積層複合円筒殻の外圧による座屈†

粕谷 平和* 植村 益次**

Buckling of Laminated Composite Cylindrical Shells
under External Pressure

by

Hirakazu KASUYA and Masuji UEMURA

In general, laminated composite structures exhibit some coupling effect due to anisotropy and unsymmetric lamination. Thus, when the number of layers is low, they behave quite differently from the homogeneous orthotropic ones.

In the present paper, the coupling effect on buckling pressure in the cross-ply and angle-ply laminated cylindrical shells subjected to external pressure was discussed based on the analysis by use of the Donnell-type equilibrium equations. The effects due to various factors such as stacking sequence, number of layers, lamination angle and dimension of cylinder, on the buckling pressure were clarified analytically. The principal conclusions are summarized as follows.

(1) As for the effect of number of layers with equal thickness, N , the buckling pressure decreased very much when N is small in both cross-ply and angle-ply laminates because of the variation of cross-ply ratio and the coupling effect, respectively.

(2) As for the effect of lamination angle, θ , in angle-ply laminates, the buckling pressure was minimum at $\theta=0^\circ$ and maximum at $\theta=90^\circ$ in both symmetric and antisymmetric laminates.

(3) The coupling effect of laminates disappeared rapidly with an increase of the number of layers and their mechanical behavior became similar to that of homogeneous orthotropic laminates.

キー・ワード: 複合材料, CFRP, 積層円筒殻, 外圧座屈, カップリング効果

1 ま え が き

高比強度, 高比剛性の高性能繊維強化プラスチック材が最近発達し, 円筒殻構造としても航空機・ロケットの胴体, タンク, 回転胴などに使用されるようになった. このような積層円筒殻の特色の一つは, 中央面に対する積層配列と強化繊維の配向等によっては各種のカップリング効果があり, 均質な直交異方性円筒殻とはかなり異なる力学的挙動を示すことである.^{1)~3)}

従来, 外圧による座屈は, 薄肉円筒形構造物の設計上重要な課題として取り上げられてきたが, その解析は等方性円筒殻のものが多く, 異方性円筒殻に関する研究としては, 厚さ方向に均質と考えた直交異方性円筒殻の座屈強度を論じた T. Hayashi と Y. Hirano⁴⁾があり, 厚さ方向の積層配列を考慮したものとしては B. P. C. Ho と S. Cheng,⁵⁾ R. M. Jones と H. S. Morgan⁶⁾ などの特殊例の報告があるのみで極めて少ない. その理由は, 任意の積層構成によるカップリング項を含む平衡方程式と境界条件を完全に満足して解析することが面倒だからである. そこで本報告では, クロスプライおよびアングルプライ積層円筒殻を例に

とって一般的に理論解析し, 積層構成, 積層数や寸法などの外圧座屈に及ぼす影響を系統的に検討した結果について述べる.

2 外圧を受ける積層複合円筒殻の基礎式

Fig. 1 に示すような積層円筒殻 (半径 R , 筒長 L , 全板厚 t) が半径方向にのみ均一な外圧力 p を受ける場合について考え, 円筒軸方向, 円周方向, 半径方向にそれぞれ x , y , z 軸をとる. また Fig. 2 に示すように, 積層円筒殻は各層とも均質な直交異方性材の N 層積層からなり, k 番目では, 繊維は円筒軸と角度

Fig. 1. Configuration and coordinate of laminated composite cylindrical shell.

† 原稿受理 昭和59年6月1日 Received June 1, 1984

* 正会員 東海大学工学部 平塚市北金目, Faculty of Engineering, Tokai University, Kitakaname, Hiratsuka

** 正会員 日本大学生産工学部 習志野市泉町, College of Industrial Technology, Nihon University, Izumi-cho, Narashino

Fig. 2. Geometry of a N -layered laminate.

θ_k の方向を向いているとする。

2・1 基礎となる関係式

解析に必要な基礎式として、まず中央面のひずみ $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ 、曲率変化 $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ と x, y, z 軸方向の座屈に伴う付加の変位成分 u, v, w の関係は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= u_{,x}, \quad \varepsilon_y^0 = v_{,y} + w/R, \quad \gamma_{xy}^0 = v_{,x} + u_{,y} \\ \kappa_x &= -w_{,xx}, \quad \kappa_y = -w_{,yy}, \quad \kappa_{xy} = -2w_{,xy} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで添字 “ x ”, “ y ” は x, y に関する偏微分を意味する。

また、膜力 N_x, N_y, N_{xy} 、モーメント M_x, M_y, M_{xy} と面内ひずみ、曲率変化の関係は、カップリング項を考慮して表すと次式となる。

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (2)$$

ここで、 A_{ij} は伸張剛性マトリックス、 D_{ij} は曲げ剛性マトリックス、 B_{ij} は伸張と曲げとのカップリング剛性マトリックスであり、それぞれ一方向強化材の繊維方向、繊維に直角方向の弾性係数 E_L, E_T 、ポアソン比 ν_L, ν_T およびせん断剛性率 G_{LT} が与えられると、積層角、積層数、積層構成などが指定されると求められる。

2・2 変位表示による平衡方程式

一般的な積層円筒殻が半径方向にのみ外圧 p を受けて座屈するときの付加の変位を用いて表した Donnell 形の平衡方程式は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} A_{11}u_{,xx} + A_{12}(v_{,xy} + w_{,x}/R) + A_{16}(v_{,xx} + u_{,xy}) \\ - B_{11}w_{,xxx} - B_{12}w_{,xyy} - 2B_{16}w_{,xxy} + A_{16}u_{,xy} \\ + A_{26}(v_{,yy} + w_{,y}/R) + A_{66}(v_{,xy} + u_{,yy}) \\ - B_{16}w_{,xxy} - B_{26}w_{,yyy} - 2B_{66}w_{,xyy} = 0 \\ A_{16}u_{,xx} + A_{26}(v_{,xy} + w_{,x}/R) + A_{66}(v_{,xx} + u_{,xy}) \\ - B_{16}w_{,xxx} - B_{26}w_{,xyy} - 2B_{66}w_{,xxy} + A_{12}u_{,xy} \\ + A_{22}(v_{,yy} + w_{,y}/R) + A_{26}(v_{,xy} + u_{,yy}) \\ - B_{12}w_{,xxx} - B_{22}w_{,yyy} - 2B_{26}w_{,xyy} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} B_{11}u_{,xxx} + B_{12}(v_{,xxy} + w_{,xx}/R) \\ + B_{16}(v_{,xxx} + u_{,xxy}) - D_{11}w_{,xxx} \\ - D_{12}w_{,xyy} - 2D_{16}w_{,xxy} + 2\{B_{16}u_{,xxy} \\ + B_{26}(v_{,xyy} + w_{,xy}/R) + B_{66}(v_{,xx} + u_{,xyy}) \\ - D_{16}w_{,xxx} - D_{26}w_{,xyy} - 2D_{66}w_{,xxy}\} \\ + B_{12}u_{,xxy} + B_{22}(v_{,yyy} + w_{,yy}/R) \\ + B_{26}(v_{,xxy} + u_{,xyy}) - D_{12}w_{,xxy} - D_{22}w_{,yyy} \\ - 2D_{26}w_{,xyy} - \{A_{12}u_{,x} + A_{22}(v_{,y} + w/R) \\ + A_{26}(v_{,x} + u_{,y}) - B_{12}w_{,xx} - B_{22}w_{,yy} \\ - 2B_{26}w_{,xy}\}/R + \bar{N}_y w_{,yy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 $\bar{p}$ を座屈時外圧として、 $\bar{N}_y$ は円周方向膜力 ($=\bar{p}R$) である。

3 外圧座屈値の解析

3・1 クロスプライ積層円筒殻の座屈特性

クロスプライ積層円筒殻は、軸方向 (0°) と円周方向 (90°) の2層を交互に積層したもので、数値計算では最内層を 0° とした場合の結果を示す。その場合には $A_{i6}=B_{i6}=D_{i6}=0$ ($i=1, 2$) となる。対称積層ではさらに $B_{ij}=0$ ($i, j=1, 2, 6$) となり、逆対称積層では伸張-曲げカップリング項 $B_{11}=-B_{22}$ のみが現れる。したがって、クロスプライ積層の場合は、後述のように境界条件と線形同次方程式(3)を満足するたわみ変形 u, v, w を用いて解けば座屈値が求められる。

単純支持端の境界条件 (S-2) として、 $x=0, L$ において

$$\left. \begin{aligned} w=0, \quad M_x=B_{11}u_{,x}-D_{11}w_{,xx}-D_{12}w_{,yy}=0 \\ v=0, \quad N_x=A_{11}u_{,x}+A_{12}(v_{,y}+w/R) \\ -B_{11}w_{,xx}=0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

を考えると、これを満足する座屈開始時のたわみ変形

$$\left. \begin{aligned} u &= u_{mn} \cos(m\pi x/L) \sin(ny/R) \\ v &= v_{mn} \sin(m\pi x/L) \cos(ny/R) \\ w &= w_{mn} \sin(m\pi x/L) \sin(ny/R) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

を座屈方程式に代入すれば、固有値方程式を解いて、座屈値 $\bar{N}_y$ が波数 m, n の関数として得られる。ここで u_{mn}, v_{mn}, w_{mn} は各座屈様式での u, v, w の変位係数である。

$$\bar{N}_y = \bar{p}R$$

$$= \left(\frac{R}{n}\right)^2 \left(T_{33} + \frac{2T_{12}T_{13}T_{23} - T_{11}T_{23}^2 - T_{22}T_{13}^2}{T_{11}T_{22} - T_{12}^2} \right) \quad (6)$$

ここで、係数 T_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} T_{11}, T_{12}, T_{22} \text{ は対称積層, 逆対称積層とも} \\ \text{に,} \\ T_{11} &= A_{11}(m\pi/L)^2 + A_{66}(n/R)^2, \\ T_{12} &= (A_{12} + A_{66})(m\pi/L)(n/R) \\ T_{22} &= A_{22}(n/R)^2 + A_{66}(m\pi/L)^2 \\ \text{であり, } T_{13}, T_{23}, T_{33} \text{ は対称積層では,} \\ T_{13} &= -A_{12}(m\pi/L)/R, \quad T_{23} = -A_{22}(n/R)/R \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$T_{33}=D_{11}(m\pi/L)^4 \\ +2(D_{12}+2D_{66})(m\pi/L)^2(n/R)^2 \\ +D_{22}(n/R)^4+A_{22}/R^2$$

逆対称積層では,

$$T_{13}=-\{A_{12}(m\pi/L)/R+B_{11}(m\pi/L)^3\}$$

$$T_{23}=-\{A_{22}(n/R)/R-B_{11}(n/R)^3\}$$

$$T_{33}=D_{11}(m\pi/L)^4 \\ +2(D_{12}+2D_{66})(m\pi/L)^2(n/R)^2 \\ +D_{22}(n/R)^4+A_{22}/R^2-2B_{11}(n/R)^2/R$$

外圧座屈値は, $\bar{p}R/E_T t$ のように無次元値で表すと, 殻の材料定数の他に形状因子 R/t , $Z=L^2/Rt$ の関数であり, 各種の m , n 値に対するその最小値が座屈値である.

3・2 アングルプライ積層円筒殻の座屈特性

($-\theta$), ($+\theta$) 層からなるアングルプライ積層では, $B_{11}=B_{12}=B_{22}=B_{66}=0$ となり, カップリング項としては, 対称積層では伸張—せん断カップリング項 A_{16} , A_{26} および曲げ—ねじりカップリング項 D_{16} , D_{26} が現れ, 逆対称積層では伸張—ねじり (せん断—曲げ) カップリング項 B_{16} , B_{26} が現れる. アングルプライ積層の場合には, 多くのカップリング項があり, 境界条件と平衡方程式の両者を厳密に満足する解析解を得ることは, 無限級数表示によらない限り難しい. 両端単純支持の境界条件 (S-2) に重点をおいて, 前述の式 (5) のたわみ変形を用いると, カップリング項が消えて, 均質な直交異方性円筒殻の場合の座屈値しか得られない. しかし, ある程度の筒長を考えた場合, 従来境界条件は外圧座屈値にあまり影響しないことが指摘されているので, 以下平衡方程式のみを完全に満足する周期解を用いて近似的に検討する.

式 (3) の Donnell 形の平衡方程式を完全に満足する下式の式 (8) の周期的座屈波形を仮定すると, この波形は指定の境界条件を一般に満足するものではないが, 通常の筒長の円筒殻では境界条件はあまり関係ないので, カップリング効果を主眼にして検討する. すなわち非対称変形座屈様式として

$$\left. \begin{aligned} u &= u_{mn} \sin\{(m\pi x/L) + (ny/R)\} \\ v &= v_{mn} \sin\{(m\pi x/L) + (ny/R)\} \\ w &= w_{mn} \cos\{(m\pi x/L) + (ny/R)\} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

を考え, 式 (3) に代入すると, 式 (3) の各項は同じ関数形となり, 変位係数のみの線形同次方程式となる. したがって, 座屈値は係数行列式から固有値として解析式で求められ, 座屈値 $\bar{N}_y$ は式 (6) と同形で得られる. ここで係数 T_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) は次のようになる.

対称積層では,

$$T_{11}=A_{11}(m\pi/L)^2+2A_{16}(m\pi/L)(n/R) \\ +A_{66}(n/R)^2 \\ T_{12}=A_{16}(m\pi/L)^2$$

$$+(A_{12}+A_{66})(m\pi/L)(n/R) \\ +A_{26}(n/R)^2$$

$$T_{22}=A_{66}(m\pi/L)^2+2A_{26}(m\pi/L)(n/R) \\ +A_{22}(n/R)^2$$

$$T_{13}=-\{A_{12}(m\pi/L)/R+A_{26}(n/R)/R\}$$

$$T_{23}=-\{A_{22}(n/R)/R+A_{26}(m\pi/L)/R\}$$

$$T_{33}=D_{11}(m\pi/L)^4+4D_{16}(m\pi/L)^3(n/R) \\ +2(D_{12}+2D_{66})(m\pi/L)^2(n/R)^2 \\ +4D_{26}(m\pi/L)(n/R)^3+D_{22}(n/R)^4 \\ +A_{22}/R^2 \quad (9)$$

逆対称積層では,

$$T_{11}=A_{11}(m\pi/L)^2+A_{66}(n/R)^2$$

$$T_{12}=(A_{12}+A_{66})(m\pi/L)(n/R)$$

$$T_{22}=A_{22}(n/R)^2+A_{66}(m\pi/L)^2$$

$$T_{13}=-\{A_{12}(m\pi/L)/R+3B_{16}(m\pi/L)^2(n/R) \\ +B_{26}(n/R)^3\}$$

$$T_{23}=-\{A_{22}(n/R)/R+B_{16}(m\pi/L)^3 \\ +3B_{26}(m\pi/L)(n/R)^2\}$$

$$T_{33}=D_{11}(m\pi/L)^4 \\ +2(D_{12}+2D_{66})(m\pi/L)^2(n/R)^2 \\ +D_{22}(n/R)^4+A_{22}/R^2 \\ +4B_{26}(m\pi/L)(n/R)/R$$

外圧座屈固有値の無次元値 $\bar{p}R/E_T t$ は材料定数と積層構成が与えられることにより, 殻の形状因子 R/t , $Z=L^2/Rt$ をパラメータにして与えられる. そして各種の波数 m , n の整数値に対する最小値が座屈値である.

4 数値計算例とその検討

計算に用いた一方向強化 CFRP 材 (繊維容積含有率 $V_f=60\%$) の弾性材料定数を次に示す.

$$\left. \begin{aligned} E_L &= 137 \text{ GPa}, E_T = 8.17 \text{ GPa} \\ G_{LT} &= 4.75 \text{ GPa}, \nu_L = 0.316, \nu_T = 0.0189 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

これは構成素材の特性が与えられれば explicit な代数式で与えられ, 実験でも確認された値である⁸⁾.

本計算例では, 全板厚 t の下で, 各構成層は等厚とし, したがって積層数 N は対称積層の場合は奇数, 逆対称積層の場合は偶数として考える. また通常の円筒殻を考え, 殻の形状因子 $R/t=100$ とすると, $Z=L^2/Rt=(L/R)^2(R/t)$ なので, $L/R>2$ とすれば $Z>400$ が通常考えられる Z の範囲である. 外圧座屈の場合には軸対称変形座屈は存在しないので, 非対称変形座屈の場合について, 以下クロスプライ積層とアングルプライ積層に分けて検討する.

4・1 クロスプライ積層円筒殻の検討

クロスプライ積層円筒殻の場合の数値計算結果を Fig. 3 に示す. 外圧座屈値 $\bar{p}$ を無次元座屈係数 $K_0=\bar{p}R/E_T t$ の形で示し, 殻の形状パラメータ $Z=L^2/Rt$ に対し同じ全板厚 t の下での積層数 N の変化による影

(a) Symmetric laminate.

(b) Antisymmetric laminate.

Fig. 3. Variation of buckling coefficients of cross-ply laminated cylindrical shells with shape parameter Z .

響を $R/t=100$ の場合について示している。

(1) 形状パラメータ Z の影響 対称積層 [Fig. 3 (a)], 逆対称積層 [Fig. 3 (b)] の場合ともに, Z の増加にともない K_0 値は低下している. 通常の円筒殻で $Z > 200$ とすれば, K_0 値の低下は直線的なので $K_0 = \alpha/Z^p$ の形式で表される.

(2) 積層数 N の影響 対称積層の場合には, カップリング項 $B_{11} (= -B_{22})$ がないため, 同一の全板厚 t の下で積層数 N の K_0 値に及ぼす影響はあまり大きくないと予想された. しかし N が奇数の場合には, クロスプライ比 M (奇数番目の層の厚さの和と偶数番目の層の厚さの和との比) の変化による各種剛性値の変化が K_0 値に及ぼす影響が大きく, 積層数の減少による K_0 値の低下が顕著に現れ, Z の増加とともにその差は大きくなっていく.

逆対称積層の場合には, 積層数に無関係にクロスプライ比 M は一定値 1.0 となるが, 積層数が少ないと, 中央面と中立面とが異なるために生ずるカップリング

効果が大いなので K_0 値は低下し, 特に $N=2$ の場合の低下が著しい.

(3) 座屈波形の影響 最小座屈値を与える座屈波数を Fig. 3 中に記入したが, 軸方向半波数 m は対称積層, 逆対称積層に無関係ですべての積層数 N , 形状パラメータ Z に対して 1 であるが, 円周方向波数 n は N および Z の増加とともに減少する.

4.2 アングルプライ積層円筒殻の検討

アングルプライ積層の場合の外圧座屈値 $\bar{p}$ を座屈係数 $K_0 = \bar{p}R/Ert$ の形で示し, 積層角 θ との関係を図 4.

(a) Symmetric laminate.

(b) Antisymmetric laminate.

Fig. 4. Variation of buckling coefficients of angle-ply laminated cylindrical shells with lamination angle θ .

4 に示す。 K_0 値はクロスプライ積層のように、 $Z > 200$ の範囲では $K_0 = \alpha/Z^\beta$ の形で表されるので、一例として $Z=900$ の場合を示す。

本解析結果によれば、直交異方性 ($N=\infty$) の場合は均質と考えた場合に相当し、境界条件 (S-2) に重点をおいた場合の結果と同じになるが、積層数が有限の場合の積層構成と積層数が座屈値に及ぼすカップリング効果を説明できるようになった。以下、対称積層 [Fig. 4 (a)] と逆対称積層 [Fig. 4 (b)] について検討する。

(1) 積層角 θ の影響 積層角の変化による K_0 値は、対称積層、逆対称積層の場合ともに、 θ の増加にともなって増加し、 $\theta=0^\circ$ のときに最小値を、 $\theta=90^\circ$ のときに最大値を示す。

(2) 積層数 N の影響 カップリング効果による K_0 値の低下は、 $\theta=0^\circ$ 、 90° の場合は無関係であるが、その中間の巻き角度の場合には、対称積層および逆対称積層ともに、積層数が少なくなると顕著に現れる。 $N=2$ の逆対称積層の場合には、特に低下は著しい。また積層数が増すとともにカップリング効果は減少し、かなり均質な直交異方性の場合に近づき、積層数の極めて少ない場合を除き、対称積層か逆対称積層かの積層構成による K_0 値の相違はなくなるようになる。

(3) 座屈波形の影響 座屈時の軸方向半波数 m は積層角 θ に無関係に一定値 1 である。また、円周方向波数 n は θ の増加とともに減少するが、積層数の変化による差は現れない。

5 む す び

外圧を受ける積層複合円筒殻について、Donnell 形の方程式により、座屈特性に及ぼすカップリング効果の影響を調べ、積層数の少ない場合には、このカップリング効果の影響が大きいことを示した。

クロスプライ積層の場合、筒長の変化による座屈値は、対称積層ではクロスプライ比の変化が、逆対称積層ではカップリング効果が大きく影響し、ともに積層数の少ない場合の低下が著しい。

アングルプライ積層の場合、積層角の変化による座屈値は、 0° と 90° の場合を除き、その中間の巻き角度 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ の場合にはカップリング効果のため、積層数の減少により大きく低下し、特に 2 層の逆対称積層の場合は著しく低下した。カップリング項を含む境界条件と平衡方程式の両者を完全に満足する解は無級数表示によらない限り難しいが、外圧座屈の場合、通常の筒長をもつ円筒殻では境界条件の影響はあまりないことが指摘されているので、本解析によりカップリング効果を推定できると思われる。

最後に、本研究は昭和58年度文部省科学研究費補助金総合研究(A)によるものであることを記して感謝いたします。

(昭和59年3月23日 第13回 FRP シンポジウムにて講演)

参 考 文 献

- 1) 植村益次, 日本航空宇宙学会誌, **27**, 382 (1979).
- 2) 福永久雄, 植村益次, 材料, **28**, 1146 (1979).
- 3) 粕谷平和, 植村益次, 日本航空宇宙学会誌, **30**, 664 (1982).
- 4) T. Hayashi and Y. Hirano, Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci., **6**, 18 (1963).
- 5) B. P. C. Ho and S. Cheng, AIAA J., **1**, 1603 (1963).
- 6) R. M. Jones and H. S. Morgan, AIAA J., **13**, 664 (1975).
- 7) R. M. Jones, "Mechanics of Composite Materials", Chap. 4 (1975) McGraw-Hill, New York.
- 8) 植村益次, 山田直樹, 材料, **24**, 156 (1975).