セラミックスの曲げ試験における強度分布モデルの 選択とモンテカルロシミュレーション†

松尾陽太郎* 村田博隆**

Selection of Strength Distribution Model and Monte Carlo Simulation for Bending Test of Ceramics

by

Yohtaro MATSUO and Hirotaka MURATA

(Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Tokyo)

Generalized stepwise structural models of multi-modal Weibull distribution functions have been established for the bending strength of ceramics. The maximum likelihood estimators of the Weibull parameters for each model were obtained by Nelder-Mead method. By using Akaike's information criteria (AIC), a mono-modal model was selected as the most suitable one for two kinds of bending test data on steatite ceramics. However, it was pointed out that some additional data such as diagnostics data and/or additional strength data were needed.

The direct and the two-step maximum likelihood methods have been applied to Monte Carlo simulation data of the bi-modal Weibull distribution function for small sample size. The standard deviation and the mean squared error of the maximum likelihood estimators by the two-step method were two or three figures smaller than those of the direct method.

(Received Feb. 6, 1984)

キー・ワード：セラミックス，破壊統計，多重モード・ワイブル分布，情報量規準，モンテカルロ法

1 緒 言

第1次石油危機以来，省エネルギー，省資源，新動力の開発などが盛んとなり，それに伴って新素材の開発が急務となっている。特に注目をあびている新素材の一つに Si_3N_4 ， SiC を始めとする構造用セラミックスがあり，その機械的性質の信頼性確保が重大な問題となっている。構造用セラミックスの機械的性質を表す物理量に弾性定数¹⁾，硬度^{2)~4)}，破壊じん性値^{5)~8)}など種々のものがあるが，中でも静的曲げ強度は設計の指針となる最も重要な量の一つである。静的曲げ強度は厳密には不活性環境下において実現されるもので，その値は材料内部や表面に存在する欠陥によってばらつくことが知られており，最弱リンク説に基づいて多くの確率・統計論的研究^{9)~17)}がなされてきた。特に最近¹⁸⁾は多軸応力状態に適用できる分布関数の研究が盛んとなっている。しかし，多種破壊源をもつぜい性材料の強度に関する研究は Bolotin¹⁾，著者ら^{2)~5)}，および Johnson¹⁷⁾ の分布関数の定式化に関する研究¹⁸⁾の他は，Easler¹⁸⁾らの実験的研究

が見られる程度で，まだ不明の点が多く，パラメータの推定法，推定値の分布，モデルの選択，故障原因データの役割等について統一的に研究した例はない。

本論文では内部き裂，表面き裂およびエッジき裂を同時に考慮した多重モード・ワイブル分布を最上層とする曲げ強度分布モデルの階層構造を考え，与えられたデータから各階層構造モデルのパラメータを直接最ゆう法により推定し，赤池の情報量規準 AIC によって最適モデルを選択できるか否かを検討する。またモンテカルロシミュレーションによって発生させた二重モード・ワイブル分布に従うデータに対して，直接最ゆう法および二段最ゆう法によるパラメータの点推定を行い，両者の推定精度等を比較する。

2 曲げ試験における強度分布モデル

Bolotin¹⁾ および著者らは最弱リンク説に立脚して，多種破壊源に適用できる多重モードワイブル分布（競合リスクモデルの一種）に関する研究を行い，次式で示す一般式を得た。

† 原稿受理 昭和59年2月6日

* 正会員 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山

** 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山

*1 故障の原因（または破壊源）に関する情報を故障原因データと呼ぶことにする。

$$F_{\text{total}} = 1 - \exp \left[- \sum_{i=1}^k B_i \right] \quad (1)$$

ここで F_{total} は考えている物体の破壊確率, k は欠陥の種類数, B_i は欠陥 i による破壊の危険率 (ハザード関数) である. 欠陥として内部き裂 (添字 1), 表面き裂 (添字 2), エッジき裂 (添字 3) の三種類を想定すると, ワイブルの一軸分布関数に対する各危険率 B_i は次式となる (後に述べるように, これを最上層モデルと考える).

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \int_V \left(\frac{\sigma - \sigma_{u1}}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} dV, \\ B_2 &= \int_A \left(\frac{\sigma - \sigma_{u2}}{\sigma_{02}} \right)^{m_2} dA, \\ B_3 &= \int_L \left(\frac{\sigma - \sigma_{u3}}{\sigma_{03}} \right)^{m_3} dL \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで m_i , σ_{0i} , σ_{ui} ($i=1 \sim 3$) はワイブル・パラメータ, σ は任意点における最大主応力 (≥ 0), dV , dA , dL はそれぞれ無次元の体積要素, 面積要素および線素である. また多軸応力状態に適用できる分布関数 (多軸分布関数) に対して, B_i は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{z - \sigma_{u1}}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} Y(z, \sigma_{u1}) \sin \varphi d\varphi d\theta dV, \\ B_2 &= \frac{2}{\pi} \int_A \int_0^{\pi/2} \left(\frac{z^* - \sigma_{u2}}{\sigma_{02}} \right)^{m_2} Y(z^*, \sigma_{u2}) d\theta dA, \\ B_3 &= \int_L \left(\frac{z^+ - \sigma_{u3}}{\sigma_{03}} \right)^{m_3} Y(z^+, \sigma_{u3}) dL \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで z , z^* , z^+ は等価垂直応力で, 想定したき裂の不安定伝ば条件から導かれる量である. また $Y(\cdot)$ はヘビサイドの階段関数である. 以下の計算では簡単のために $\sigma_{ui} = 0$ ($i=1, 2, 3$) とする.

Fig. 1 に示すように, 細長い矩形断面梁が 4 点曲げ荷重を受けるとき, 材料内に働く曲げ応力 σ は次式となる.

Fig. 1. A slender beam subjected to four-point bending force.

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_{\max}}{hL_1} xy \\ &\quad (0 \leq x \leq L_1, L_1 + L_2 \leq x \leq 2L_1 + L_2), \\ \sigma &= \sigma_{\max} \frac{y}{h} \quad (L_1 \leq x \leq L_1 + L_2), \\ \sigma_{\max} &= \frac{3WL_1}{4bh^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

板側面からの破壊を無視できるものとする, 式(2), (4)より破壊の危険率 B_i は次式となる.

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} V_{e0}, \quad V_{e0} = \frac{bh}{m_1 + 1} \left(\frac{2L_1}{m_1 + 1} + L_2 \right) \\ B_2 &= \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{02}} \right)^{m_2} A_{e0}, \quad A_{e0} = b \left(\frac{2L_1}{m_2 + 1} + L_2 \right) \\ B_3 &= \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{03}} \right)^{m_3} L_{e0}, \quad L_{e0} = \frac{4L_1}{m_3 + 1} + L_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで V_{e0} , A_{e0} , L_{e0} はそれぞれ無次元の有効体積, 有効表面積, 有効長さである.

一方, 内部き裂としては円板状き裂, 表面き裂としては 2 次元直線き裂, エッジき裂としてはき裂面が稜に垂直な扇状き裂を想定すると, 混合モード下の実験式から導かれる等価垂直応力は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} z &= \sqrt{\sigma_R^2 + D\tau^2} = \sigma \cos \varphi \{g(\varphi)\}^{1/2} \\ z^* &= \sqrt{\sigma_R^2 + \tau^2} = \sigma \cos \theta \\ z^+ &= \sigma, \quad D = 4/(2 - \nu)^2, \\ g(\varphi) &\equiv (\cos^2 \varphi + D \sin^2 \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで σ_R , τ はき裂面に作用する垂直応力およびせん断応力, ν はポアソン比である. 式(6)を式(3)に代入することにより, 多軸分布関数による破壊の危険率 B_i は次のように定式化される (B_3 は式(5)の第 3 式と一致する).

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{01}} \right)^{m_1} V_e, \\ V_e &\equiv \int_0^{\pi/2} \{g(\varphi)\}^{m_1/2} \\ &\quad \cdot \cos m_1 \varphi \sin \varphi d\varphi \cdot V_{e0} \\ B_2 &= \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{02}} \right)^{m_2} A_e, \\ A_e &\equiv \left[\frac{1}{\pi} \cdot B \left(\frac{1}{2}, \frac{m_2 + 1}{2} \right) \right] \cdot A_{e0} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで $B(\cdot)$ はベータ関数である. 式(5)の第 1 式, 第 2 式と上式を比べると, [] でくくった係数だけ異なることがわかる.

3 強度分布モデルの選択と情報量規準 AIC

3.1 競合リスクモデルとゆう度関数

式(1)で表される多重モード・ワイブル分布は, いわゆる競合リスクモデルの¹⁰⁾ 特別の場合で, 危険率 (ハザード関数) が互いに独立な場合に相当する. いま, 故障原因 C_i によって破壊する試験片の個数を N_i , 故障原因 C_i によって破壊する試験片のうち j 番目の強度を X_{ij} ($j=1, 2, \dots, n_i$; $i=1, 2, \dots, k$) とすると, ゆう度関数は次式で与えられる.

$$L = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k (n_i!)} \left[\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \left\{ f_i(x_{ij}) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^k R_l(x_{ij}) \right\} \right], \quad n = \sum_{i=1}^k n_i \quad (8)$$

ここで R_i , f_i はそれぞれ故障原因 C_i が独立に存在するとしたときの信頼度および密度関数 (net probability) で,

$$R_i = \exp(-B_i) \quad (9)$$

$$f_i = B'_i \cdot \exp(-B_i) \quad (10)$$

となる。故障原因についてまったく情報がない場合は、式(8)にて $k=1$ を代入し、さらに強度データ x_{ij} を一列に並べて、これを新たに $x_j (j=1, 2, \dots, n)$ とし、密度関数 f_i のかわりに

$$f_{\text{total}} = dF_{\text{total}}/dx \quad (11)$$

を代入すればよい。このように故障原因データなしに最ゆう推定量を決定する方法を直接最ゆう法と呼ぶことにする。^{*2}

一方、Sampford^{11)~14)}らは式(8)を変形して、次に示す重要な式を得た。

$$L = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k (n_i!)} \cdot \prod_{i=1}^k L_i, \quad L_i = \left[\prod_{j=i}^n f_i(x_{ij}) \right] \left[\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} R_i(x_{ij}) \right] \quad (12)$$

上式で、 L_i は分布 f_i のみを含んでいる。もし各分布 f_i が異なるパラメータの組をもつならば、各々の L_i を最大にするパラメータを見出せばよいことになる。すべての位置母数 σ_{oi} が 0 ならば最ゆう方程式は著しく簡単となって、 m_i のみの式と、 $\sigma_{oi} = \Phi(m_i)$ の式に分離される (Φ はある関数を意味する)。たとえば、式(5)の第1式に対する最ゆう方程式を書き下すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_1}{m_1} + \sum_{i=1}^{n_1} \ln x_i - n_1 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_i m_1 \cdot \ln x_i}{\sum_{i=1}^{n_1} x_i m_1} &= 0 \\ \sigma_{01} &= \left(\frac{V_{e0}}{n_1} \cdot \sum_{i=1}^{n_1} x_i m_1 \right)^{1/m_1}, \quad x_i \equiv (\sigma_{\max})_i \end{aligned} \right\} \quad *3 \quad (13)$$

式(13)の第1式から Newton-Raphson 法により $\hat{m}_1$ を求め、これを第2式に代入して $\hat{\sigma}_{01}$ を求めればよい。

*2 故障原因データがない場合でもパラメータが推定可能なのはワイブル分布の構造上の特徴であって、一般の分布にはあてはまらない。たとえば競合指数分布の最ゆう方程式は解をもたない。

*3 ここでは見通しをよくするため n 個の全破壊データを一列に並べ、そのうち最初の n_1 個は内部き裂から破壊したデータとしてある。

このようにして最ゆう推定量を決定する方法を多段最ゆう法¹⁵⁾と呼ぶことにする。

さて、式(13)で注目すべきことは、第1式中に m_1 の関数である V_{e0} が含まれないという事実である。それゆえ、式(5)と式(7)からも推測できるように、多軸分布関数(式(7))を用いた場合の m_1 に関する最ゆう方程式は式(13)の第1式と一致する。また σ_{01} に関する式は、式(13)の第2式中の V_{e0} を V_e に置き換えた式となる。すなわち、多軸分布関数と一軸分布関数とを用いたときのパラメータ推定上の相違は $\hat{\sigma}_{0i}$ のみに生じ、 $\hat{m}_i$ は両者で一致することが結論される。したがって、一軸分布関数を用いて $\hat{m}_i$, $\hat{\sigma}_{0i}$ を求めておけば、多軸分布関数の $\hat{m}_i$, $\hat{\sigma}_{0i}$ は自動的に求まることになる。

3.2 曲げ強度データからのパラメータの点推定

式(1), (5)で表される分布を最上層とする階層構造モデルを、木村らおよび著者らが行ったセラミックスの曲げ試験データ⁵⁾にあてはめよう。これらの実験では破壊した試験片を観察しても故障原因(破壊源)がはっきりしない例が少なくなかったため、パラメータ推定法としては直接最ゆう法⁵⁾を採用する。

(1) 4点曲げ試験 Fig.2 は木村らの行ったステアタイト・セラミックスに関する4点曲げ試験データを平均ランク法によってプロットした結果である ($b=10.1$ mm, $h=1.0$ mm, $L_1=L_2=13.3$ mm)。このデータから各階層モデルのパラメータを直接法によって推定する。対数ゆう度の最大値を求める手法としては、4-パラメータ以上のモデルに対しては直接探索法⁵⁾の一種である Nelder-Mead 法(シンプレックス法)を用いた。また2-パラメータ・モデルに対しては最ゆう方程式を Newton-Raphson 法により解いた。数値計算結果によると、最大対数ゆう度 MLL の値はすべてのモデルに対して14けたの精度で一致した。Table I にパラメータの最ゆう推定値を示す。同表で、 $\hat{m}_i=22.42$ となるものが各モデルに必ず一つあり、異なる

Fig. 2. Four-point bending test data of steatite ceramics (after Kimura *et al.*⁵⁾).

Fig. 3. p.d.f. of the model [V+S] (four-point bending test data, after Kimura *et al.*⁵⁾).

Table I. Maximum likelihood estimators of each stepwise structural model obtained by the direct method (four-point bending test data, after Kimura *et al.*⁵⁾).

Param. Model	$\hat{m}_1$	$\hat{m}_2$	$\hat{m}_3$	$\hat{\sigma}_{01}$	$\hat{\sigma}_{02}$	$\hat{\sigma}_{03}$
V+S+L	13.05	25.98	22.42	2072	1960	167.8
V+S	22.75	22.42	—	342.4	185.4	—
V+L	34.25	—	22.42	4350	—	167.8
S+L	—	689.4	22.42	—	23450	167.8
V	22.42	—	—	161.4	—	—
S	—	22.42	—	—	185.4	—
L	—	—	22.42	—	—	167.8

MLL = -171.992522795

モデル間で $\hat{m}_i$ が等しいと、対応する $\hat{\sigma}_{0i}$ も等しくなっている。得られたパラメータ値を用いて計算した分布関数の値は4けた以上の精度で各モデルとも一致し、Fig. 2 中の一本の実線となった。モデル (V+S) の密度関数を Fig. 3 に示す。 f_1 と f_2 の競合はほとんど0で、 f_2 は f_{total} にほぼ完全に一致していることがわかる。さらにモデル (V+S+L), (V+L), (S+L), (L) では f_3 が、モデル (V), (S) ではそれぞれ f_1 , f_2 が f_{total} とほぼ完全に一致した。⁹⁾

(2) 3点曲げ試験 著者らの行ったステアタイト・セラミックスに関する3点曲げ試験データ ($b=4.9$ mm, $h=2.45$ mm, $L_1=15.0$ mm, $L_2=0$ mm) をFig. 4 に示す。実験結果から(1)と同様にして求めたパラメータの最ゆう推定量を Table II に示す。Table I と同様に、すべてのモデルに対して最大対数ゆう度 MLL の値は14けたの精度で一致した。得られたパラメータ値を用いて計算した分布関数の値は、Fig. 2 と同様に各モデルとも4けた以上の精度で一致した。モデル (V+S+L) の密度関数を計算したところ、 f_1 は f_{total} とほぼ完全に一致した。またモデル (V+S), (V+L), (V) では f_1 が、モデル (S+L), (S) では f_2 が、モデル (L) では f_3 がそれぞれ f_{total} と一致した。

Fig. 4. Three-point bending test data of steatite ceramics.⁹⁾

Table II. Maximum likelihood estimators of each stepwise structural model obtained by the direct method (three-point bending test data⁹⁾).

Param. Model	$\hat{m}_1$	$\hat{m}_2$	$\hat{m}_3$	$\hat{\sigma}_{01}$	$\hat{\sigma}_{02}$	$\hat{\sigma}_{03}$
V+S+L	13.99	44.38	13.99	186.5	765.4	370.0
V+S	13.99	11.22	—	186.5	4172	—
V+L	13.99	—	16.31	186.5	—	606.8
S+L	—	13.99	31.78	—	212.3	679.8
V	13.99	—	—	186.5	—	—
S	—	13.99	—	—	212.3	—
L	—	—	13.99	—	—	199.2

MLL = -95.7661519308

3・3 強度分布モデルの選択と情報量規準 AIC

Akaike¹⁶⁾ は、与えられたデータに対して階層構造モデルが考えられるとき、その中から真の分布のモデルを選択する方法として“赤池の情報量規準 AIC”を提案している。すなわち、AIC を

$$\text{AIC} = -2 \times (\text{最大対数ゆう度 MLL}) + 2 \times (\text{モデルの自由パラメータ数}) \quad (14)$$

と定義し、これを最小にするようなモデルが真の分布のモデルであると考える。

Table I および II においては、MLL が各モデルに対して同一の値をとるので、各 AIC 値間の差は $2 \times$ (モデルの自由パラメータ数) で表されることになり、最少のパラメータ数をもつ三つのモデル (V), (S), (L) が共に同一の最小 AIC 値を示すことになる。すなわち情報量規準 AIC 最小化という意味では、モデル (V), (S), (L) 間にはまったく差がないことになる。したがって、これら三つのモデルの中から真の分布のモデルを選択するには、故障原因データ (不完全データでよい) ないしは補助データ (補助試験) が必要となる。⁵⁾⁹⁾

試験片の板幅のみを変えた実験によれば、すなわちエッジの長さを変えずに表面積および体積のみを変えた実験では、板幅の増大と共に平均強度が低下していた。このことからモデル (L) が棄却される。また4点曲げ試験⁵⁾では、表面欠陥から破壊した例が多くみられた (不明のデータも数例あった)。したがって、真の分布のモデルとして、モデル (S) が選択される。⁹⁾ 一方、3点曲げ試験では破壊源がよくわからなかった。したがって、モデル (V) とモデル (S) のいずれが真の分布のモデルであるかを特定できなかった。

4 モンテカルロ・シミュレーションによる直接最ゆう法と多段最ゆう法の比較

*4 分布モデルを仮定したとき、パラメータを求めるには一定寸法の試験片に関する多数の実験データ (主データ) があれば十分であるが、それ以外のデータ、たとえば寸法を変えた試験片に関するデータを、ここでは“補助データ”と呼ぶことにする。

2・3節でとりあげたデータは、密度関数および情報量規準 AIC の値から判断すると、競合リスクではないことが明らかとなった。そこで本章では与えられたパラメータをもつ競合リスクモデル (V+S)、すなわち 2 重モード・ワイブル分布について小標本のモンテカルロ・シミュレーションを行い、3・1 節で定義した直接最ゆう法と多段最ゆう法によってパラメータを推定し、故障原因データの有無が推定値に及ぼす影響を調べることにする。

4 点曲げ試験データのモンテカルロ・シミュレーションを行うにあたって、できるだけ実際の実験に近くなるように試験片寸法、試験条件、およびパラメータ値を設定した。その値は次の通りである。

$$b=10.1 \text{ mm}, h=1.05 \text{ mm}, L_1=L_2=13.3 \text{ mm},$$

$$m_1=21.3, m_2=22.5, \sigma_{01}=163.3, \sigma_{02}=186.0$$

なお、この例では試験片が内部欠陥および表面欠陥から破壊する確率はそれぞれ 50% となるようにしてあ

Fig. 5. Normal plots of the maximum likelihood estimators obtained from Monte Carlo simulation by the direct method ($n=50$).

*5 大標本に対する最ゆう推定量の漸近結合分布は多変数正規分布に従うことが知られている¹⁰⁾。しかし小標本の場合はモンテカルロ・シミュレーションによってのみ、その最ゆう推定量の分布を知ることができる。

る。

セラミックスの 4 点曲げによる材料試験においては、経済的観点からサンプルサイズ $n=50$ 点が上限と考えられる。そこで本シミュレーションにおいてもサンプルサイズの上限を 50 点とし、各サンプルサイズについて 500 組のランダム・データを発生させ、各データの組に対して直接最ゆう法および二段最ゆう法によってパラメータの点推定を行った。

はじめに $n=50$ の推定結果について述べる。Fig. 5, Fig. 6 はそれぞれ直接最ゆう法および二段最ゆう法に

Fig. 6. Normal plots of the maximum likelihood estimators obtained from Monte Carlo simulation by the two-step method ($n=50$).

よって得た最ゆう推定値 (設定値で除して規格化してある) を平均ランク法により正規確率紙上にプロットしたものである。Fig. 5 の直接法による結果は $\hat{m}_1$, $\hat{\sigma}_{01}$ とも直線とはならず複雑な曲線となっており、分布の拡がりも極めて大きい。特に $\hat{\sigma}_{01}$ は、 $\hat{\sigma}_{01}/\sigma_{01}=1$ 付近で急こう配の直線から緩こう配の直線に折れ曲っているのが大きな特徴となっている。これに対し、Fig. 6 の二段最ゆう法による結果は、 $\hat{m}_1$, $\hat{\sigma}_{01}$ とも直線に近くなっており、分布の拡がりも著しく小さい。^{*6}

*6 $\hat{m}_2$, $\hat{\sigma}_{02}$ はそれぞれ $\hat{m}_1$, $\hat{\sigma}_{01}$ とほぼ同様の傾向を示した。

Fig. 7 は直接法および二段最ゆう法による最大対数
 ゆう度 L_D と L_M の関係を示したもので、ほぼ直線
 関係となっており、その最小二乗法による回帰直線は

$$L_M = 0.976L_D - 6.00 \quad (15)$$

 相関係数は $r=0.951$ であった。

Fig. 7. The relation between the maximum logarithmic likelihood L_D and L_M .

Table III は以上の推定結果より得られた各推定量
 の平均、標準偏差 (S. D.), ひずみ (β_3), とがり (β_4),
 最大値 (MAX.), 最小値 (MIN.), 平均二乗誤差の
 一覧で, “D” は直接法, “M” は二段法による結果を
 表す。二段法によるパラメータの推定値は, 直接法に
 よるそれより標準偏差が2けた小さいこと, 平均値が
 設定パラメータ値 (E. VAL) に近いこと, 平均二乗誤
 差が2~9けた小さいことがわかる。また, ひずみ,
 とがりの数値から見て, 二段法による $\hat{m}_1$, $\hat{m}_2$ が正規
 分布に近いこと, 最大対数ゆう度は直接法, 二段法と
 もほぼ正規分布に従うことが結論される。

つぎに, 二段最ゆう法のみを用いて, その最ゆう推
 定値の平均二乗誤差におよぼすサンプルサイズ n の影
 響について述べる。Fig. 8 は $\hat{m}_1$, $\hat{m}_2$ の平均二乗誤
 差とサンプルサイズの関係を示したもので, サンプル
 サイズ n が小さくなると平均二乗誤差が急激に大きくな
 ること, $\hat{m}_1$ と $\hat{m}_2$ の間の差はわずかであることがわ
 かる。一方, Fig. 9 に示すように $\hat{\sigma}_{01}$ と $\hat{\sigma}_{02}$ の平均

Fig. 8. The effect of sample size n on the mean squared error of $\hat{m}_1/m_1$ and $\hat{m}_2/m_2$.

Fig. 9. The effect of sample size n on the mean squared error of $\hat{\sigma}_{01}/\sigma_{01}$ and $\hat{\sigma}_{02}/\sigma_{02}$.

二乗誤差は $\hat{m}_i$ のそれに比べると3けた以上小さくな
 っている。

Table III. Statistics of maximum likelihood estimators obtained from Monte Carlo simulation ($n=50$)
 (D : direct method, M : two-step method).

	E. VAL	MEAN		S. D.		β_3		β_4		MAX.		MIN.		$E[(\hat{\theta}/\theta - 1)^2]$	
$\hat{m}_1$	21.3	42.4	22.0	344	3.75	21.2	0.582	462	3.65	7560	37.2	3.70	15.5	0.99	1.01×10^{-3}
$\hat{m}_2$	22.5	29.2	23.2	85.3	3.67	20.0	0.613	428	3.74	1820	40.3	4.06	13.5	8.87×10^{-3}	1.13×10^{-3}
$\hat{\sigma}_{01}$	163.3	430.2	163.5	882.4	4.47	12.7	1.18	222	6.46	16420	193.8	150.6	153.5	2.67	1.22×10^{-6}
$\hat{\sigma}_{02}$	186.0	927.5	186.0	1027	7.13	1.51	0.64	5.00	4.07	5867	221.7	153.1	169.4	15.9	3.28×10^{-8}
MLL	—	-171.0	-172.9	5.63	5.57	0.024	0.059	3.19	3.22	-149.4	-151.4	-187.0	188.5	—	—
		D	M	D	M	D	M	D	M	D	M	D	M	D	M

以上のシミュレーション結果より、競合リスクモデル(独立な場合)のパラメータを実験値から推定するには、故障原因データを可能な限り収集して、多段最ゆう法を用いることが必要である。

5 結 言

本研究で得た主要な結果を以下に列挙する。

(1) 内部き裂、表面き裂およびエッジき裂を同時に考慮した多重モード・ワイブル分布を最上層とする曲げ強度分布モデルの階層構造を考え、ステアタイトに関する実験例から直接法(Nelder-Mead法)によりパラメータの最ゆう推定量と最大対数ゆう度を求めた。

(2) 得られた最大対数ゆう度と自由パラメータ数とから赤池の情報量基準AICによってモデルの選択を行ったところ、単独モードの分布が最適であることがわかった。しかし、どの単独モードが最適であるかは、AICでは特定できず、補助データおよび故障原因データが必要であることがわかった。

(3) 位置母数が0ならば、多段最ゆう法によって一軸分布関数の $\hat{m}_i$, $\hat{\sigma}_{0i}$ を求めておけば、多軸分布関数の $\hat{m}_i$, $\hat{\sigma}_{0i}$ は自動的に求まる($\hat{m}_i$ は両者で一致する)。

(4) 二重モード・ワイブル分布について500組の小標本モンテカルロ・シミュレーションを行い、直接最ゆう法および二段最ゆう法によってパラメータを推定し、以下の結果を得た。

二段最ゆう法による $\hat{m}_1$, $\hat{m}_2$ は正規分布に近い、最大対数ゆう度は直接法、二段法ともほぼ正規分布に従う。

二段法によるパラメータの推定値は直接法によるそれより標準偏差が2けた小さく、平均二乗誤差が2〜9けた小さい。

二段法に対して、最ゆう推定値の平均二乗誤差に及ぼすサンプルサイズの影響を明らかにした。

(昭和58年12月2日 第5回設計における信頼性工学シンポジウムにて講演)

参 考 文 献

- 1) V. V. Bolotin, "Statistical Methods in Structural Mechanics" (1969) Holden-Day.
- 2) 松尾陽太郎, 佐藤秀幸, 日本機械学会論文集, A-45, 171 (1979).
- 3) 松尾陽太郎, 日本機械学会論文集, A-46, 605 (1980).
- 4) 松尾陽太郎, 日本機械学会論文集, A-46, 763 (1980).
- 5) 木村脩七, 安田栄一, 松尾陽太郎, 犬飼崇男, 大塚基治, 第1回高温材料基礎討論会講演要旨集(窯業協会), p. 51 (1981).
- 6) 松尾陽太郎, 日本機械学会論文集, A-46, 1203 (1980).
- 7) S. B. Batdorf and J. G. Crose, Trans. ASME, Ser. E, 41, 459 (1974).
- 8) A. G. Evans, J. Amer. Ceram. Soc., 61, 302 (1978).
- 9) 松尾陽太郎, 永井文雄, 末吉健一, 日本機械学会・精機学会共催山梨地方講演会予稿集, p. 85 (1981).
- 10) N. R. Mann, R. E. Schafer and N. D. Singpurwalla, "Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Date" (1974) John Wiley & Sons.
- 11) M. R. Sampford, Biometrics, 8, 307 (1952).
- 12) R. J. Herman and R. K. N. Patell, Technometrics, 13, 385 (1971).
- 13) M. L. Moeschberger and H. A. David, Biometrics, 27, 909 (1971).
- 14) D. G. Hoel, Biometrics, 28, 475 (1972).
- 15) 宮川雅巳, 私信.
- 16) H. Akaike, "2nd Inter. Symp. on Information Theory" (Petrov and Csaki ed.), p. 267 (1973) Akademiai Kiado, Budapest.
- 17) C. A. Johnson, "Fracture Mechanics of Ceramics Vol. 5", (Bradt, Evans, Hasselman and Lange ed.) p. 365 (1983) Plenum Press.
- 18) T. E. Easler, R. C. Bradt and R. E. Tressler, J. Amer. Ceram. Soc., 64, C-53 (1981).