二次元モデルによる粉体層のせん断機構の研究[†]

原 隆 一* 宇都宮弘行** 梅 屋 薫*

Shear Mechanism of Powder Bed by Two-Dimensional Model

by

Ryuichi HARA

(Faculty of Engineering, Tohoku University, Sendai)

Hiroyuki UTSUNOMIYA

(Ube Industries Ltd., Ube)

and Kaoru UMEYA

(Faculty of Engineering, Tohoku University, Sendai)

A two-dimensional model of granular materials was made by using polyurethane rods, which are utilized as a photoelastic material. Simple shear tests on the model beds were carried out in order to observe microscopic internal mechanisms. The rotation angle (α) of particles, the contact angle (θ) of contact points, interparticle forces (f) and their inclination angles (δ) were detected at a constant interval of shear strain (γ). The interaction between adjacent particles was calculated from the observed results, and the changes of contact direction ($\Delta\theta/\Delta\gamma$), sliding movements ($\Delta\psi/\Delta\gamma$) and rolling movements ($\Delta\phi/\Delta\gamma$) at contact points were obtained. Their statistical values (the average and standard deviation) were investigated. It was found that these values depended on the contact angle as well as on the interparticle force. The interaction between particles became remarkable with increasing shear strain. Therefore, the number of contact points in a special direction increased remarkably during the early stage of shear, and then, it decreased slightly during the steady state of shear. The stress-strain relation was calculated from the microscopic behavior, and was in good agreement with the experimental one.

(Received Jan. 5, 1982)

キー・ワード：粉体，せん断試験，二次元モデル，光弾性解析

1 緒 言

粉粒体を取り扱う単位操作の設計のために，充てん層をせん断することによって破壊包絡線や内部摩擦係数を求めることが必要である。従来より，数多くの実験結果が報告されているが，充てん層全体の力学的挙動（巨視的挙動）がどのような内部機構（微視的挙動）に起因するものかという点については，推定に留っており，今日なお不明な点が多い。これは，充てん層をせん断する際に，個々の粒子の運動や粒子間相互作用などの微視的挙動を観察することができないことによるものである。この点を解決するために，著者らは，丸棒状試料を充てんした二次元充てん層モデルを直接せん断することによって内部の微視的挙動を観察し，^{1)~3)}巨視的挙動との関連性を究明した結果を既に報告した。

二次元充てん層モデルを用いた類似の研究は，Dantsu,⁴⁾ Rowe, 松岡, 小田, 小西らによって行われており，粒子間接触方向の分布，光弾性解析による粒子間力の検討等について報告されている。しかし，不連続体の変形機構として最も重要な粒子間相互作用，すなわち，接触点におけるすべり，ころがり，接触方向変化，粒子の回転等については検討されていない。

本論文では，前報の²⁾³⁾実験法を踏襲し，二次元充てん層モデルの単純せん断における内部の微視的挙動を，光弾性解析を併用して観察し，粒子間力とその方向，粒子の接触方向，粒子の回転等の経時変化を測定した。これらより，(1)隣接二粒子の接触方向の分布による充てん状態の検討，(2)接触方向の変化と，(3)接触点におけるすべりと，(4)接触点におけるころがりとに及ぼす接触方向や粒子間力の影響について検討を行った。なお，充てん層の巨視的挙動は，微視的挙動の統計値から決定されと考えられるので，測定値を統計的に整

† 原稿受理 昭和57年1月5日

* 正 会 員 東北大学工学部 仙台市荒巻字青葉

** 宇都興産(株) 宇都市西本町

理した。また、(5)微視的挙動のデータから巨視的挙動の推算も行った。

2 実験

2.1 試料

二次元モデル粒子として使用した試料は、光弾性解析が可能なポリウレタン製の円柱で、プレポリマー(武田薬品製 L1155)を型内で重合させて作成した。試料の長さは 23 mm, 直径は, 8 mm (7 wt%), 9 mm (26 wt%), 10 mm (35 wt%), 11 mm (24 wt%), 12 mm (8 wt%) の 5 種類で, 粒度分布は対数正規分布とし, かつこ内にその値を示した。各試料の平面には, 回転角測定のための標記を記した。

2.2 実験方法

二次元モデル充てん層の単純せん断を行うために, Fig. 1 (a)に示した装置を用いた。幅 30 cm のわくの間に 20 cm の高さに試料を充てんし, 充てん層を充分かく拌してランダムな状態とした。その後, ピストンを介して一定の圧縮応力 σ をかけ, 下部の台を図示したように右側へ押すことによって単純せん断を行い, せん断応力 τ と充てん層の体積ひずみ ϵ_v とのせん断ひずみ γ による変化を測定した。充てん層の前後には, Fig. 1 (b)に示したように, 光弾性解析装置一式を配列し, 一定せん断ひずみごとに, ストロボスコープと連動させた望遠レンズ付きカメラで等色線模様を撮影した。

Fig. 1. Apparatus for the simple shear test of the two-dimensional model.

2.3 解析方法

せん断ひずみ $\gamma=0\sim0.2$ の範囲において, $\Delta\gamma=0.025$ おきに撮影した写真を用いて解析を行った。充てん層内の全粒子数は約 500 個であるが, その運動が制約される壁面近傍の粒子を除いて, 約 300 個の粒子 (約 700

Fig. 2. (a); Definitions of a rotation angle (α), a contact angle (θ), a interparticle force (f) and its inclination angle (δ). (b); Interparticle forces for calculation of τ/σ .

個の接点) について, 次の四つの値の変化を測定した。すなわち, Fig. 2 (a)に示したように, 粒子については, (1)回転角 α を測定し, 接点については, (2)接点に立てた法線と垂直線の交角である接点角 θ , (3)粒子間力に比例するしま次数 f , (4)法線と粒子間力との交角 δ を測定した。なお, Fig. 2 (a)には, これらの値の符号も示した。これらの値は, 計算機 (FACOM 230 OSII) によって処理した。

3 結果および考察

3.1 充てん層全体の力学的挙動 (巨視的挙動)

Fig. 3 に, せん断応力 τ と圧縮応力 σ との応力比 τ/σ のせん断ひずみ γ による変化と, 体積ひずみ ϵ_v の γ による変化を示した。これらの関係は σ を変化させてもほとんど同一であった。実験条件は同図中に示し, 実測値は実線で示した。丸印の番号は, 写真撮影位置を示している。1~5 ($\gamma=0\sim0.1$) がせん断応力が増加してゆく過程を, 5~9 ($\gamma=0.1\sim0.2$) がせん断応力がほぼ一定となる定常過程を示している。 ϵ_v は, せん断初期を除いて増加し, 空げき量が増すことを示

Fig. 3. Stress ratio (τ/σ)-shear strain (γ) relationship and volumetric strain (ϵ_v)-shear strain (γ) relationship. A dotted line shows the calculated result of τ/σ .

*1 本実験では, 空げき率 $n=0.17$ とは一定であるが, 充てん時の空げき率を変化させるとこれらの関係も変化する。

している。破線で示した τ/σ の値は、写真から求めた f , θ , δ を用いて、式(1)より計算したものである。

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i \sin(\theta_i + \delta_i)}{\sum_{i=1}^k f_i \cos(\theta_i + \delta_i)} \quad (1)$$

式(1)は、Fig. 2 (b)に示したような各粒子間力 f_i の水平成分と垂直成分の各々の総和の比が、 τ/σ に一致することを示している。なお、ここではしま次数を粒子間力として代用した。

τ/σ の計算値は、実測値とおおむね一致はしているが、両者の差異は、解析から省いた壁面近傍の粒子の影響によるものと考えられる。

3・2 充てん構造の変化（微視的挙動-1）

Fig. 4 (a)~(c)に、任意のせん断ひずみ γ における接点角 θ の接触点数の分率 $E(\theta)$ を、 10° 間隔のロゼットダイアグラムで示した。せん断前には、Fig. 4 (a)に示したように、ほぼ円形の分布であったものが、(b), (c)とせん断が進むにつれてだ円形に変化し、最大主応力方向付近 ($\theta \doteq 45^\circ$) で接触点が増加し、最小主応力方向付近 ($\theta \doteq -45^\circ$) で減少した。この傾向を数値的に示すため、集中度 M と集中方向 ϕ を式(2), (3)によって求め、Fig. 4 (d)に示した。

Fig. 4. (a)~(c); The distribution of contact angles θ . (d); Vector magnitude (M) and vectormean direction (ϕ) of distribution of contact angles.

$$M = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{18} E(\theta_i) \sin 2\theta_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{18} E(\theta_i) \cos 2\theta_i \right)^2} \quad (2)$$

$$\phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^{18} E(\theta_i) \sin 2\theta_i}{\sum_{i=1}^{18} E(\theta_i) \cos 2\theta_i} \right) \quad (3)$$

ここで、 θ_i は、 $-90^\circ \sim 90^\circ$ の範囲の θ を 10° 間隔に 18等分したときの各区画の中央値を示す。 M の値は、分布の形がだ円形にひずむほど大きくなる。これより、

せん断に伴って最大主応力方向に集中度が増し、せん断変形に抵抗する異方的な充てん構造が形成されるが、せん断応力が定常値を示す $\gamma=0.1$ (プロット 5) 以降は、むしろ集中度 M が減少することがわかる。これは、せん断が進むに従って空けきが増加し、粒子の運動が活発になるために、再び円形の分布に近付こうとするもので、後述するような二粒子間の相互作用の増加と関連する内容である。

以上の結果と類似する結果が砂のような非球形粒子充てん層についても得られており、二次元モデルから観察される粒子間相互作用が、三次元の系でも成立することを示唆しているといえよう。

3・3 粒子間の接触方向変化、すべり、ころがりの定義

接点角 θ と粒子間力 (しま次数) f とは、任意のせん断ひずみ γ における充てん構造に関する情報である。この充てん構造は、次のせん断変位 $\gamma + \Delta\gamma$ までに、接触方向の変化、すべり、ころがりなどの粒子間相互作用を伴って変化し、次の新しい充てん構造に変化する。このとき、 γ における充てん構造は、ひずみ増分 $\Delta\gamma$ の間に起る粒子間相互作用に影響を及ぼすと考えられる。この内容を検討するために、以下のように、粒子間の接触方向の変化 $\Delta\theta/\Delta\gamma$ 、すべり $\Delta\psi/\Delta\gamma$ 、ころがり $\Delta\rho/\Delta\gamma$ について定義した。

Fig. 5 に接触二粒子の関係を示した。せん断ひずみ γ において破線円で示した位置にある粒子 2 は、 $\Delta\gamma$ の間に粒子 1 に対して ($-\Delta\theta$) だけ接触方向を変え、 $\gamma + \Delta\gamma$ において $2'$ で示した位置に移るとする。この間に粒子 1, 2 は、それぞれ $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$ 回転するとする。粒子 1 および 2 の表面上で接触位置が移った角度 $\Delta\rho_1$, $\Delta\rho_2$ は、円周上の太い矢印で示され、幾何学的関係から、式(4)で表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta\rho_1 &= (-\Delta\theta) - \Delta\alpha_1 \\ \Delta\rho_2 &= (-\Delta\theta) - \Delta\alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

さらに式(5)で示した両者の和 $\Delta\psi$ は、接触点におい

Fig. 5. The interaction between adjacent particles.

*2 本報告では、付着力の無い粒子を対象としているが、付着性微粉体を対象とする場合は、架構構造に参加する多粒子の関係を検討する必要がある。

てすべった角度を表し, Fig. 5 に矢印で示した.*3

$$\Delta\psi = \Delta\rho_1 + \Delta\rho_2 = 2(-\Delta\theta) - \Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_2 \quad (5)$$

Fig. 5 の場合は, $\Delta\rho_1$ が接点においてころがった角度であるとみなすことができるが, 種々の $\Delta\theta$, $\Delta\alpha$ の場合を考慮して, $\Delta\rho_1$ および $\Delta\rho_2$ をそれぞれ接点におけるころがりの角度 $\Delta\rho$ と定義した.*4 接触二粒子の粒径が異なる場合の $\Delta\psi$, $\Delta\rho$ の値は, すべて直径 1 cm の粒子同志の接触の場合に換算した.*5

以上のようにして, 各接点で求められた値は, せん断ひずみ γ に対する変化率 $\Delta\theta/\Delta\gamma$, $\Delta\psi/\Delta\gamma$, $\Delta\rho/\Delta\gamma$ で表し, これらの値の母集団について以下のように整理した. すなわち, 任意の接点角 θ_i ($\theta_i - 5^\circ \sim \theta_i + 5^\circ$ の範囲) または任意のしま次数 f_i ($f_i - 1 \sim f_i + 1$ の範囲) における $\Delta\theta/\Delta\gamma$, $\Delta\psi/\Delta\gamma$, $\Delta\rho/\Delta\gamma$ の集団それぞれについて, 平均値 A と標準偏差 D とを求め, これらの値の接点角依存性ならびにしま次数依存性を検討した. A および D の表示法は Table I にまとめた. 一例を上げると, 接点角 θ における $\Delta\psi/\Delta\gamma$ の平均値を $A_{\theta\theta}$ と表示した.

Table I. The notation of the average and the standard deviation of three incremental variables depending two instantaneous variables.

Incremental variable	Change of contact angle ($\Delta\theta/\Delta\gamma$)		Sliding ($\Delta\psi/\Delta\gamma$)		Rolling ($\Delta\rho/\Delta\gamma$)	
	Aver.	Devi.	Aver.	Devi.	Aver.	Devi.
Instantaneous variable						
Contact angle (θ)	$A_{\theta\theta}$ ○	$D_{\theta\theta}$ ×	$A_{\psi\theta}$ ○	$D_{\psi\theta}$ ×	$A_{\rho\theta}$ △	$D_{\rho\theta}$ ×
Interparticle force (f)	$A_{\theta f}$ ×	$D_{\theta f}$ ×	$A_{\psi f}$ ×	$D_{\psi f}$ ○	$A_{\rho f}$ ×	$D_{\rho f}$ ×
Shear strain (γ)	×	△	×	△	×	○

Their dependences are indicated by signs ○ (remarkable dependence), △ (slight dependence) and × (independence).

3・4 接触方向の変化 $\Delta\theta/\Delta\gamma$ (微視的挙動-2)

Fig. 6 に, 任意の接点角の範囲 ($\theta_i \pm 5^\circ$) 内にある接点について求めた $\Delta\theta/\Delta\gamma$ の値のヒストグラムの例を示した. この結果より, 式(6), (7)を用いて平均値 $(A_{\theta\theta})_i$ および標準偏差 $(D_{\theta\theta})_i$ を計算し, 図中に示した.

$$(A_{\theta\theta})_i = \frac{\sum_{k=1}^{N_i} (\Delta\theta/\Delta\gamma)_k}{N_i} \quad (6)$$

*3 Fig. 5 の例では, $\Delta\rho_1$ と $\Delta\rho_2$ とは逆符号の関係にあるので, $\Delta\psi$ は差として表示されている.

*4 $\Delta\rho$ はすべりの内容も含んでいるが, 厳密なころがりの角度を定義することはできないので, 本文のように定義した.

*5 $\Delta\theta/\Delta\gamma$, $\Delta\psi/\Delta\gamma$, $\Delta\rho/\Delta\gamma$ の単位は, radian で表した. これらの値の符号は, Fig. 5 の例に示したもので, $\Delta\theta < 0$, $\Delta\psi > 0$, $\Delta\rho_1 > 0$, $\Delta\rho_2 < 0$ となる. また, 写真撮影の間隔は, $\Delta\gamma = 0.025$ と小さいので, この間に生ずる不規則な変化, 例えばすべり方向の逆転等は, 少ないと考えた.

Fig. 6. Examples of the histogram of $(\Delta\theta/\Delta\gamma)$.

Fig. 7. Dependence of $A_{\theta\theta}$ and $D_{\theta\theta}$ on the contact angle θ .

$$(D_{\theta\theta})_i = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N_i} (\Delta\theta/\Delta\gamma)_k^2 - N_i (A_{\theta\theta})_i^2}{N_i}} \quad (7)$$

ここで, N_i は $\theta_i \pm 5^\circ$ の範囲内にある接点の総数, k は接点の番号を示す. 求められた $(A_{\theta\theta})_{i=1-18}$ と $(D_{\theta\theta})_{i=1-18}$ との接点角 $\theta_{i=1-18}$ に対する依存性を, Fig. 7 に示した. パラメータは, せん断ひずみ γ である. 後述する Fig. 8~Fig. 12 の結果は, Fig. 7 と同様の手法によって求め, 同様の表示をした. $A_{\theta\theta}$ の値は, 各せん断ひずみにおいて $\theta = \pm 90^\circ$ 付近で 0 となり, $\theta = 15^\circ$ 付近で最小値を示した. 単純せん断の場合, $\Delta\gamma$ に伴う系の回転は $\Delta\gamma/2$ であり, 全 $A_{\theta\theta}$ の平均値 $\bar{A}_{\theta\theta}$ とは, $-\bar{A}_{\theta\theta} = \Delta\gamma/2/\Delta\gamma \doteq 0.5$ の関係がある. したがって極大値 ($\theta \pm 90^\circ$) と極小値 ($\theta \pm 15^\circ$) とは, 回転の成分を差引いた場合, 最も接触方向変化が著しく, 二つのすべり面の方向に近い.

$D_{\theta\theta}$ の値は, θ に対して明りょうな依存性を示さないが, せん断ひずみが大きくなるにつれて増加する傾向がある. すなわち接触方向が著しく変化する接点数が増すことがわかる.

Fig. 8 には, $\Delta\theta/\Delta\gamma$ の平均値 $A_{\theta f}$ と標準偏差 $D_{\theta f}$ のしま次数 f に対する変化を示した. パラメータはせ

Fig. 8. Dependences of $A_{\theta f}$ and $D_{\theta f}$ on the fringe order (interparticle force) f .

ん断ひずみ γ である。 $A_{\theta f}$ は, Fig. 7 と同様 -0.5 rad 付近の値を示し, γ と f に対する依存性はほとんどみられない。 $D_{\theta f}$ は, f に対する依存性は示さないが, γ に対する依存性を示すことは Fig. 7 と同様である。これらの結果は, 依存性が明りょうに認められるもの (○), わずかな依存性があるもの (△), 依存性が認められないもの (×) として, Table I にまとめた。後述の結果に対しても同様である。

3・5 接触点における すべり $\Delta\psi/\Delta\gamma$ (微視的挙動-3)

式(5)を用いて求めた接触粒子間のすべり $\Delta\psi$ を, Fig. 7 と同様な方法で整理した結果を Fig. 9 に示した。 $\Delta\psi/\Delta\gamma$ の平均値 $A_{\psi\theta}$ は, $\theta = 0^\circ$ 付近で極大, $\theta = -60^\circ$ 付近で極小となった。全平均値 $\bar{A}_{\psi\theta}$ はほぼ 0 であり, $\Delta\psi > 0$ のすべり (Fig. 5 の例に示したすべり) と $\Delta\psi < 0$ のすべりが同量起っていることがわかる。Fig. 9 の極大, 極小は, Fig. 7 の極小, 極大にそれぞれ対応するが, 両者の位置には若干の相異がみられた。すなわち, 粒子間で接触方向が変化しやすい方向と,

Fig. 9. Dependences of $A_{\psi\theta}$ and $D_{\psi\theta}$ on the contact angle θ .

Fig. 10. Dependences of $A_{\phi f}$ and $D_{\phi f}$ on the fringe order (interparticle force) f .

すべりやすい方向とは, 異っていることがわかる。 $\Delta\psi/\Delta\gamma$ の標準偏差 $D_{\psi\theta}$ は, θ に対する依存性は明りょうではなかった。

Fig. 10 には, Fig. 8 と同様にして求めた $\Delta\psi/\Delta\gamma$ の平均値 $A_{\phi f}$ と標準偏差 $D_{\phi f}$ とのしま次数 f に対する変化を示した。 $A_{\phi f}$ は, f および γ に対して依存性を示さないが, $D_{\phi f}$ は, f および γ に対して依存性を示し, 粒子間力が大きな接触点ではすべらなくなること, γ が大きくなると全体的にすべりが活発になることがわかる。せん断が進み τ が定常値を示すようになると, 粒子間の空けき量は更に多くなり (Fig. 3), 接触方向変化が著しくなり (Fig. 7, 8), すべりが多くなる (Fig. 9, 10) ために, 集中度 M が減少 (Fig. 4) するものと考えられる。

3・6 接触点におけるころがり $\Delta\rho/\Delta\gamma$ (微視的挙動-4)

式(4)を用いて求めた接触粒子間のころがり $\Delta\rho$ を, Fig. 7 と同様な方法で整理した結果を Fig. 11 に示した。 $\Delta\rho/\Delta\gamma$ の平均値 $A_{\rho\theta}$ は, $A_{\psi\theta}$ と類似する結果で

Fig. 11. Dependences of $A_{\rho\theta}$ and $D_{\rho\theta}$ on the contact angle θ .

Fig. 12. Dependences of $A_{\rho f}$ and $D_{\rho f}$ on the fringe order (interparticle force) f .

あった。 $\Delta\rho/\Delta r$ の標準偏差 $D_{\rho\theta}$ は、 $D_{\phi\theta}$ と同様 θ に対する依存性は明りょうではないが、 r が増加すると $D_{\rho\theta}$ は増加した。この内容は、Fig. 12にも示されており、 $D_{\rho f}$ は r が増加すると増加した。また、 f が増加すると $D_{\phi f}$ は著しく減少するのに対し、 $D_{\rho f}$ はわずかしき減少しなかった。すなわち、架橋構造に加わっているような粒子間力の大きな接触点では、すべらずにころがっていることを示している。

以上述べた 3・4～3・6 節の結果は、Table I にまとめて示した。主要な点は、(1) $A_{\theta\theta}$ 、 $A_{\phi\theta}$ 、 $A_{\rho\theta}$ は θ 依存性があるが、 $D_{\theta\theta}$ 、 $D_{\phi\theta}$ 、 $D_{\rho f}$ は θ 依存性を示さないこと、(2) $D_{\phi f}$ のみが f 依存性を示し、 $D_{\rho f}$ は f 依存性を示さないこと、(3) いずれの平均値 A も r 依存性を示さないが、標準偏差 D は r 依存性を示すことである。

4 結 論

二次元充てん層モデルを単純せん断し、光弾性解析法を用いて微視的挙動を観察した結果、次の結論を得た。

(1) 微視的挙動の測定値（粒子間力 f とその傾き δ 、接点角 θ ）から、巨視的挙動である応力比 τ/σ を計算した結果、実測値と一致した。

(2) 接点角 θ の分布 $E(\theta)$ から、せん断中の充てん構造の変化を知ることができた。

(3) 粒子間の接触方向変化 $\Delta\theta/\Delta r$ 、すべり $\Delta\phi/\Delta r$ 、ころがり $\Delta\rho/\Delta r$ などの粒子間相互作用は、接点角 θ 、粒子間力 f 、せん断ひずみ r によって変化することが統計的に検証された。

(4) θ の値によって粒子間相互作用が異り、接触方向変化の著しい方向と、すべりやころがりの著しい方向とは異なる。

(5) f の大きな接触点では、架橋構造の変化に伴うころがりが起りやすい。

(6) r が大きくなると、各粒子間相互作用は著しくなり、充てん構造の異方性に影響を与える。

参 考 文 献

- 1) 梅屋 薫, 北森信之, 原 隆一, 吉田達郎, 材料, **18**, 489 (1969).
- 2) K. Umeya, R. Hara and J. Kikuta, J. Chem. Eng. Japan, **8**, 56 (1975).
- 3) K. Umeya and R. Hara, Technol. Rep., Tohoku Univ., **43**, 111 (1978).
- 4) P. Dantsu, Geotechnique, **18**, 50 (1968).
- 5) P. W. Rowe, Proc. Roy. Soc. London, **A269**, 500 (1962).
- 6) H. Matsuoka and K. Takeda, Soils Foundations, **14**, No. 1, 29 (1974); **20**, No. 3, 45 (1980).
- 7) M. Oda and J. Konishi, Soils Foundations, **14**, No. 1, 13 (1974); **14**, No. 3, 83 (1974); **14**, No. 4, 25 (1974); **14**, No. 4, 39 (1974).