問題4「期待総費用を許容限界値以下に保ち、構造費用を最小にする設計変数を決定せよ。」

この問題は、全体として期待総費用を抑えながら破損確率よりも構造費用を重視する場合のモデルであり、次のように記述される。

$$\min_{\mathbf{X} > 0} H_c(\mathbf{X}) \quad \text{s. b. t. } H_T(\mathbf{X}) \leq H_{Ta} \quad (22)$$

問題5「構造費用を許容限界値以下に保ち、構造破損確率を最小にする設計変数を決定せよ。」

構造費用が制約を受ける場合の信頼性設計問題としてはこのモデルが適切であり、次式のように記述される。

$$\min_{\mathbf{X} > 0} P_f(\mathbf{X}) \quad \text{s. b. t. } H_c(\mathbf{X}) \leq H_{ca} \quad (23)$$

ただし、 H_{ca} は指定された許容費用である。

つぎにそれぞれの問題の解法を与える。

問題2は(20)式で与えられる非線形計画問題であるから、原理的には従来開発された最適化手法を用いて解くことができるはずである。しかし、(19)式からわかるように、そのためには最適解探索の各試行点において構造破損確率 P_f を計算する必要がある。しかしこの P_f の計算は多次元同時確率分布の計算を必要とし、近似解法をもってしても試行回数が多くなると多大の計算時間を要する。さらに、通常用いられる効率の良い探索手法はいずれも各試行点におけるこう配ベクトルを必要とする。この場合は、微小距離だけ離れた2点間での P_f の差を正確に評価する必要があるので、問題自身に要求される破損確率の計算精度よりもはるかに高い精度で P_f を計算する必要がある。それは極めて困難であると同時に無駄なことである。したがって、ここでは問題2を前章で与えた問題1に帰着させて解く方法を与える。

問題2の解法： P_{fa} を指定した問題1を解き、最小構造費用 $H_c^0(P_{fa}) = H_c[\mathbf{X}^*(P_{fa})]$ を求める。そして、

$$H_T^0(P_{fa}) = H_c^0(P_{fa}) + H_f(P_{fa}) \quad (24)$$

が最小になるように、 P_{fa} に関して1次元探索を行う。すなわち、 P_{fa} の各試行点で問題1を逐次解くことによって問題2が解かれる。

問題3の解法：問題3は問題1を用いて次のように解ける。すなわち、 $H_T^0(P_{fa})$ が P_{fa} に関して単調減少となっている範囲で、 P_{fa} を指定して問題を解き、 $H_T^0(P_{fa}) = H_{Ta}$ となるように P_{fa} に関して1次元探索を行うことによって問題3の解を得る。

図4 13部材静定トラス

図5 各種問題の相互関係

表Ⅳ 問題1～5の最適解²⁵⁾ (13部材静定トラス構造) $C_{mj}d_j=1$

問題	$\bar{R}_1^*$	$\bar{R}_2^*$	$\bar{R}_3^*$	$\bar{R}_4^*$	$\bar{R}_5^*$	$\bar{R}_6^*$	H_C^0	H_T^0	P_{fa}^{*4}	許容限界値
1	126.82	89.20	79.37	76.75	22.35	54.22	33.3		1.08×10^{-5}	$P_{fa}=10^{-5}$
2	95.63	67.10	59.68	58.08	17.00	40.71	25.1	27.3	2.15×10^{-4}	
3	90.11	63.18	56.23	54.78	15.75	38.32	23.6	27.9	4.27×10^{-4}	$H_{Ta}=28.0$
4	103.73	72.93	64.94	63.08	18.28	44.21	27.3	28.1	8.63×10^{-5}	$H_{Ta}=28.0$
5	106.75	74.92	66.70	64.79	18.56	45.55	28.0		6.46×10^{-5}	$H_{Ca}=28.0$

$\bar{R}_1=\bar{R}_7$, $\bar{R}_2=\bar{R}_8$, $\bar{R}_3=\bar{R}_9=\bar{R}_{12}=\bar{R}_{13}$, $\bar{R}_4=\bar{R}_{10}$, $\bar{R}_5=\bar{R}_{11}$ (単位): kips $C_f=10^4$

問題4の解法: 問題4の解は、 $H_T^0(P_{fa})$ が P_{fa} に関して単調増加の範囲で、 $H_T^0(P_{fa}^{*4})=H_{fa}$ となるように P_{fa} に対する1次元探索をしながら、問題1を繰返し解くことによって得られる。

問題5の解法: 問題5は、 P_{fa} に関する1次元探索の各試行点で問題1を解き、指定された許容構造費用 H_{ca} に対して、

$$H_C^0(P_{fa}^{*5})=H_{ca} \quad (25)$$

を満たす P_{fa}^{*5} を求めることによって解かれる。すなわち、 P_{fa}^{*5} を許容破壊損率としたときの問題1の解が問題5の解となる。

図4に示した13部材静定トラス構造を設計例として考える。期待損失費用は、 $H_f(P_f)=C_f P_f$ で与えられるとし、 $C_f=10^4$ とした。このとき、各種最適設計問題に対して、上記の解法に従って求めた最適解を表Ⅳに示す。 P_{fa}^{*i} は問題1に帰着させて解いた場合の許容破壊損率である。したがって、各問題の P_{fa}^{*i} を許容破壊損率として問題1を解いたときの最適解を与えている。表Ⅳの最適解を見ると、構造システムの強度が対称となるように平均部材強度が与えられている。また図5は許容破壊損率 P_{fa}^{*i} に対して、各問題の最適な構造費用と期待総費用の関係を示したものである。

5 最適構造設計の実用化

前節までは、荷重および強度の統計的性質が完全に既知であって、構造解析が正確に実行できるとして議論を進めてきた。その場合でも、冗長度の高い構造の信頼性解析には未解決の問題が残されている。さらに実際には、荷重および強度に関する統計データの不足、

構造解析におけるモデル化誤差などの問題もあるので、正確な意味で問題1～5の最適設計を実行することは困難である。以下では、このような状況のもとで、最適設計を実用化するための試みについて述べる。

信頼性解析に関する問題の解決の一つの方法は、安全余裕の平均値 $\bar{Z}_i$ 、標準偏差 σ_{z_i} および安全性指標(safety index) λ_i を用いて、設計基準を次のように与えることである。

$$\bar{Z}_i \geq \lambda_i \sigma_{z_i} \quad (26)$$

(26)式を完全性の尺度として用いると破壊モードが m 個ある場合の最適設計問題は次のように定式化される。

すなわち、

$$\min_{\mathbf{X} > 0} H_c(\mathbf{X}) \text{ s. t. } \bar{Z}_i \geq \lambda_i \sigma_{z_i} \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (27)$$

この方法の計算例として、図6に示した箱型はりを考える。図中では、縦通材を i ($i=1, 2, 3, 4$)とし、ウェーブを $\bar{i}$ ($\bar{i}=1, 2, 3, 4$)と記した。設計変数は、縦通材の断面積 A_i とウェーブの厚さ $t_{\bar{i}}$ であり、重量は次式で与えられる。

図6 箱型はり (x_r, z_r : 基準軸)

表V 箱型はりの最適設計²⁶⁾

λ_2	A_1 (mm ²)	A_2 (mm ²)	A_3 (mm ²)	A_4 (mm ²)	t_1 (mm)	t_2 (mm)	t_3 (mm)	t_4 (mm)	W (kg/m)
0	284	350	278	356	0.13	0.30	0.01	0.44	4.193
1	350	358	284	424	0.13	0.32	0.03	0.51	4.696
3	440	428	349	519	0.51	0.40	0.05	0.62	5.731
5	527	525	439	613	0.18	0.50	0.07	0.73	6.955

$$W = \sum_{i=1}^4 (\rho_i A_i + \rho_{si} l_i t_i) \quad (28)$$

ここに、 l_i はウェブの長さ、 ρ_i は密度である。

安全性指標を種々に変化させた場合の最適設計の結果を表Vに示す。安全性指標が大きくなると設計値は大きくなり、構造重量も増加する。

信頼性解析が困難である高次冗長構造物では部材信頼度に基づく設計法が考えられている。²⁷⁾ すなわち、部材の許容破損確率を P_{fa_i} とすると、

$$P_{f_i}(\mathbf{X}) = P_{fa_i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (29)$$

となるように設計変数 $\mathbf{X}$ を決定する方法である。³⁴⁾ 式は一般に、 n 元非線形連立方程式となり直接解くことは困難であり、反復法による解法が提案されている。この方法では、部材の荷重影響係数 $b_{ij}(A)$ の生成に対しては、マトリックス法を用いている。なお、このアルゴリズムでは、静定トラスの場合には1回の反復で所要の構造が決定される。

図7の7次不静定25部材主体トラスについて設計例を示す。各部材の破損確率を等しく $P_{fa_i} = 10^{-3}/25 = 4 \times 10^{-5}$ ($i=1, 2, \dots, 25$) とし、破損基準応力および荷重の変動係数をそれぞれ変化させた場合の結果を表VIの A_i 欄に与えている。

さらに、構造破損確率を各部材の破損確率の和で評価する場合、すなわち、

$$P_f = \sum_{i=1}^n P_{f_i}(\mathbf{X}) \quad (30)$$

の場合には、許容構造破損確率 P_{fa} を指定して、各

図7 25部材不静定トラス

表VI 等信頼度設計と最適信頼度配分設計²⁸⁾との比較
(25部材不静定トラス)

A_i : 等信頼度設計, A_i^0 : 最適信頼度配分設計,
 $P_{fN_i^0}$: 最適信頼度配分

$$P_{fa} = 10^{-3}, (CV_{\sigma_{Y_i}}, CV_{L_j}) = (0.05, 0.2)$$

i	A_i (cm ²)	A_i^0 (cm ²)	$P_{fN_i^0}$
1	3.7389	4.1724	0.1288×10^{-4}
2	28.7183	27.9842	0.7892×10^{-4}
3	7.0211	6.4246	0.4000×10^{-4}
4	7.0211	6.3050	0.4000×10^{-4}
5	28.7194	28.9304	0.7582×10^{-4}
6	2.6300	3.2168	0.1459×10^{-4}
7	25.8981	25.6436	0.4000×10^{-4}
8	25.8983	25.6272	0.4000×10^{-4}
9	2.6301	3.3588	0.1575×10^{-4}
10	5.8616	5.9301	0.4000×10^{-4}
11	5.8615	4.2504	0.2959×10^{-4}
12	1.1954	1.7288	0.1659×10^{-5}
13	1.1955	1.6656	0.6204×10^{-5}
14	9.2578	0.1414	0.4000×10^{-4}
15	39.8267	39.2497	0.1039×10^{-3}
16	39.8258	34.2439	0.7834×10^{-4}
17	0.2577	2.3171	0.4000×10^{-6}
18	1.1779	1.5809	0.6085×10^{-5}
19	2.2261	2.0266	0.4000×10^{-4}
20	2.2261	2.0266	0.4000×10^{-4}
21	1.1780	1.5402	0.1804×10^{-4}
22	5.5851	5.8608	0.4000×10^{-4}
23	29.4470	29.0618	0.7380×10^{-4}
24	29.4472	30.1562	0.8908×10^{-4}
25	5.5850	4.3178	0.4000×10^{-4}
W (kg)	287.124	280.585 (2.277%)	

部材に信頼度を最適に配分する次の設計問題が設定される。

最適部材信頼度配分問題²⁸⁾

$$\min_{\{P_{f_i}(\mathbf{X})\}} H_c(\mathbf{X}) \quad \text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^n P_{f_i}(\mathbf{X}) = P_{fa} \quad (31)$$

図7の25部材トラス構造に対する $P_{fa} = 10^{-3}$ の場合の上記の問題に対する最適解を表VIの A_i^0 の欄に与えている。この場合、前述の等信頼度設計に比較して、構造重量が2～3%軽減されている。

6 おわりに

以上、信頼性理論に基づく構造物の最適設計手法に関する研究を紹介した。現在のところ、研究の成果が現実の構造設計に応用された事例は少い。したがって、信頼性理論に基づく構造設計を実用化するための方法論の研究は緊急になされるべき課題の一つである。さらに、大規模な冗長構造や安全余裕が非線形であったり、非正規分布に従う構造、繰返し荷重や動的荷重を受ける構造などの信頼性解析に対する有効な方法が開発される必要がある。また、信頼度に基づいた最適設計を実用的な規模の構造について実行するためには、簡明な信頼性解析法の確立とともに、効率的な最適解の探索法を工夫しなくてはならない。

なお、本稿では、紙面の都合上、構造の信頼性解析法についての詳細は述べることができなかったが、興

11)~15)29)~33)
味のある読者は信頼性解析に関する論文を参照されたい。

参 考 文 献

- 1) Freudenthal, A. M., Trans. Am. Soc. Civil Engrs., **121**, 1337 (1956).
- 2) Switzky, H., J. Aircraft, **2**, 228 (1965).
- 3) Hilton, H. H., and M. Feigen, J. Aeronautical Sciences, **27**, 641 (1960).
- 4) Switzky, H., J. Aircraft, **2**, 509 (1965).
- 5) Moses F., and D. E. Kinser, AIAA Journal, **5**, 1152 (1967).
- 6) Murthy, P. N., and G. Subramanian, AIAA Journal, **6**, 2037 (1968).
- 7) Freudenthal, A. M. (ed.), "International Conference on Structural Safety and Reliability", 11 (1972) Pergamon Press
- 8) Gallagher, R. H., and O. C. Ziekiewicz (ed.), "Optimum Design Theory and Applications", 241 (1973) John-Wiley and Sons
- 9) Moses, F., and D. Stevenson, J. Str. Div., Proc. Am. Soc. Civil Engrs., **96**, ST2, 221 (1970).
- 10) Vanmarcke, E. H., Computer and Structures, **3**, 757 (1975).
- 11) Murotsu, Y., F. Oba, M. Yonezawa, and K. Niwa, Bull. Univ. Osaka Pref., A, **24**, 198 (1975).
- 12) 米沢政昭, 室津義定, 大場史憲, 丹羽一邦, 日本機械学会論文集, 44-385, 2936 (1978).
- 13) Murotsu, Y., F. Oba, M. Yonezawa, and K. Niwa, "Advances in Reliability and Stress Analysis", edited by J. J. Burns, ASME, 3 (1979).
- 14) Murotsu, Y., H. Okada, K. Niwa, and S. Miwa, Trans. ASME, J. Mechanical Design, **102**, 749 (1980).
- 15) 室津義定, 岡田博雄, 丹羽一邦, 三輪 茂, 日本機械学会論文集, 46-404, 420 (1980).
- 16) Murotsu, Y., F. Oba, M. Yonezawa, and K. Niwa, Proc. 19th Japan Congress on Materials Research, 256 (1975).
- 17) Murotsu, Y., F. Oba, M. Yonezawa, and K. Niwa, Proc. 12th International Symposium on Space Technology and Science, 1047 ((1977).
- 18) 米沢政昭, 室津義定, 大場史憲, 丹羽一邦, 日本機械学会論文集, 45-390, 179 (1979).
- 19) Murotsu, Y., M. Yonezawa, F. Oba, and K. Niwa, ASME paper 79-DET-114 (1979).
- 20) 丹羽一邦, 米沢政昭, 大場史憲, 室津義定, 津村俊弘, 材料, **29**, 37 (1980).
- 21) 室津義定, 大場史憲, 米沢政昭, 藤井 進, "システム工学", 211 (1980) 森北出版
- 22) Murotsu, Y., M. Yonezawa, F. Oba, and K. Niwa, Hope International JSME Symposium, Oct. 30-Nov. 2, 461 (1977).
- 23) Yonezawa, M., Y. Murotsu, F. Oba, and K. Niwa, Archives of Mechanics, **30**, 227 (1978).
- 24) 米沢政昭, 室津義定, 大場史憲, 丹羽一邦, 日本機械学会論文集, 45-396, 884 (1979).
- 25) Murotsu, Y., F. Oba, M. Yonezawa, and K. Niwa, "Theoretical and Applied Mechanics", **26**, 25 (1978) University of Tokyo Press
- 26) Murotsu, Y., F. Oba, M. Yonezawa, and K. Niwa, Proc. 11th ICAS, 572 (1978) Lisbon
- 27) 室津義定, 三輪 茂, 丹羽一邦, 田口賢士, 日本機械学会論文集, A, 47-414, 211 (1981).
- 28) 米沢政昭, 室津義定, 岡田博雄, 田口賢士, 材料, **30**, 1235 (1981).
- 29) 室津義定, システムと制御, **24**, 507 (1980).
- 30) 室津義定, 岡田博雄, 三輪 茂, 丹羽一邦, 田口賢士, 日本機械学会論文集, A, 47-419, 763 (1981).
- 31) Murotsu, Y., H. Okada, M. Yonezawa, and K. Taguchi, "Structural Safety and Reliability", 315 (1981) Elsevier
- 32) Murotsu, Y., H. Okada, M. Yonezawa, M. Grimmer, and K. Taguchi, Bull. Univ. Osaka Pref., A, **30**, 2, 85 (1981).
- 33) 室津義定, 岡田博雄, 米沢政昭, M. グリンメルト, 日本機械学会講演論文集, 824-1, 25 (1982); 日本機械学会論文集, A, 49-437 (1983) 掲載予定