非破壊検査を伴う疲労き裂進展過程の 信頼性解析へのマルコフ連鎖の応用†

島田 佳弘* 中川 隆夫** 徳納 久睦**

Application of Markov Chain to the Reliability Analysis of Fatigue Crack Propagation Process with Nondestructive Inspection

by

Yoshihiro SHIMADA*, Takao NAKAGAWA** and Hisanobu TOKUNO**

Even in a structure manufactured under complete quality control, it is impossible to exclude some defects which initiate cracks in the early stage of their lives. Consequently, the non-destructive inspection (NDI) is ordinarily performed on the structures which require safety.

In the present paper, by applying the initial crack distribution and the stochastic matrix(developed in the previous paper) to the crack propagation process during NDI, the probability of failure was calculated in both cases of "repair model" and "replacement model". Then, the reliabilistic analysis was performed for a structure subjected to NDI, taken as a model of fracture. The effect of NDI as well as that of the variability in crack propagation on the propability of failure were also studied.

キー・ワード：信頼性解析，疲労き裂進展，非破壊検査，マルコフ連鎖，推移確率行列

1 緒 言

材料の強度は、本来、統計的に変動する性質を有しており、これによって作られた構造部材の外力作用によるき裂進展挙動も本質的に確率的性質をもち、き裂進展の過程は確率過程と考えられる。疲労き裂進展に関する研究は非常に多く、詳細な成果が発表されているが、き裂長さまたはその状態を確率変数として取扱った研究は未だきわめて少ない。Bogdanoff^{1)~4)}らは疲労き裂進展を一種のマルコフ過程と考え、き裂の初期分布を与え、マルコフ連鎖(推移確率行列を有する不連続マルコフ過程)の理論を用いて、任意の時刻におけるき裂長さの平均値、分散および分布、ならびに所定のき裂長さに達する繰返し数(き裂進展寿命)の平均値、分布をもとめた³⁾⁴⁾。筆者らはこれを参考にして同様の研究を行い、疲労き裂進展の過程がマルコフ連鎖における推移確率行列の要素 p および q の比 $r=p/q$ が一定の過程であることを示し、マルコフ連鎖の疲労き裂進展への応用の可能性を実証した⁵⁾。本研究はこれをさらに発展させ、非破壊検査を伴う場合にこの理論を適用し、破壊確率～時間関係ならびにこれに及ぼす検査回数⁶⁾の影響につき研究したものである。

充分な品質管理の下で製造された構造物といえども、早期にき裂を発生させるような欠陥を皆無にすることは不可能である。したがって、安全性が要求されるよ

うな構造物には非破壊検査(以下 NDI と略す)が実施されるのが常である。NDI の検出能力(detectability)は多分に確率的な性格を有しており、したがって NDI の効果を評価するには確率統計的な手法を用いる必要がある⁷⁾⁸⁾。北川らは NDI を考慮した信頼性解析で条件付確率を用いた Shinozuka の方法を体系だてて発展させ、“補修モデル”と“部品交換モデル”⁹⁾¹⁰⁾の二つの場合に分けて破壊確率を求める式を導いた。また Bogdanoff は上述した離散的マルコフ過程の理論を拡張して推移確率行列を用いて NDI を受ける場合の破壊確率を求める計算式を“補修モデル”の場合について導いているが、“部品交換モデル”については言及していない。

本論文では、推移確率行列を用いて“補修モデル”および“部品交換モデル”の各場合について破壊確率を求める式を示し、NDI を受ける構造物の信頼性解析を行い、(i) NDI が破壊確率に及ぼす影響、および(ii)き裂進展の変動性が破壊確率に及ぼす影響の二つについて研究した。

2 理 論

2.1 破壊モデル

対象として鋼構造物を想定する。Fig.1 のような半径 a_0 の半円型表面き裂を仮定する。き裂は相似形を保ちながら進展するものとする。 $a=t$ (板厚) となっ

† 原稿受理 昭和59年5月24日 Received May 24, 1984

* 神戸大学大学院 神戸市灘区六甲台町, Graduate School, Kobe University, Rokkodai-cho, Nada-ku, Kobe

** 正 会 員 神戸大学工学部 神戸市灘区六甲台町, Faculty of Engineering, Kobe University, Rokkodai-cho, Nada-ku, Kobe

Fig. 1. The model of fracture.

たときに内容物が流出することをもって破壊とする。

2・2 確率的モデル

前報⁵⁾で用いたマルコフ連鎖の理論を用い、すなわち、推移確率行列 (stochastic matrix) でき裂進展の過程をモデル化する。推移確率行列を用いて系の進行を確率的に規定するから、き裂長さの中心傾向を規定する Paris-Erdogan 式等の関係を用いないのがこの理論の特徴である。

2・3 非破壊検査 (NDI) への応用

2・3・1 供用中検査 (ISI) を伴う場合 欠陥発見確率は次のように表される。

$$D_j = \text{Prob}[\text{detectable crack length } a_j] \quad (1)$$

き裂長さ a_{i-1} まで発見できず、き裂長さ a_i ではじめて発見可能とすると、 $D(j)$ は式(2)で表される。

$$\left. \begin{aligned} D_j &= 0 & (j=1, 2, \dots, i-1) \\ 0 \leq D_j \leq 1 & & (j=i, i+1, \dots, b-1) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで b は限界き裂状態である。以下、これを“補修モデル”と“部品交換モデル”の二つの場合に分けて考える。

(a) 補修モデル このモデルでは、検査して補修した後は無欠陥状態となる。はじめにき裂状態の初期分布を次のように与える。すなわち、

$$P_0 = \{p_0(1), p_0(2), \dots, p_0(b)\} \quad (3)$$

ここで添字 0 は時刻を、() 内の数字 1, 2, ..., b はき裂長さの状態を表す。つぎに確率モデルとしてマルコフ連鎖を用い、その推移確率行列を次式のように与える。すなわち、

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{b-1} & q_{b-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

ここで、 p_j はき裂長さ a_j に留まる確率、 q_j はき裂長さ a_j より a_{j+1} に移る確率であり、 $p_j + q_j = 1$ である。(き裂の状態は一種の損傷状態であり、各応力繰返しによる単位損傷の累積と考える。き裂長さ a_j は累積損傷 d_j に対応し、 d_j の進行は累積的であるから、単調増加であって後もどりはしない。すなわち、この行列では、 $j \rightarrow j-1$ のような変化はない。)

マルコフ連鎖の理論より、時刻 x_1 で検査するときき裂状態確率ベクトルは

$$P_{x_1} = \{p_{x_1}(1), p_{x_1}(2), \dots, p_{x_1}(b)\} = P_0 P^{x_1} \quad (5)$$

である。時刻 x_1 で検査し補修した直後のき裂状態確率ベクトルは

$$P_{01} = \{p_{01}(1), p_{01}(2), \dots, p_{01}(b)\} \quad (6)$$

となる(添字 01 の“0”は初期分布を表し、“1”は供用中を表す)。このモデルではき裂は発見されると補修されてき裂の存在しない状態になると仮定するので、時刻 01 においては、長さ a_j のき裂が存在する確率とその長さのき裂を発見できない確率 $1 - D_j$ の積が、時刻 01 におけるき裂長さの初期分布を与えることから

$$p_{01}(j) = (1 - D_j) p_{x_1}(j) \quad (7)$$

となる。検査の後、任意の時刻 x では

$$P_x = \{p_x(1), p_x(2), \dots, p_x(b)\} = P_{01} P^{x-x_1} \quad (8)$$

となる。時刻 x における破壊確率は

$$P_f = p_x(b) \quad (9)$$

(瞬間) 破壊率 (hazard rate, risk or failure rate) は

$$h = 1 - \{1 - p_x(b)\} / \{1 - p_{x-1}(b)\} \quad (10)$$

によりもとめられる。

(b) 部品交換モデル このモデルは、検査して補修した後はその箇所に初期き裂分布 P_0 に従うき裂が 1 個存在する状態となる。部品交換時 (時刻 01 = x_1) におけるき裂状態確率ベクトルを

$$P_{01}' = \{p_{01}'(1), p_{01}'(2), \dots, p_{01}'(b)\} \quad (11)$$

とおく。き裂を発見し修理する確率を P_{r1} とおくと P_{r1} は 1 から b までのそれぞれのき裂状態にある確率とその発見確率の積の和で与えられることから

$$P_{r1} = \sum_{j=1}^b D_j p_{x_1}(j) \quad (12)$$

したがって、部品交換時における長さ a_j のき裂が存在する確率 $p_{01}'(j)$ は、き裂を発見し一回修理したことによって初期き裂状態確率 $p_0(j)$ が再現される確率 $P_{r1} p_0(j)$ と時刻 x_1 に長さ a_j のき裂が存在し検査によって発見されなかった確率 $(1 - D_j) p_{x_1}(j)$ の和で与えられる。すなわち

$$p_{01}'(j) = P_{r1} p_0(j) + (1 - D_j) p_{x_1}(j) \quad (13)$$

となる。検査の後、時刻 x ではき裂状態確率ベクトルは

$$P_x' = \{p_x'(1), p_x'(2), \dots, p_x'(b)\} = P_{01}' P^{x-x_1} \quad (14)$$

となり、破壊確率は

$$P_f = p_x'(b) \quad (15)$$

となる。

2・3・2 供用前検査 (PSI) を伴う場合 欠陥発見確率は

$$D_j' = \text{Prob}[\text{detectable crack length } a_j] \quad (16)$$

$$D_j' = 0 \quad (j=1, 2, \dots, i-1) \quad (17)$$

$$0 \leq D_j' \leq 1 \quad (j=i, i+1, \dots, b)$$

である。

(a) 補修モデル き裂状態確率ベクトルは供用前

検査の後

$$P_{00} = \{p_{00}(1), p_{00}(2), \dots, p_{00}(b)\} \quad (18)$$

(添字 00 の前の “0” は初期分布を表し、あとの “0” は供用前を示す) となる。ここで式(7)と同様

$$p_{00}(j) = (1 - D_j') p_0(j) \quad (19)$$

である。時刻 x_1 で検査の後ばき裂状態確率ベクトルは

$$P_{x_1} = P_{00} P^{x_1} \quad (20)$$

となる。(以下使用中検査と同じ手順)

(b) 部品交換モデル 供用前検査後のき裂状態確率ベクトルは

$$P_{00}' = \{p_{00}'(1), p_{00}'(2), \dots, p_{00}'(b)\} \quad (21)$$

となり、式(13)と同様に

$$p_{00}'(j) = P_{r0} p_0(j) + (1 - D_j') p_0(j) \quad (22)$$

$$P_{r0} = \sum_{j=1}^{b-1} D_j' p_0(j) \quad (23)$$

Fig. 2. The flow chart of computation.

となる。時刻 x_1 で検査後のき裂状態確率ベクトルは

$$P_{x_1} = P_{00}' P^{x_1} \quad (24)$$

となる。(以下、供用中検査を伴う場合と同じ手順) 以上の計算手順を Fig. 2 にフローチャートで示す。

3 解析方法および解析のための入力値

ここでは、板厚を 20 mm, すなわち、限界き裂状態 b に相当する限界き裂長さを $a = 20$ mm とする。

また、き裂状態の初期分布 P_0 として Fig. 3 に示すデータを用いる。これを表にしたものが Table I である。初期き裂長さを $a_0 = 5$ mm とした。(これは初期き裂状態 1 に対応する。) き裂進展データとしては適当なものが得られなかったので、Paris-Erdogan 式 $da/dN = C(\Delta K)^m$ を使い、 $C = 1.062 \times 10^{-13}$, $\Delta\sigma =$

Fig. 3. The data of cracks (after Kashiwagi).

Table I. Assumed distribution of initial crack.

a (mm)	Probability
0.5	0.452
1.0	0.167
1.5	0.136
2.0	0.081
2.5	0.053
3.0	0.037
3.5	0.020
4.0	0.022
4.5	0.017
5.0	0.015

Table II. Mean values of number of cycles to the specified crack length.

a (mm)	N (cycles) $\times 10^5$
1.0	3.632
1.5	5.241
2.0	6.200
2.5	6.855
3.0	7.388
3.5	7.714
4.0	8.017
4.5	8.267
5.0	8.480
20.0	10.440

156.8N・mm⁻²を採用してデータを作成した。き裂長さ $a=a(N)$ (N は繰返し数) に対応する繰返し数 N の平均値を Table II に示す。ここでは、推移確率行列を用いて解析を行う場合、繰返し数 N をそのまま状態のステップ数 x に用いると、計算時間が長くなるので、ここでは 2000 cycles を 1 ステップ数とした。すなわち $N=2000x$ である。前報の結果から、疲労き裂の進展は $r_j=p_j/q_j=\sigma_x^2/\bar{x}$ =一定なる過程であるという結果が得られているので、ここでは $r=5$ および 10 を与えて計算した。この計算によるステップ数の平均 $\bar{x}$ と標準偏差 σ_x の計算値を Table III と IV に示す。前報でき裂状態 d に対する寿命 N_f に対し

$$\text{期待値: } E(N_f) = d - 1 + \sum_{j=1}^{d-1} r_j \quad (25)$$

$$\text{分散: } \text{Var}(N_f) = \sum_{j=1}^{d-1} (1 + r_j) r_j \quad (26)$$

が得られている。式(25)を用いて、限界き裂長さ $a=20$ mm に達するときのステップ数 x の平均値 522.0 を満足する整数値 d を、 $r=5$ および 10 の場合について計算するとそれぞれ 88 および 49 となり、これが推移確率行列の大きさを与える。式(25)および(26)から各 j に対する r_j および p_j の値をもとめると Table V と VI のようになる。き裂状態の初期分布ベクトル P_0 の各要素については、き裂状態 1, 2, ..., b に対応するき裂長

Table III. Mean variance and coefficient of variation of the crack propagation life ($r=5$).

a (mm)	$\bar{x}$	σ_x^2	$\sigma_x/\bar{x}$
0.5	0.0	0	—
1.0	181.6	908	0.166
1.5	262.1	1311	0.138
2.0	310.0	1550	0.127
2.5	342.8	1714	0.121
3.0	366.9	1835	0.117
3.5	385.7	1929	0.114
4.0	400.9	2004	0.112
4.5	413.4	2067	0.110
5.0	424.0	2120	0.109
20.0	522.0	2610	0.098

Table IV. Mean variance and coefficient of variation of the crack propagation life ($r=10$).

a (mm)	$\bar{x}$	σ_x^2	$\sigma_x/\bar{x}$
0.5	0.0	0	—
1.0	181.6	1816	0.235
1.5	262.1	2621	0.195
2.0	310.0	3100	0.180
2.5	342.8	3428	0.171
3.0	366.9	3669	0.165
3.5	385.7	3857	0.161
4.0	400.9	4009	0.158
4.5	413.4	4134	0.156
5.0	424.0	4240	0.154
20.0	522.0	5220	0.138

Table V. Elements in the stochastic matrix ($r=5$).

j	$r_j=p_j/q_j$	p_j
1~30	5.053	0.8348
31~44	4.750	0.8261
45~52	4.988	0.8330
53~57	5.560	0.8476
58~61	5.025	0.8340
62~64	5.267	0.8404
65~67	4.067	0.8026
68, 69	5.250	0.8400
70, 71	4.300	0.8113
72~87	5.125	0.8367
88	—	1.0000

Table VI. Elements in the stochastic matrix ($r=10$).

j	$r_j=p_j/q_j$	p_j
1~16	10.350	0.9119
17~24	9.063	0.9006
25~29	8.580	0.8956
30~32	9.933	0.9085
33, 34	11.050	0.9170
35, 36	8.400	0.8936
37	14.200	0.9342
38	11.509	0.9200
39	9.600	0.9057
40~48	9.889	0.9082
49	—	1.0000

さをとる確率は Table I から計算してこれを求めた。本研究では欠陥発見確率 $D=0.9$ および 0.99 とした。また、発見可能な限界き裂長さを $a_d=2, 3, 4$ および 5 mm とした。検査の回数 n は $0 \sim 6 \times 10^5$ cycles の間の (PSI の回数) + (ISI の回数) とした。

4 結果 (解析例)

Fig. 4 は補修モデルで $D=0.9$, $a_d=3$ mm の場合

Fig. 4. P_f - N curves. (Comparison between $r=5$ and 10: Repair model.)

の破壊確率 P_f と繰返し数 N の関係を示し、パラメータに検査回数 n をとっている。実線は $r=5$ 、破線は $r=10$ の場合の結果である。Table III および IV から $r=5$ の場合に比べ $r=10$ の場合の方が、より分散が大であることから破壊確率は大となる。計算結果より、検査回数の増加に伴い、破壊確率の値は下がり両者の破壊確率の差がひろがっているのが見られる。

Fig. 5 と 6 は破壊率 h と繰返し数 N の関係（パラメータは n ）を示し、このうち、Fig. 5 は $r=5$ 、Fig. 6 は $r=10$ の場合である。検査回数の増すにつれて破壊率は減少している。両図の曲線の形はほとんど同様であるが高さが異なっている。

Fig. 7 はやはり $P_f \sim N$ の関係を示し、 $D=0.9$ 、 $a_d=3\text{ mm}$ 、 $r=5$ で、補修モデル（実線）と部品交換モ

Fig. 5. Hazard rate vs. number of cycles ($r=5$).

Fig. 6. Hazard rate vs. number of cycles ($r=10$).

Fig. 7. $P_f \sim N$ curves. (Comparison between repair and replacement models.)

Fig. 8. $P_f \sim N$ curves. (Comparison between initial crack length $a_0=3$ and 4 mm .)

デル（破線）を比較したものである。補修モデルにおける破壊確率は部品交換モデルのそれより低く、検査回数の増すほどこの傾向は著しくなる。

Fig. 8 も $P_f \sim N$ 関係を示し、 $D=0.9$ 、 $a_d=5\text{ mm}$ 、 $r=5$ の場合における初期き裂長さ $a_0=3\text{ mm}$ （実線）と 4 mm （破線）を比較したものである。繰返し数の小さいところでは両者の破壊確率の値に著しい差がみられるが、繰返し数の増すとともにその差は小さくなる。

Fig. 9 はやはり $P_f \sim N$ 関係（パラメータ、 n ）で $r=5$ の場合であり、 $D=0.9$ 、 $a_d=3\text{ mm}$ （実線）と $D=0.99$ 、 $a_d=5\text{ mm}$ （破線）とを比較したものである。検査回数の増すほど両者の曲線は接近し、 $n=10$ 回では破壊確率の値は非常に近くなっている。このことは

Fig. 9. P_f - N curves. (Comparison between $a_d=3$ mm, $D=0.9$ and $a_d=5$ mm, $D=0.99$.)

コストの面から NDI の目指す一つの方角を示唆しているようである。

5 結 言

Bogdanoff らの理論を参考にした前報の研究の応用の一例として、本報ではマルコフ連鎖の考えを疲労き裂進展過程に用い、推移確率行列の要素の比 $r=p/q$ を一定とした解析を行い、非破壊検査（供用中および供用前）を伴う場合へのこの理論の応用について記し、解析例と計算結果を示した。得られた結論を以下に示す。

(1) 前報で提案したマルコフ連鎖による疲労き裂進展の信頼性解析手法は本報で示した非破壊検査を伴う場合にも適用可能である。

(2) 検査回数の増加に伴い、補修モデルでは $r=5$ と $r=10$ の両者間の破壊確率の差はひろがり、前者の破壊確率は後者のそれより低い。

(3) 破壊率（リスク）に関しては両者で傾向は同様であるが、絶対値は幾分異なる。

(4) 補修モデルの破壊確率は部品交換モデルのそれより低く、両者間の差は検査回数の増加とともに大き

くなる。

(5) 初期き裂長さの影響については、これの大きいほど破壊確率は大い。寿命の初期にこの差は著しいが、繰返し数の増すとともにこの影響は少なくなる。

(6) 検査可能な最小き裂長さが小さく、き裂発見確率も小さい場合には最小き裂長さが大きく、発見確率も大きい場合にくらべて破壊確率は小さいが、検査回数を増すほど両者の差はなくなる。

(昭和58年12月1日 第5回設計における信頼性工学シンポジウムにて講演)

参 考 文 献

- 1) J.C. Halpin ほか, AFML, TR-72-289 W-D AFB (1972).
- 2) D.G. Ford, ARL-STRUC. REP-369 (1978); -379 (1979); -382 (1980).
- 3) J.L. Bogdanoff, J. Appl. Mech., **45**, 246 (1978); J. L. Bogdanoff, J. Appl. Mech., **45**, 733 (1978); J. L. Bogdanoff and W. Krieger, J. Appl. Mech., **45**, 251 (1978); J.L. Bogdanoff and F. Kozin, J. Appl. Mech., **47**, 40 (1980).
- 4) J.L. Bogdanoff and F. Kozin, Engng. Fract. Mech., **14**, 59 (1981).
- 5) 島田佳弘, 中川隆夫, 徳納久睦, 材料, **33**, 475 (1984).
- 6) 島田佳弘, 中川隆夫, 徳納久睦, 第5回設計における信頼性工学シンポジウム前刷, p. 6 (1983).
- 7) 板垣 浩, 尾崎文夫, 根本知明, 日本造船学会論文集, 139, 307 (1976).
- 8) 板垣 浩, 豊田政男, 真島 篤, 朝田洋雄, 日本造船学会論文集, 144, 297 (1981).
- 9) 北川英夫, 久田俊明, 日本機械学会講演論文集, No. 760-12, 320 (1976); No. 770-2, 300 (1977); No. 770-11, 65 (1977).
- 10) 北川英夫, 久田俊明, 日本機械学会論文集, **45**, 1033 (1979).
- 11) 例えば, 塩見 弘, “信頼性工学入門”, p. 96 (1967) 丸善.
- 12) 柏木晴夫, 日本機械学会誌, **80**, 545 (1977).