電気ポテンシャル法による表面き裂の解析[†]

坂 田 信 二* 林 真 琴**
清 水 翼* 志 田 茂**

Finite Element Analysis of Surface Crack Configuration Obtained
by Electrical Potential Method

by

Shinji SAKATA, Makoto HAYASHI, Tasuku SHIMIZU and Shigeru SHIDA
(Mechanical Engineering Research Laboratory, Hitachi Ltd., Hitachi)

Finite element procedures were used to discuss the practicality of the electrical potential technique for monitoring the surface crack of a plate.

The analysis applied to solve the potential field problems involves the solution of Laplace equation. Analytical figures were modeled as three-dimensional bodies using eight-nodes isoparametric elements. A computer program ADINAT was employed in this study.

From finite element analyses, the following method of determining surface crack configuration was proposed. The electrical potential ratio is determined first at several positions from a crack center and the relationship between electrical potential ratio and distance from a crack center is obtained. By assuming that a surface crack takes a half elliptical configuration, the crack length c at surface can be estimated from the relation between the crack area ratio and the distribution of electrical potential ratio from a crack center. Then the crack depth a can be decided from the distribution of normalized electrical potential ratio.

(Received Nov. 27, 1981)

キー・ワード：電気ポテンシャル法，表面き裂，形状検出，有限要素法

1 緒 言

実機に発生するき裂の非破壊的な検出法としては、超音波探傷、磁粉探傷、X-ray、AE、電気ポテンシャル法など多くの方法が考えられる。この中で、電気ポテンシャル法を用いたき裂検出は、特殊なセンサを必要とせず、On-line での測定法として優れていることから実験室における破壊じん性試験でのき裂発生およびその後の進展速度の測定に広く利用されている¹⁾。さらに最近では非線形破壊力学パラメータとして注目されている J_{Ic} の決定にこのポテンシャル法を適用することが考えられており、日本機械学会を中心にその規格化が行われている²⁾。筆者らは先に、直流電気ポテンシャル法に関して、CT 試験片について実験値と有限要素法の解析結果との比較による解析精度の確認と、

最適計測端子取付け位置について検討を行った³⁾。

本報では、表面き裂の形状検出に対して有限要素法による解析的検討を実施し、機器や配管に発生する表面き裂の形状検出に対する直流電気ポテンシャル法の適用法を有限要素法により検討したものである。

2 解 析 法

直流電気ポテンシャルを求める解析は、準調和方程式で表される問題の中で Laplace の方程式を解く問題に一致する。ある未知物理量中の方程式は、次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + Q = 0 \quad (1)$$

ここで ϕ は領域内で一価として、 K_x , K_y , K_z , Q は、 x , y , z のある定まった既知関数である。電気ポテンシャルを扱う問題では、関数 K_x , K_y , K_z は異方性比電気伝導度、 Q は電流、 ϕ は電位となる。式(1)を与えられた境界条件で解く場合、変分法によってそれに代る別の定式化を行うことができる。すなわち、

[†] 本報を「電気ポテンシャル法による表面き裂計測法の開発（第1報）」(Development of Measuring Method for Surface Crack Configuration with Electrical Potential Method, I) とする。
原稿受理 昭和56年11月27日

* (株)日立製作所機械研究所 土浦市神立町

** 正 会 員 (株)日立製作所機械研究所 土浦市神立町

Euler の定理によれば,

$$\pi = \iiint_V f \left(x, y, z, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2)$$

を有界領域において最小にするための必要十分条件は、未知関数 $\phi(x, y, z)$ が同じ領域内で方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial (\partial \phi / \partial x)} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial f}{\partial (\partial \phi / \partial y)} \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial f}{\partial (\partial \phi / \partial z)} \right\} - \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

を満足することである。ただし、いずれの場合も ϕ は同じ境界条件を満足するものとする。この Euler の公式より式(1)と等価な関係式を導くには、 ϕ についての境界条件は同一として全領域にわたっての体積積分

$$\begin{aligned} \pi = \iiint_V \left\{ \frac{1}{2} \left[K_x \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + K_y \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + K_z \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \right] \right. \\ \left. - Q \phi \right\} dx dy dz \end{aligned} \quad (4)$$

を最小にすれば良いことになる。

本解析では、比電気伝導度 K に関して異方性は無いものとして

$$K = K_x = K_y = K_z \quad (5)$$

とする。 $V(x, y, z)$ を電位分布、 v を体積、 S を表面積、 V_s , i_s を表面 S 上の電位および電流とすれば、次の Laplace の方程式

$$\nabla^2 V = 0 \quad (6)$$

を解く問題であり、式(4)は次式の形となる。

$$\pi = \int_V \frac{1}{2} K \left[\frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^2}{\partial y^2} + \frac{\partial V^2}{\partial z^2} \right] dv - \int_S V_s \cdot i_s dS \quad (7)$$

この関係を有限要素法へ離散化すれば良い。したがって最終的には、次式のマトリックス演算を実施することになる。

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{Q} \quad (8)$$

ここで $\mathbf{K}$ は Conductivity Matrix である。

3 解析条件

解析モデルは、200(高さ)×200(幅)×20(板厚)の表面き裂を有する平板である。解析対象とする表面き裂形状を Table I に示す。モデルの対称性から解析領域は、全体の 1/4 とした。使用した要素は 8 節点ソリッド要素で Fig.1 にき裂アスペクト比 a/c (き裂深さ/き裂長さ = 1/2) = 0.500 の場合について要素分割図を示した。このモデルでは要素数 1215、節点数 1456 である。解析に用いた入力電流および材料の固有抵抗は、1.0 とした。解析結果の整理は電位差比 V/V_0 を用いて行うものとする。電流の入力位置は、Fig.1 に示すようにき裂面から 100 mm 離れたモデル板幅中央とした。使用プログラムおよび計算機はそれぞれ AD-INAT HITAC-200 H である。

4 解析結果

Table I. Crack sizes.

Crack No.	a (mm)	c (mm)	a/c	a/t
1	2.5	20.0	0.125	0.125
2	5.0	40.0	0.125	0.250
3	7.5	60.0	0.125	0.375
4	10.0	80.0	0.125	0.500
5	2.5	10.0	0.250	0.125
6	5.0	20.0	0.250	0.250
7	7.5	30.0	0.250	0.375
8	10.0	40.0	0.250	0.500
9	12.5	50.0	0.250	0.625
10	15.0	60.0	0.250	0.750
11	2.5	5.0	0.500	0.125
12	5.0	10.0	0.500	0.250
13	7.5	15.0	0.500	0.375
14	10.0	20.0	0.500	0.500
15	12.5	25.0	0.500	0.625
16	15.0	30.0	0.500	0.750
17	2.5	2.5	1.000	0.125
18	5.0	5.0	1.000	0.250
19	7.5	7.5	1.000	0.375
20	10.0	10.0	1.000	0.500
21	12.5	12.5	1.000	0.625
22	15.0	15.0	1.000	0.750

Fig. 1. Analytical model ($a/c=0.500$).

Table I に示したき裂の中で Crack No. 12, No. 16 のアスペクト比 $a/c=0.500$ のき裂について試験片表面の等電位線図を Fig. 2 および 3 に示す。電流の入力位置が Fig. 2 の左上方にあるため、等電位線の間隔は左上より順に粗くなっている。Fig. 2 と Fig. 3 を比較すると、き裂深さで $a=5.0$ mm と、15.0 mm、き裂表面長さで $c=10.0$ mm と 30.0 mm の変化に対して、き裂面から 50 mm 以上離れた位置では等電位線の形は入力電流の影響を強く受けき裂寸法によっては変化しない。Fig. 4 は、任意き裂深さに対する電位差検出端子 (以後センサと呼ぶ) 間隔と電位差比の関係を示したものである。き裂面とセンサ位置との距離に対して級数的に検出される電位値が低下する。また、き裂の無い裏面での同様な関係を Fig. 5 に示すが、き裂の在る表面に比べてその検出電位値は約 1/2 に低

No. value

4	3.362 E-02
8	6.725 E-02
12	0.101 E+00
16	0.134 E+00
20	0.168 E+00
24	0.202 E+00
28	0.235 E+00
32	0.269 E+00
36	0.303 E+00
40	0.336 E+00
44	0.370 E+00
48	0.403 E+00
52	0.437 E+00
56	0.471 E+00
60	0.504 E+00
64	0.538 E+00
68	0.572 E+00
72	0.605 E+00
76	0.639 E+00
80	0.672 E+00
84	0.706 E+00
88	0.740 E+00
92	0.773 E+00
96	0.807 E+00
100	0.841 E+00

Fig. 2. Potential contour ($a=5.0\text{mm}$, $c=10.0\text{mm}$).

No. value

4	3.392 E-02
8	6.784 E-02
12	0.102 E+00
16	0.136 E+00
20	0.170 E+00
24	0.204 E+00
28	0.237 E+00
32	0.271 E+00
36	0.305 E+00
40	0.339 E+00
44	0.373 E+00
48	0.407 E+00
52	0.441 E+00
56	0.475 E+00
60	0.509 E+00
64	0.543 E+00
68	0.577 E+00
72	0.611 E+00
76	0.644 E+00
80	0.678 E+00
84	0.712 E+00
88	0.746 E+00
92	0.780 E+00
96	0.814 E+00
100	0.848 E+00

Fig. 3. Potential contour ($a=15.0\text{mm}$, $c=30.0\text{mm}$).

Fig. 4. Relation of crack depth a and electrical potential ratio (front surface).

Fig. 5. Relation of crack depth a and electrical potential ratio (back surface).

下する。本報では、Fig. 4 中の $z=5.0$ mm の位置で測定された電位差比分布を用いて表面き裂の寸法解析法を提案する。

Fig. 6 は、Table I のき裂 No. 11~No. 16 のアスペクト比 $a/c=0.500$ の 6 種類のき裂についての解析結果である。図中の縦軸の電位差比の分母の $V_0, L=100$ はき裂寸法の変化に対応して電位差が変化しない位置（ここでは、き裂中央から 100 mm 離れた板端部）での値である。この整理法では、 $L=100$ mm で $V/V_0, L=100=1.0$ となり、このままでは、き裂の無い場合の電位差分布の影響が現れ、き裂形状解析への適用がむずかしい。このため、電位差比 V/V_0 の分母 V_0 値をき裂が無い場合の各計測位置での値を使用する整理法を実施する。この整理法によって Fig. 6 の再整理を行ったものが Fig. 7 である。Fig. 6 と比較すると、 $L=30\sim 100$ mm 間のバックグラウンド的な電位差比が除かれ、き裂深さ a 、き裂長さ c に比例した分布となっている。ここで注意を要する点は、この整理法によれば Fig. 7 の下側に示したき裂形状と対比するとわかるようにき裂表面長さ c の位置での電位差比が 1.0 にならないことである。き裂表面長さ c の位置（き裂深さ $a=0.0$ mm に相当）を一点鎖線で結ぶ

Fig. 6. Distribution of electrical potential ratio ($a/c=0.500$).

Fig. 7. Distribution of electrical potential ratio ($a/c=0.500$).

と図中の $a=0.0$ mm と印した曲線となる。

アスペクト比 $a/c=1.000$, 0.250 , 0.125 の 3 種類のき裂に対する電位差比分布を Fig. 8~10 に示す。き裂のアスペクト比が小さくなるにつれて電位差比分布の形は台形状分布となる。また、き裂深さ a が等しくともアスペクト比が小さいもののほどき裂面積が大きいため電位差比は増大する。これらの分布の実測の可能性については、低合金鋼を使用して解析モデルと同形状（アスペクト比 $a/c=0.50$ のもの）の試験片を用い実験的に検討すると入力電流 30A でき裂最深点で

Fig. 8. Distribution of electrical potential ratio ($a/c=1.000$).

Fig. 9. Distribution of electrical potential ratio ($a/c=0.250$).

Fig. 10. Distribution of electrical potential ratio ($a/c=0.125$).

$0.8 \mu\text{V}/\text{mm}$ の精度となっており、現有の測定器能力で十分可能と思われる。以上の解析結果からき裂形状の推定法として次節の方法を提案する。

なお、今回の解析に使用した要素分割は、経験的なものではあるが、解析結果のポテンシャル分布の連続性および使用している要素が高次のアイソパラメトリック要素であることを考え合せると分割は、妥当なものと考えられる。

5 き裂形状推定法

実機に発生するき裂の形状を近似的にだ円形と考えると、ここで提案するき裂形状の推定法も、き裂の表面長さ c とき裂深さ a の両者を求めることに帰する。

Fig. 7 にアスペクト比 $a/c=0.500$ を一定として、き裂深さを変化させた場合のき裂形状と電位差比分布を対応させて示してあるが、Fig. 11 に示すようにき裂の表面長さ c に対応する位置 ($a=0.0$ mm) で電位差分布を分割すると、分割された領域の面積間に定量的な関係が成立することが判明した。Fig. 11 に電位差比分布の模式図を示すが、図中の面積 P_1 と P_2 の間に次式の関係が得られた。

$$\frac{P_1}{P_1+P_2} \times 100 \approx 95 \quad (\%) \quad (9)$$

また、 $a/c=0.500, 0.250$ のケースでは、Fig. 11 の

Fig. 11. Relation between crack length c and distribution of electrical potential ratio.

L_1 (き裂表面長さ), L_2 の関係として次式が得られた。

$$\frac{L_1}{L_1+L_2} \approx \frac{2}{3} \quad (10)$$

式(10)は、 $a/c=1.000$ の半円に近いき裂では誤差が大きく適用できない。具体的な推定は、き裂中央部から板幅方向に数箇所電位差を計測し、Fig. 11 に示す分布図を作成する。この図から、式(10)を用いてき裂表面長さ c を簡便的に決定し、式(9)により詳細な寸法を決定する。式(10)は簡便的に表面長さ c を決定することができるが先に述べた適用限界を十分に考慮する必要がある。

なお、この L_2 は漸近線となる傾向があるが本評価法のようにき裂の無い状態での各位置の基準電位 V_0 を使用して電位差比 V/V_0 を求めると Fig. 7~Fig. 10 に示すように漸近線的な傾向を減ずることができるものとする。

以上の手法よりき裂の表面長さ c を評価することができる。また、もし目視可能な場合は当然正確な表面き裂寸法 c を測定することが可能である。

つぎにき裂深さ a の推定に対しては、以下に示す二つの方法を提案する。

第1の方法は、実機に発生する表面き裂をだ円形と仮定し、その深さ a をき裂面積比と電位差比の関係より求めようとするものである。Fig. 12 は、縦軸にき

Fig. 12. Relation between crack area ratio S/S_0 and electrical potential ratio.

Fig. 13. Distribution of normalized electrical potential ratio.

Fig. 14. Relation between aspect ratio and normalized electrical potential ratio.

裂中央部の電位差比，横軸は全断面面積とき裂面積の割合 S/S_0 をとったものである。この図よりき裂面積を決定し，先に求めたき裂表面長さ c を用いて次式より a を求める。

$$S = (\pi \cdot a \cdot c) / 4 \quad (11)$$

ここで， S はき裂面積を表す。

第2の方法は，き裂をだ円形と近似した場合のアスペクト比 a/c を決定し，先に求めたき裂表面長さ c よりき裂深さ a を求める。このアスペクト比 a/c は，

Fig. 13 に示す無次元量の関係より決定する。Fig. 13 の縦軸はき裂中央 $L=0$ における電位差比 $(V/V_0)_{L=0}$ とき裂表面長さ c の位置での電位差比 $(V/V_0)_{L=c}$ を用いて無次元化した電位差 $(V/V_0 - V/V_{0,L=c}) / (V/V_{0,L=0} - V/V_{0,L=c})$ で，横軸は，き裂の表面長さ c で無次元化した距離 L/c である。この図から，アスペクト比 a/c が小さくなるにつれて無次元化電位差比は凸の形状となり，アスペクト比間で分布形状に明りょうな違いが見られる。この関係を $L/c=0.25, 0.50, 0.75$ の各位置で整理すると Fig. 14 に示す関係となる。 $L/c=0.50$ での変化が最も大きく，したがって，これをマスターカーブとして使用し， a/c を決定する。

第1の方法は，実機では，断面を正確に評価できない場合もあるため，第2の方法が多くの場合有効と思われる。

6 結 言

表面き裂のアスペクトおよびき裂深さが種々に異なるき裂に対して，電気ポテンシャル法を用いた形状検出の可能性を有限要素法を用いて検討した結果，無次元化電位差比を導入することによって形状決定の可能性が大となった。今後，実験的検証による精度向上を計りたい。実験における電位差の検出精度も，相澤，矢川らによって高精度検出法が検討されており著者らも実験法の高精度化をめざすものである。

(昭和56年10月2日 第1回破壊力学シンポジウムにて講演)

参 考 文 献

- 1) 第4回破壊力学部門委員会資料，p.12 (1978).
- 2) 小林英男，“破壊力学の実際問題への応用”，p.17 (1981).
- 3) 林 真琴，坂田信二，清水 翼，第18回X線材料強度に関するシンポジウム前刷，p.125 (1981).
- 4) 相澤龍彦，矢川元基，第1回破壊力学シンポジウム講演論文集，p.106 (1981).