飽和加工硬化性の弾塑性物質の組合せ負荷および押出し†

坂 口 尚 志*

Complex Loading and Extrusion of a Elasto-Plastic Material
with Saturating Work-Hardening

by

Takashi SAKAGUCHI

(Kobe Steel, Ltd., Kobe)

The constitutive equations of elasto-plastic materials with saturating work-hardening are incorporated into the finite element method. Two problems, that is, the complex loading with abruptly-changing strain paths and the metal extrusion are numerically solved. For the complex loading, the stress variations along strain paths are obtained which are consistent with the experimental results. The extrusion process is calculated until the steady state is attained and the stress fields in this state are obtained. The residual stress field seems to show the possibility of the surface or internal cracks. For these calculations, the Bauschinger effect and the saturating work-hardening are taken into consideration, which enables more accurate stress analysis by the finite element method.

(Received Mar. 30, 1982)

キー・ワード：弾塑性物質，有限変形，有限要素法，飽和加工硬化

1 緒 言

近年，有限な変形を伴う弾塑性境界値問題に対して，有限要素法がさかんに用いられるようになった。そして，有限変形や非線型問題の解法上の手法についてもさまざまな方法が提案されている。有限要素法に関する計算手法が発達し，実際の問題に適用されている一方，弾塑性物質の挙動を表現する構成式については，依然として Huber-von Mises の降伏条件と等方加工硬化のみを仮定したごく単純化された関係が採用されている場合が多い。その場合，Bauschinger 効果や極限荷重を表現しえないため，有限変形における局所的除荷や繰返し負荷，複雑なひずみ経路などを伴う問題については，かなり大きな誤差を生じる可能性がある。特に，繰返し負荷をうける場合の応力解析や，塑性加工における残留応力の評価などに，そのような単純化された構成式を用いることは不適當である。

さて筆者は第1報で，Tokuda^{1,2)}によって導入された結合加工硬化をもつ Prandtl-Reuss 型塑性物質に修正を加え，飽和加工硬化性の弾塑性物質の構成式を提案した。そして，この構成式が Bauschinger 効果や加工硬化の飽和現象を適切に表現でき，現実の物質

の挙動にもよく一致することを示した。

本報では，この構成式を用いることによって，より正確な有限要素解析を行うことを目的とする。その際，有限変形問題に対する有限要素法の定式化には，Hill³⁾の速度型変分原理に基づいて McMeeking と Rice⁴⁾が導いた形を採用する。これは変形過程の各瞬間の状態を基準状態として選ぶ方法(Updated Lagrange 法)であり，ここで用いるような速度型構成式と組合せることができる。この方法により，アルミニウム合金 (Al 5056-O) を想定して，ひずみ経路の変更を伴う組合せ負荷および押出し過程の計算を行う。

2 仮想仕事の原理および

有限要素式の定式化

ここでは，有限な弾塑性変形に適用できる仮想仕事の原理から，有限要素式の定式化までを簡単に述べる。以下で用いる記号の定義は次のとおりである。

 $\mathbf{x}$ ：流通配置での物体粒子の位置ベクトル $\mathbf{X}$ ：基準配置での物体粒子の位置ベクトル $\mathbf{v}$ ：粒子の速度ベクトル

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} : \text{変形こう配} \quad (1)$$

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} : \text{速度こう配} \quad (2)$$

 $\mathbf{D}$ ：ストレッチング (速度こう配の対称部分)

† 本報を「飽和加工硬化性の弾塑性物質 (第2報)」(Elasto-Plastic Materials with Saturating Work-Hardening, II) とする。

原稿受理 昭和57年3月30日

* 正 会 員 (株)神戸製鋼所 神戸市中央区協阪町

$\mathbf{W}$: スピンテンソル (速度こう配の反対称部分)

$J = \det \mathbf{F}$: 変形こう配のヤコビアン (3)

$\mathbf{T}$: Cauchy の応力テンソル

$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}$: 第1 Piola-Kirchhoff 応力テンソル (4)

$\mathbf{II} = J\mathbf{T}$: Kirchhoff 応力テンソル (5)

まず Hill³⁾に基づき, 速度型仮想仕事の原理は

$$\int_{V_0} \dot{S}_{Kk} \delta \left(\frac{\partial v_k}{\partial X_K} \right) dV_0 = \int_{A_0} \dot{f}_k \delta v_k dA_0 + \int_{V_0} \dot{b}_k \delta v_k dV_0 \quad (6)$$

と表現することができる。ただし, 記号 $\dot{}$ は時間微分を表し, また同一の項の中で二度繰返された添字については和の規約を適用する。 V_0 および A_0 は, それぞれ考えている物体領域の基準配置での体積および表面積である。基準配置で法線ベクトル $\mathbf{N}^0$ をもつ面の単位面積あたりにはたらく外力ベクトルを $\mathbf{f}$ とすると, このとき $f_k = N_0^0 S_{Kk}$ の関係がある。 $\mathbf{b}$ は基準配置の単位体積あたりの物体力である。 $\delta \mathbf{v}$ は速度の変分であり, $\mathbf{v}$ が与えられる境界上 A_v では0となる。また, 残りの境界 $A_0 - A_v$ 上では $\dot{\mathbf{f}}$ が境界条件として与えられる。

さて, 式(6)において基準配置として現在の流通配置をとり, 関係(4), (5)および $\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$ などを用いると, 式(6)の左辺は

$$\int_A [\dot{II}_{ij} - (T_{ik} D_{kj} + D_{ik} T_{kj}) + T_{ik} L_{jk}] \delta L_{ji} dV \quad (7)$$

となる。ここで記号 $\dot{}$ は共回転時間微分を表し,

$$\dot{II}_{ij} = \dot{II}_{ij} - W_{ik} II_{kj} + II_{ik} W_{kj} \quad (8)$$

である。式(7)より式(5)は次の形にかける。

$$\begin{aligned} \int_V [\dot{II}_{ij} \delta D_{ij} - T_{ij} (2D_{kj} \delta D_{ik} - L_{kj} \delta L_{ki})] dV \\ = \int_A \dot{f}_k \delta v_k dA + \int_V \dot{b}_k \delta v_k dV \end{aligned} \quad (9)$$

ただし, V , A はそれぞれ流通配置での体積および表面積を表す。なお式(9)までのくわしい導出については Lee⁴⁾を参照されたい。

つぎに式(9)に基づいて有限要素の剛性方程式を導く。考えている物体領域を有限個の要素に分割し, 各要素内の速度ベクトル場 $\{\mathbf{v}\}$ を, その要素境界上の速度ベクトル $\{\mathbf{v}_N\}$ および形状関数 $[\mathbf{N}]$ によって

$$\{\mathbf{v}\} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{v}_N\} \quad (10)$$

と表す。式(10)および(2)を用いると, 速度こう配およびストレッチングはそれぞれ

$$L_{ij} = [M_{ij}]\{\mathbf{v}_N\}, \quad D_{ij} = [B_{ij}]\{\mathbf{v}_N\} \quad (11)$$

とかける。ただし

$$[M_{ij}] = \frac{\partial [N_i]}{\partial x_j}, \quad [B_{ij}] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial [N_i]}{\partial x_j} + \frac{\partial [N_j]}{\partial x_i} \right) \quad (12)$$

であり, $[N_i]$ は $[\mathbf{N}]$ の第 i 行を表す。

つぎに $\dot{II}_{ij}$ については関係(5)を用いて

$$\begin{aligned} \dot{II}_{ij} &= \dot{T}_{ij} + T_{ij} D_{mm} \\ &= C_{ijkl} D_{kl} + T_{ij} D_{mm} \end{aligned} \quad (13)$$

となる。ただし $\dot{T}_{ij} = C_{ijkl} D_{kl}$ は共回転応力速度とストレッチングの関係を与える構成式である。さて, 式(13)の右辺の二つの項の大きさを比較してみよう。弾性的な負荷および除荷の状態では係数 $\mathbf{C}$ が弾性定数程度の大きさであるのに対し, 主に金属では応力 T_{ij} は一般にその $10^{-3} \sim 10^{-4}$ 倍である。一方, 塑性変形が大きくなると, $\mathbf{C}$ と T_{ij} の大きさは同じ程度になりうるが, この場合には $|D_{kl}| \gg |D_{mm}|$ が成り立つ。したがって, 式(13)の右辺第2項は第1項に比べて十分小さいと考えることができそれを無視することができる。また, この項を省略することにより, 有限要素の剛性マトリックスが対称性をもち計算が容易になるという利点^{4,5)}が得られる。

式(9)に(10), (11)および右辺第2項を省略した式(13)を代入すると

$$\left(\int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] dV + [\mathbf{k}_s] \right) \{\mathbf{v}_N\} = \{\dot{\mathbf{P}}\} \quad (14)$$

を得る。ここで

$$[\mathbf{k}_s] = \int_V ([M_{ki}]^T T_{ij} [M_{kj}] - 2[B_{ik}]^T T_{ij} [B_{kj}]) dV \quad (15)$$

$$\{\dot{\mathbf{P}}\} = \int_A [\mathbf{N}]^T \{\dot{\mathbf{f}}\} dA + \int_V [\mathbf{N}]^T \{\dot{\mathbf{b}}\} dV \quad (16)$$

である。式(14)は有限要素の剛性方程式であり, McMeeking と Rice⁴⁾によって定式化されたものである。

3 構成式

式(14)において, 弾塑性物質の構成関係を表す $[\mathbf{C}]$ として従来よく用いられているのは, Huber-Mises の降伏条件を Prandtl-Reuss の構成式に組合せたものである。しかしここでは, より一般的な弾塑性物質の挙動を表現しうる構成式として, Tokuda^{1,2)}によって提案され筆者が修正を加えた形を採用する。^{*}

$\mathbf{C}$ の形は

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - 2\mu \frac{\tilde{T}_{ij}^* \tilde{T}_{kl}^*}{K(\alpha)^2} V(\xi) \quad (17)$$

である。ここで λ , μ は Lamé の弾性定数, δ_{ij} は Kronecker のデルタである。式(17)の右辺の最後の項が塑性の影響を表し, そこでは

$$\tilde{T}_{ij} = T_{ij} - \beta_{ij}, \quad \tilde{T}_{ij}^* = \tilde{T}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{T}_{mm} \quad (18)$$

$$K(\alpha) = K_0 [a_1 - (a_1 - 1) \exp(-a_0 \alpha)] \quad (19)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\tilde{T}_{kl}^* D_{kl}}{2\mu} V(\xi) \quad (20)$$

$$\beta_{ij} = \frac{2\mu c(\eta) \tilde{T}_{ij}^* \tilde{T}_{kl}^* D_{kl}}{K(\alpha)^2} V(\xi) \quad (21)$$

*1 第1報「飽和加工硬化性の弾塑性物質の構成式」を参照されたい。

$$c(\eta) = c_0 \exp(-c_1 \eta^2), \quad \eta = \frac{\sqrt{T_{kl}^* T_{kl}^*}}{K(\alpha)} \quad (22)$$

の関係を用いる。ただし記号*は偏差成分を表す。 α , β_{ij} はそれぞれスカラーおよびテンソル内部変数であり、式(20), (21)はその変化を支配する発展式である。また、式(19), (22)中の定数 K_0 , a_0 , a_1 , c_0 , c_1 は物質によって定まるパラメータであり、初期降伏応力や加工硬化の進行の度合いおよびその制限を表現する。

$V(\xi)$ は Tokuoka^{6,7)}によって提案された遷移関数であり、次式で与えられる。

$$V(\xi) = \frac{1}{1 + \exp(-\kappa \xi)}, \quad \xi = \frac{\tilde{T}_{kl}^* D_{kl}}{K_0 \sqrt{D_{mn} D_{mn}}} \quad (23)$$

この遷移関数により、負荷、中立、除荷の各状態を同一の構成式で連続的にとらえることができ、計算上の利点もある。式(23)中の κ は各状態間の遷移の速さの目安を与えるパラメータである。

なお、構成式の導出については文献1)2)を、物質パラメータについては第1報を参照されたい。

4 計算方法

ここでは実際の増分計算の手法や注意点について述べる。2節で示した速度型仮想仕事の原理は、現在の時刻 t の状態を基準とし増分的に時刻 $t + \Delta t$ の状態を決定するために用いられる。現在の時刻 t での配置を基準配置とし、そこでの応力、内部変数、節点の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{T}(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\mathbf{x}(t)$ とすると、これらの量により式(14)左辺の剛性マトリックスが決定できる。すなわち式(14)は未知量 $\{v_N\}$ に関する連立一次方程式となる。これを解いて $\{v_N\}$ を求めることにより、 $\dot{\mathbf{T}}(t)$, $\alpha(t)$, $\dot{\beta}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ($\equiv \{v_N\}$) などを求めることができる。これにより

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}(t + \Delta t) &= \mathbf{T}(t) + \dot{\mathbf{T}}(t) \Delta t, \\ \alpha(t + \Delta t) &= \alpha(t) + \dot{\alpha}(t) \Delta t, \\ \beta(t + \Delta t) &= \beta(t) + \dot{\beta}(t) \Delta t, \\ \mathbf{x}(t + \Delta t) &= \mathbf{x}(t) + \dot{\mathbf{x}}(t) \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

として時刻 $t + \Delta t$ の状態量を決定する。

応力速度 $\dot{\mathbf{T}}(t)$ を得るためには、各増分段階で得られた $\dot{\mathbf{U}}$ から式(13)の関係などを用いて計算する。2次元の場合には

$$\left[\begin{array}{cc} \dot{T}_{11} & \dot{T}_{12} \\ \dot{T}_{21} & \dot{T}_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \dot{I}_{11} & \dot{I}_{12} \\ \dot{I}_{21} & \dot{I}_{22} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 0 & W_{12} \\ W_{21} & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 0 & W_{12} \\ W_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (25)$$

となり、これより $W_{21} = -W_{12}$ の関係を用いて

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}_{11} &= \dot{I}_{11} + 2W_{12}T_{12}, \\ \dot{T}_{22} &= \dot{I}_{22} - 2W_{12}T_{12}, \\ \dot{T}_{12} &= \dot{I}_{12} + W_{12}(T_{22} - T_{11}) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

が得られる。ただし、前節で述べたように $\mathbf{T} \text{tr}(\mathbf{D})$ の

項は省略している。 $\dot{\beta}(t)$ についても $\dot{\beta}$ と $\mathbf{W}$ から同様に計算する。

さて従来の有限要素計算では、各要素での降伏の判定および負荷か除荷かの判定のための計算を必要としたが、ここで用いる構成式は弾塑性を連続的にとりあつかっているため降伏の判定は不要である。負荷、除荷の判定は遷移関数 $V(\xi)$ によってなされるが、実際の計算では次のようにした。各増分段階で2回の繰返し計算を行う。1回目には、前段階での計算で得られた $V(\xi)$ をそのまま用いて計算し、仮の $\{v_N\}$ を求めることによって現段階での $V(\xi)$ を得る。この $V(\xi)$ を2回目の計算で使い、他の諸量は1回目と同じにして、その増分段階での計算を行う。これにより、特に負荷から除荷へ変わる要素の応力変化をほぼ正しく追うことができる。

以上のように、式(24)を用いて増分計算を進めていくが、それだけでは誤差として節点荷重が蓄積し、節点でのつりあい条件を破ってしまうことがある。これをとり除くため、ここでは各段階で節点に残る荷重誤差分を、式(14)で $-\{\dot{\mathbf{P}}\}$ とみなして次の段階の計算に組み込んでいる。この方法は厳密には各段階での平衡状態を求めるくり返し法ではないが、つりあい条件を満足させながら計算を進める手法としては、よい収束が得られることを確かめている。

5 計算結果

次の二つの問題について、有限要素法による計算を行った。

- (1) ひずみ径路の急激な変更を伴う組合せ負荷。
- (2) 押出し。

いずれの場合にも、材料として Al 5056-O を想定し、物質パラメータの値は次のものを用いた。

$$K_0 = 6.8, \quad a_0 = 12\,000, \quad a_1 = 2.0, \quad c_0 = 1.3, \quad c_1 = 2.5 \quad (27)$$

二つの弾性定数については、縦弾性係数を $7\,200 \text{ kg/mm}^2$ 、ポアソン比を0.32とした。遷移パラメータの値は $\kappa = 5$ とした。

各要素内の速度場は線型に変化するものとし、形状関数 $[\mathbf{N}]$ には一次式を用いている。また、いずれの場合にも物体力 $\mathbf{b}$ はないとし、温度や熱の変化も考慮していない。

以下では、それぞれの問題について設定した要素の形状、境界条件などとともに計算の結果を示す。

5・1 組合せ負荷

単軸引張りと同純せん断の組合せ負荷の問題を、Fig. 1 に示すような要素を用いて計算した。図において $AB = AD = l_0 = 10 \text{ mm}$ 、紙面に垂直方向の厚さは 0.5 mm とし、平面応力問題とした。単軸引張りの場合は、辺 AD 上の節点は x 軸方向の変位が拘束され、

Fig. 1. Initial element configuration for the complex loading problem.

y 軸方向には変位増分 δ_y が与えられる。単純せん断の場合は、辺 AD 上の節点は y 軸方向の変位が拘束され、 x 軸方向に変位増分 δ_x が与えられる。辺 BC 上の節点は固定されるが、上述以外の節点はすべて自由に変位できる。

さて、 l_0 を用い $\delta\epsilon = \delta_y/l_0$, $\delta\gamma = \delta_x/l_0$ として、変形過程にわたってこれらを積分した値

$$\epsilon = \int \delta\epsilon, \quad \gamma = \int \delta\gamma \quad (28)$$

をそれぞれ引張ひずみおよびせん断ひずみとして用いる。式(28)は、板 ABCD を一つの要素とみなしたとき、その要素の工学ひずみに相当するものである。また、応力の代表値としては、角の固定端付近の T_{xx} などの影響を除くため、中央の 9 個の要素 (Fig. 1 の斜線部分) の平均値をとっている。さらに一般化応力 T_{eq} および一般化ひずみ径路長 E_{eq} を次式で定義する。

$$T_{eq} = [T_{yy}^2 + (\sqrt{3}T_{xy})^2]^{1/2} \quad (29)$$

$$E_{eq} = \int \left[(\delta\epsilon)^2 + \left(\frac{\delta\gamma}{\sqrt{3}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (30)$$

ひずみ径路としては次の 5 とおりを考えた (Fig. 2)。

- ① $\gamma/\sqrt{3} = 0.007$ までせん断，その後引張り (S+T)。
- ② $\gamma/\sqrt{3} = 0.014$ までせん断，その後引張り (S+T)。

Fig. 2. Five strain paths for complex loading.

Fig. 3. Stress vectors on each strain path.

Fig. 4. Relations between the generalized stress and the generalized strain path length.

- ③ せん断と引張りの比例負荷 (Proportional)。

- ④ $\epsilon = 0.007$ まで引張り，その後せん断 (T+S)。

- ⑤ $\epsilon = 0.014$ まで引張り，その後せん断 (T+S)。

Fig. 3 には③以外の各ひずみ径路上に、 $(\sqrt{3}T_{xy}, T_{yy})$ を成分とする応力ベクトルの変化を示す。この応力ベクトルの大きさが T_{eq} であるが、 T_{eq} と E_{eq} との関係を図 4 に示した。これら二つの図から、ひずみ径路の変更後応力ベクトルの方向がひずみ径路の方向に対して遅れること、その遅れ角がしだいに減衰すること、 T_{eq} がいったん減少したのち再び増加することなどがわかる。これらの計算の結果は、Ohashi⁹⁾らなどによる一連の実験によって得られている結果とよく一致している。ただし、第 1 報の 4 章(3)でも述べたように、実験対象となった物質の初期降伏が等方的ではない (Mises 型 ではない) ことに帰因する程度の誤差は生じている。ひずみ径路変更後の応力低下現象については次節で考察する。

5・2 押出し

有限な弾塑性変形の例として押出しをとりあげ、無変形状態から定常状態までの押出し過程の計算を行っ

Fig. 5. Initial element configuration for extrusion problem.

た。押出す前の要素の形状を Fig. 5 に示す。各要素は一辺 2 mm の正方形であり、全要素数は 110、全節点数は 138 である。問題を幅の広い板の押出しと考え、平面ひずみ問題として計算した。板の初期の厚さは 10 mm、ダイ出口での厚さは 8 mm であり減面率は 20% である。図の減面域 BC では $\tan \theta = 0.25$ である。

境界条件は以下のように設定した。Fig. 5 のダイ面 (ABC) 上では壁面に垂直な方向の変位は拘束され、ダイ面と材料との間には摩擦はないと考える。また、対称面 DE 上では y 方向の変位が拘束される。材料はラムによって押出されるので、各増分段階では AD 上の節点に x 方向の強制変位増分を与えて計算をすすめた。境界条件のうち、点 B および材料がダイから出た後の自由表面における節点荷重の与え方は次のようにした。

まず、Fig. 6 (a) に示すような曲率半径 ρ をもつめらかなダイ面にそって材料がすべりながら変形していく場合を考える。図では面の接線方向に x' 軸、法線方向に y' 軸をとっている。このとき、 y' 方向の節点反力と x' 方向の節点速度との間の相互作用から式(9)の仮想仕事への寄与が生じる。 $\mathbf{n}$ を面の単位法線ベクトルとして、 $\mathbf{f}$ と $\mathbf{S}$ の関係 $\dot{f}_k = n_k \dot{S}_k$ および式(4)などを用いると、式(9)の右辺第 1 項は

$$\int_A \dot{f}_k \delta v_k dA = \int_A \frac{1}{\rho} T_{y'y'} v_{x'} \delta v_{x'} dA \quad (31)$$

となる。さて、Fig. 6 (b) の B 点のような角点では $\rho \rightarrow 0$ となるが、同様に $dA \rightarrow 0$ となり $dA = \rho t_0 \theta$ (t_0 は材

Fig. 6. Boundary for (a) a curved reduction die and (b) a straight reduction die.

料の紙面に垂直方向の厚さ、 θ は角点の角度) の関係を用いると、式(31)は

$$\int_A \frac{1}{\rho} T_{y'y'} v_{x'} \delta v_{x'} dA \rightarrow T_{y'y'} v_{x'} \delta v_{x'} t_0 \theta \quad (32)$$

となる。ただし、 x' 、 y' の方向が不定になるが、ここでは Fig. 6 (b) に示すように x' 軸をダイ面 BC にその方向にとり、 y' 軸をそれに垂直にとった。このようにして、ダイ面上にある節点が B 点に達したとき、次の増分段階で式(32)で計算される寄与をその節点をふくむ要素の剛性マトリックスに入れるようにしている。

つぎに、材料が C 点から出た後は自由表面上の節点に拘束条件はなく節点反力を 0 とする必要がある。このために、各増分段階で計算される節点反力 $\{f_N\}$ を用いて、その段階で

$$\{\dot{\mathbf{P}}\} = -k_0 \{f_N\} \quad (33)$$

だけの外力増分を自由表面節点に与えている。これはダイ面上節点が C 点から出た後、それまでその節点にはたっていた反力をほぼ指数関数的に減少させ 0 に近づけることに相当する。 k_0 の値としては 0.1 を用いた。

Fig. 7 には材料を押出すラムにかかる押し出し圧力の変化を示した。図の横軸はラムの移動距離を表す。押し出し過程の最初は押し出し圧力はほぼ直線的に増加し、

Fig. 7. The variation of the driving pressure of ram.

Fig. 8. Element configuration and principal stress vector space at steady state extrusion process.

ある程度まで材料が押し出された後は定常押し圧（図では 9.13 kg/mm^2 ）が得られている．実際には有限要素分割のあらさにより定常押し圧は周期的に変動する ($9.13 \pm 1.2 \text{ kg/mm}^2$) が、図には各周期の変動の中心をむすんで描いてある．なお、ここでは Nagtegaal らが指摘したような体積一定の拘束をもつ特別な要素分割を用いることなく計算に成功したことを注意しておく．

Fig. 8 には定常状態における要素形状および主応力ベクトル場を示す．押し出後の材料の自由表面付近に残る引張残留応力や減面域での対称面側の引張応力は、現実の押し出し過程で観察される表面割れや内部クラックなどの原因になるものと考えられる．この状態での x 軸方向にその応力分布を Fig. 9~11 に示した．図中の記号に付した番号の 1 がダイ面側、5 が対称面側にその要素の応力分布を表す．各応力について減面域

Fig. 9. The distribution of the stress T_{xx} at the steady state.

Fig. 10. The distribution of the stress T_{yy} at the steady state.

Fig. 11. The distribution of the stress T_{xy} at the steady state.

の前後で、符号の逆転などを伴う大きな変化が見られるが、このような急激な応力変化を伴う場合には Bauschinger 効果の影響は大きく、等方加工硬化だけを考えた計算では大きな誤差を生じている可能性がある。本計算に用いた構成式では並進応力テンソル β によって並進加工硬化を表現しており、Bauschinger 効果は β の大きさによって評価できる。定常状態で減面域前後では β の各成分の大きさは、対応する応力 T の各成分の大きさの 10~50% にも達しており、Bauschinger 効果の影響は大きいと言える。ダイを出た後には T_{yy} および T_{xy} は 0 に近づき、 T_{xx} もつりあい条件を満足していることがわかる。

6 結論および考察

本報では、第 1 報で提案した飽和加工硬化性の弾塑性物質の構成式を有限要素法にとり入れ、組合せ荷重および押し出し過程の計算を行った。その結果、この構成式が複雑なひずみ径路や有限変形を伴う問題にも適用でき、さらに Bauschinger 効果や飽和加工硬化を考慮した計算が可能であることを示した。

さて第 1 報では、ここで用いている構成式が、従来の塑性ポテンシャル論とは異り、弾性と塑性に明確な区別を設けず、負荷、除荷の判定も $\tilde{w}^*(=\tilde{T}_{kl}^*D_{kl})$ の符号で行うことを示した。このため、応力状態が降伏条件を満足していなくても $\tilde{w}^*>0$ となる負荷状態であれば式(10)右辺の塑性項の影響が生じる。組合せ荷重においてひずみ径路変更後の T_{eq} の低下現象は、この塑性項によるクロス効果（たとえば、 D_{yy} の増加によって T_{xy} が減少するなど）に主に帰因していると考えられる。これに対し、 T_{eq} で与えられる降伏曲面を考え T_{eq} の増減により弾性と塑性を区別する一般のポテンシャル論では、 T_{eq} の低下を説明することは困難である。

最後に等積変形の拘束についての問題を考えてよう。有限要素法で有限な弾塑性変形の問題をとり扱う場合、等積変形の拘束 $D_{mm}=0$ を満足するような特殊な要素を用いた計算例が多い。⁴⁾¹⁰⁾しかし、この要素を用いると

つねに等積変形の拘束条件を満足させることになるので非圧縮物質を想定していることになる。すなわち、実際の圧縮性弾塑性物質の弾性部分による体積変化が考慮されていない。本報では塑性変形が大きくなった状態においても、ストレッチング D の弾性部分を見捨てずに計算を進めている。このようにすると体積変化に伴い圧力が変化するが、押し出しの計算例で定常押し出し圧を得ていることは、有限変形に対する非圧縮性の拘束をおくことなく正しく計算が進められたことを示している。

なお、計算用プログラムは既存の平面弾性問題用のものを有限変形の弾塑性問題がとり扱えるように改良したものである。¹²⁾プログラムには自動メッシュ作成やエラーチェック機能のほか、任意ステップでの計算の打ち切り、データの保存および再計算機構やグラフィック機能をもたせている。

参 考 文 献

- 1) T. Tokuoka, ZAMM, **58**, 1 (1978).
- 2) T. Tokuoka, Arch. Mech., **30**, 801 (1978).
- 3) R. Hill, J. Mech. Phys. Solids, **7**, 209 (1959).
- 4) R.M. McMeeking and J.R. Rice, Int. J. Solids. Struct., **11**, 601 (1975).
- 5) E.H. Lee, SUDAM Report No. 76-1, Stanford Univ., (1976).
- 6) T. Tokuoka, Int. J. Engr. Sci., **20**, 373 (1982).
- 7) T. Tokuoka, Arch. Mech., (印刷中)
- 8) O. C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method", Chap. 4(1977) McGraw-Hill, London
- 9) Y. Ohashi and K. Kawashima, J. Mech. Phys. Solids, **25**, 409 (1977).
- 10) E.H. Lee, Comp. Meth. Appl. Mech. Engr., **10**, 339 (1977).
- 11) J.C. Nagtegaal, D.M. Parks and J.R. Rice, Comp. Meth. Appl. Mech. Engr., **4**, 153 (1974).
- 12) 日本材料学会編, "初心者のための有限要素法", 第 5 章 (1975) 日本材料学会