大たわみ変形の簡易推定法についての一提案[†]

——三点曲げ試験——

大 槻 敦 巳*

A Simple Reduction Method for Estimating Large Deflection Behavior
——Three-Point Bending Test——

by

Atsumi OHTSUKI*

It is very important industrially to estimate the degree of large deflection appearing in such members as a plate spring, plastics and so on. In this report, the problem of large deflection of a simply supported beam in a symmetrical three-point bending test was treated. It was shown that the desired specific quantities such as maximum deflection, maximum curvature, maximum bending stress and end slope, which are especially matters of great concern in the material testing, were able to be predicted easily from a conventional linear bending theory and two reduction factors derived here newly.

For the convenience of applications, the nomographs of the reduction factors were described graphically in terms of the vertical load, the large deflection at midpoint and the end slope.

An experimental investigation of large deflection of a PVC thin plate was performed to confirm the availability of the newly proposed reduction method. The experimental results obtained were in good agreement with the predicted ones by the reduction method. Therefore, the simple reduction method can be put into practical use.

キー・ワード：大たわみ変形，三点曲げ試験，簡易推定法，板ばね，プラスチック

1 は し が き

機械的伸び計やコンパレータなどを始めとして各種の計測機器に板ばねが広く利用されている。板ばねの特長の一つは小さな負荷に対しても大きなたわみ変形を示すことであり，機器精度の向上を図るにはこうした大変形挙動を正しく知る必要があるが，その解析には従来の線形曲げ理論が適用できず，厳密な非線形曲げ解析を要する。また，近年機械材料，電気材料，建築材料として工業界で用途の拡大しているプラスチックのような高分子材料や紙，布などといった材料もそうした大たわみ変形特性を有することが知られている。したがって，一般的な観点から材料の示す大たわみ変形挙動の把握は工業的に重要と考えられる。

材料の機械的性質や変形挙動を調べる代表的方法として三点曲げ試験法があり，この試験法において生ずる梁材料の大たわみ変形については既に Conway,¹⁾ Frisch-Fay,²⁾ 大槻³⁾によってある程度の理論的解析がなされており，特に大槻の解析では実験との比較も行い，導出した大たわみ理論の適用性も確認している。したがってこうした解析理論を用いれば，大たわみ変

形状態における梁の任意位置に関する変形諸量（たわみ角，たわみ曲線傾き，たわみ，曲率，曲げ応力など）を正確に知ることができるが，概して理論解は複雑であり，手軽に応用できるとはいえない。さらに実際の材料試験法においては大たわみ変形状態における梁の特定の変形諸量，例えば支点でのたわみ角や梁中央での最大たわみ，最大曲率，最大曲げ応力などを知ることと十分である場合も多いと思われ，こうした特定の量だけでも簡便に知ることができれば試験法上利するところ大であろうと考える。以上の認識から，本資料は著者の既解析の拡張理論として支点の摩擦作用の影響を考慮した対称三点大たわみ曲げ理論を導出するとともに，その厳密大たわみ理論を基礎に大たわみ変形時の特定の変形諸量を従来の簡単な線形曲げ理論を利用した換算法により容易に推定することができるとした簡易推定法について検討したもので，換算に必要な換算係数式を導くとともに利用の便を考慮して換算係数に関する各種の計算図表の例を提示した。さらに，この推定法の有効性を確かめるため一つの適用例を示した。

[†] 原稿受理 昭和60年3月12日 Received Mar. 12, 1985

* 正会員 名城大学理工学部 名古屋市中白区塩釜口，Faculty of Science and Technology, Meijo University, Shiogamaguchi, Tenpaku-ku, Nagoya

2 対称三点大たわみ曲げ変形の簡易推定法

微小変形領域の特定の変形諸量は線形曲げ理論による簡単な数式計算により求めることができる。一方大たわみ変形領域では計算は複雑となるが、た円積分を用いた理論解を用いて同じく特定変形諸量を求めることが可能である。ところで、微小変形領域に対して成立する従来の線形曲げ理論を直接に大たわみ変形領域にまで適用すれば、当然のごとく大きな誤差を惹起するが、この誤差の程度は上述の厳密大たわみ理論により検証でき、したがってこの誤差量があらかじめ判明していれば、複雑な大たわみ理論を用いることなく従来の簡便な線形理論から容易に未知の大たわみ変形諸量を推定することができるはずである。ここでは換算係数なる量を用いた大たわみ変形時の特定変形諸量(反力支点たわみ角、最大たわみ、最大曲率、最大曲げ応力)の簡易推定法について検討する。

2.1 基礎式

Fig. 1 に示すような両端単純支持梁の中央点Cに集中荷重 P を負荷したとき、固定反力支点A, Bに摩擦力の作用する対称三点大たわみ曲げにおいて、座標原点をAとし、水平方向に距離 x 、鉛直方向にたわみ y をとり、たわみ角を θ 、曲率 $1/R$ 、たわみ曲線の円弧長さを s 、摩擦係数を μ 、摩擦角を $\gamma (= \tan^{-1}\mu)$ とする。また反力と負荷両支点間距離を l とし、梁の

Fig. 1. Schematic illustration of large deflection in a symmetrical three-point bending test.

縦弾性係数、断面二次モーメントおよび梁の中立面から最外表面までの距離をそれぞれ E , I , e として、梁の中央左半分について無次元解析すれば、任意位置に関する無次元円弧長さ ζ および無次元たわみ η 、無次元水平距離 ξ 、無次元曲率 $1/\rho$ 、最外表面の曲げ応力 σ はそれぞれ

$$\zeta = \frac{s}{l} = \beta \left[F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - F(k, \psi) \right] \quad (1)$$

$$\eta = \frac{y}{l} = \beta [2k \sin(\theta_0 - \gamma) \cdot \cos \psi - \cos(\theta_0 - \gamma) \cdot \Phi(\psi)] \quad (2)$$

$$\xi = \frac{x}{l} = \beta [2k \cos(\theta_0 - \gamma) \cdot \cos \psi + \sin(\theta_0 - \gamma) \cdot \Phi(\psi)] \quad (3)$$

$$\frac{1}{\rho} = l \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{2}{\beta} k \cos \psi \quad (4)$$

$$\sigma = \left(\frac{Ee}{l} \right) \cdot \frac{2}{\beta} k \cos \psi \quad (5)$$

ここで

$$\begin{cases} \alpha = Pl^2/(2EI), \quad \beta = \sqrt{\cos(\theta_0 - \gamma)/2}, \\ k = \sqrt{(1 + \sin \gamma)/2} \\ \Phi(\psi) = 2[E(k, \pi/2) - E(k, \psi)] \\ \quad - [F(k, \pi/2) - F(k, \psi)] \\ \psi = \cos^{-1} \left[\sqrt{\frac{\sin(\theta_0 - \gamma - \theta) + \sin \gamma}{1 + \sin \gamma}} \right] \quad [0 \leq \theta \leq \theta_0] \end{cases}$$

なお、 $F(k, \pi/2)$, $F(k, \psi)$ は Legendre-Jacobi のた円積分第1種(完全, 不完全)を、 $E(k, \pi/2)$, $E(k, \psi)$ は同た円積分第2種(完全, 不完全)を表す。

2.2 換算係数 k_1 , k_2 の定義および計算図表

梁中央部の負荷支点Cにおける無次元最大たわみ $\eta(1) (= y_{\max}/l$, $y_{\max}$ は実最大たわみ)は一般式の式(2), (3)より

$$\eta(1) = \frac{2k \sin(\theta_0 - \gamma) \cdot \cos \psi_c - \cos(\theta_0 - \gamma) \cdot \Phi(\psi_c)}{2k \cos(\theta_0 - \gamma) \cdot \cos \psi_c + \sin(\theta_0 - \gamma) \cdot \Phi(\psi_c)} \quad (6)$$

ここで、 $\psi_c = \psi|_{\theta=0}$

反力支点Aにおけるたわみ曲線傾き $\eta'(0)$ は

$$\eta'(0) = \tan \theta_0 \quad (7)$$

さらに、梁中央部の点Cにおける無次元最大曲率 $1/\rho(1) (= l/R_{\max})$ は式(3), (4)より

$$\frac{1}{\rho(1)} = \frac{2}{\beta} k \cos \psi_c \quad (8)$$

また、点Cにおける梁最外表面に生ずる最大曲げ応力 $\sigma_{\max}$ は式(3), (5)より

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{Ee}{l} \right) \cdot \frac{2}{\beta} k \cos \psi_c \quad (9)$$

一方、従来の線形曲げ理論に基づく無次元最大たわみ $\eta_0(1)$ 、反力支点におけるたわみ曲線傾き $\eta'_0(0)$ 、無次元最大曲率 $\{1/\rho(1)\}_0$ 、最大曲げ応力 $(\sigma_{\max})_0$ は

$$\eta_0(1) = \frac{Pl^2}{6EI} = \frac{\alpha}{3} \quad (10)$$

$$\eta'_0(0) = \frac{Pl^2}{4EI} = \frac{\alpha}{2} \quad (11)$$

$$\left\{ \frac{1}{\rho(1)} \right\}_0 = \frac{Pl^2}{2EI} = \alpha \quad (12)$$

$$(\sigma_{\max})_0 = \left(\frac{Pl}{2I} \right) e = \left(\frac{Ee}{l} \right) \alpha \quad (13)$$

以上の両理論を比較することによって、大たわみ変形の解析に線形理論を用いたときの誤差を見積ることができる。ここでは無次元最大たわみに関して k_1 、反力支点におけるたわみ曲線傾きに関して k_2 なる換算係数を次のように定義する。

$$k_1 = \frac{\eta(1)}{\eta_0(1)}, \quad k_2 = \frac{\eta'(0)}{\eta'_0(0)} \quad (14)$$

したがって、こうした換算係数 k_1 , k_2 の各値が明らかとなれば、大たわみ変形時の特定変形諸量を線形理

論の計算式(10)~(13)を用いて次式により容易に推定することが可能となる．すなわち梁中央部における無次元最大たわみ $\eta(1)$ および実最大たわみ $y_{\max}$ は

$$\eta(1) = \eta_0(1) \cdot k_1 = \left(\frac{\alpha}{3}\right) k_1, \quad y_{\max} = \eta(1) \cdot l \quad (15)$$

反力支点におけるたわみ角 θ_0 は

$$\theta_0 = \tan^{-1}[\eta'_0(0) \cdot k_2] = \tan^{-1}\left[\left(\frac{\alpha}{2}\right) k_2\right] \quad (16)$$

また、梁中央部における無次元最大曲率 $1/\rho(1)$ および実最大曲率 $1/R_{\max}$ は

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho(1)} &= \left\{ \frac{1}{\rho(1)} \right\}_0 \cdot \sqrt{\frac{\sin(\theta_0 - \gamma) + \sin \gamma}{\tan \theta_0 \cdot \cos(\theta_0 - \gamma)}} k_2 \\ &= \alpha \sqrt{\frac{\sin(\theta_0 - \gamma) + \sin \gamma}{\tan \theta_0 \cdot \cos(\theta_0 - \gamma)}} k_2 \\ \frac{1}{R_{\max}} &= \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{\rho(1)} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

さらに梁中央部の最外表面に生ずる最大曲げ応力 $\sigma_{\max}$ は

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= (\sigma_{\max})_0 \cdot \sqrt{\frac{\sin(\theta_0 - \gamma) + \sin \gamma}{\tan \theta_0 \cdot \cos(\theta_0 - \gamma)}} k_2 \\ &= \left(\frac{Ee}{l}\right) \alpha \sqrt{\frac{\sin(\theta_0 - \gamma) + \sin \gamma}{\tan \theta_0 \cdot \cos(\theta_0 - \gamma)}} k_2 \end{aligned} \quad (18)$$

なお、換算係数 k_1, k_2 は実験的に定める必要はなく、厳密大たわみ理論に基づき、純理論的に算出することができるもので、次式で表される．

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{3[2k \sin(\theta_0 - \gamma) \cdot \cos \psi_e - \cos(\theta_0 - \gamma) \cdot \Phi(\psi_e)]}{\cos(\theta_0 - \gamma) \cdot [2k \cos(\theta_0 - \gamma) \cdot \cos \psi_e + \sin(\theta_0 - \gamma) \cdot \Phi(\psi_e)]^3} \\ k_2 &= \frac{2 \tan \theta_0}{\cos(\theta_0 - \gamma) \cdot [2k \cos(\theta_0 - \gamma) \cdot \cos \psi_e + \sin(\theta_0 - \gamma) \cdot \Phi(\psi_e)]^2} \end{aligned} \quad (19)$$

したがって、式(19), (20)を用いてあらかじめ一度計算し、各換算係数の変化傾向を把握しておくことがこうした

Fig. 2. Nomograph of reduction factor k_1 about parameter α under various conditions of friction.

Fig. 3. Nomograph of reduction factor k_2 about parameter α under various conditions of friction.

Fig. 4. Nomograph of reduction factor k_1 about nondimensional maximum deflection $\eta(1)$ under various conditions of friction.

推定法を実際に活用するに際して必要なことである．

材料試験法上、与えられる既知曲げ条件として種々考えられるが、ここでは導出した換算係数 k_1, k_2 の算出結果を3種類の曲げ条件に対し利用に供すべくまとめ、計算図表として提示する．すなわち変形パラメータ α に対して Fig. 2, 3 に、無次元最大たわみ $\eta(1)$ に対して Fig. 4, 5 に、さらに反力支点でのたわみ角 θ_0 に対して Fig. 6, 7 にそれぞれ摩擦係数の影響を考慮して示した．

3 計算図表を利用した推定手法および適用例

対称三点曲げにおける大たわみ変形諸量に際し、あらかじめ梁材料の縦弾性係数 E や断面二次モーメント I が、また負荷および反力両支点間の距離 l や反力支点と梁間の摩擦係数 μ (または摩擦角 γ) などが既知となっている場合について検討する．

Fig. 5. Nomograph of reduction factor k_2 about nondimensional maximum deflection $\eta(1)$ under various conditions of friction.

Fig. 6. Nomograph of reduction factor k_1 about deflection angle θ_0 at end support under various conditions of friction.

Fig. 7. Nomograph of reduction factor k_2 about deflection angle θ_0 at end support under various conditions of friction.

3・1 条件として横荷重 P のみが付与されたときの推定手法

P が既知のとき変形パラメータ α が計算でき、さらに算出 α に対する換算係数 k_1 , k_2 の各値を計算図表の Fig. 2, 3 から読取れば、これら α , k_1 , k_2 を用いて式(14)より既知横荷重が作用したときの無次元最大たわみ $\eta(1)$ および実最大たわみ $y_{\max}$ を、式(14)より反力支点におけるたわみ角 θ_0 を、式(17)より無次元最大曲率 $1/\rho(1)$ および実最大曲率 $1/R_{\max}$ を、式(18)より最大曲げ応力 $\sigma_{\max}$ などをそれぞれ推定することができる。

3・2 条件として実最大たわみ $y_{\max}$ のみ付与されたときの推定手法

$y_{\max}$ が既知のとき、無次元最大たわみ $\eta(1)$ が分る。したがってこの $\eta(1)$ に対する換算係数 k_1 , k_2 の各値を計算図表の Fig. 4, 5 を用いてそれぞれ読取るならば、式(14)より変形パラメータ α が、式(14)より反力支点たわみ角 θ_0 が、また $y_{\max}$ を生ぜしめるに必要な横荷重 P が判明する。さらに、既知となった α , θ_0 , k_2 などを用いれば、式(17), (18)より無次元最大曲率 $1/\rho(1)$, 実最大曲率 $1/R_{\max}$ および最大曲げ応力 $\sigma_{\max}$ を知ることができる。

3・3 条件として反力支点におけるたわみ角 θ_0 のみ付与されたときの推定方法

既知の θ_0 に対して計算図表の Fig. 6, 7 を用いて換算係数 k_1 , k_2 の各値を読取る。判明した k_2 と θ_0 を式(14)に代入すれば変形パラメータ α が求まる。こうして既知となった α を用いれば θ_0 を生ぜしめるに要する横荷重 P が分る。さらに、式(14), (17), (18)においてこれら α , k_1 , k_2 , θ_0 を適宜利用すれば、無次元最大

たわみ $\eta(1)$ および実最大たわみ $y_{\max}$, 無次元最大曲率 $1/\rho(1)$ および実最大曲率 $1/R_{\max}$, 最大曲げ応力 $\sigma_{\max}$ をそれぞれ予測することができる。

3・4 簡易推定法の一適用例

梁の示す大たわみ変形挙動について、各種推定手法のうち、ここでは梁中央に任意の横荷重が作用した場合に対して 3・1 節の手法に基づき特定の变形諸量を推定するとともに、その推定値の妥当性を実験によって確認した例を示す。対称三点大たわみ曲げ実験は中央重錘荷方式の小形曲げ装置により PVC 薄板を用いて実施した。負荷および反力両支点には $\phi 2\text{mm}$ の鋼製小円柱を使用した。特に反力支点円柱を剛に支持(回転不可)しているため大たわみ変形時には反力支点において梁との間に摩擦力が作用する。PVC 薄板の縦弾性係数 E は 3.39 GPa, 試料寸法は板幅 30 mm, 板厚 0.76 mm, 長さ 250 mm で、鋼製反力支点との間の摩擦係数 μ は 0.4 である。なお、大たわみ変形の際に支点間距離などに与える各支点丸みの影響も多少考えられるが、ここでは微小とみなし特別な補正を施さず、したがって負荷支点と反力支点間距離 l は初期設定の 75 mm で不変と考えた。実験においては横荷重 P の関数として梁中央での実最大たわみ $y_{\max}$ をハイトゲージで、反力支点におけるたわみ角 θ_0 を読取望遠鏡を用いてそれぞれ実測した。なお $y_{\max}$ は l で除し無次元最大たわみ $\eta(1)$ として整理した。

あらかじめ材料の E , I , l , μ が既知であることを前提に、4種類の横荷重 P の負荷に対し 3・1 節の推定手法を適用して算出した α を始めとして、計算図表の Fig. 2, 3 による換算係数 k_1 , k_2 の各読取值および無次元最大たわみ $\eta(1)$, 反力支点におけるたわ

Table I. Specific flexural amounts estimated by means of the reduction method and the experimental results.

P (N)	α	k_1	k_2	$\eta(1)$	θ_0 (degree)	$\frac{1}{\rho(1)}$	$\sigma_{\max}$ (MPa)	$\eta(1)$	θ_0 (degree)
								Experimental value	
0.882	0.668	1.03	1.05	0.229	9.33	0.662	10.50	0.218	18.96
		4.95	8.95	1.102	71.50	1.530	24.25	1.101	71.81
1.078	0.816	1.09	1.13	0.296	24.75	0.831	13.17	0.285	24.62
		3.45	5.15	0.938	64.55	1.528	24.21	0.947	65.28
1.274	0.964	1.22	1.28	0.392	31.67	1.031	16.33	0.375	31.11
		2.39	3.09	0.768	56.21	1.480	23.45	0.771	56.44
1.372	1.039	1.33	1.43	0.461	36.61	1.161	18.39	0.452	36.28
		1.99	2.43	0.689	51.62	1.442	22.85	0.693	52.34

み角 θ_0 、さらに無次元最大曲率 $1/\rho(1)$ 、最大曲げ応力 $\sigma_{\max}$ などの推定値を Table I に示す。また大たわみ曲げ実験における無次元最大たわみ $\eta(1)$ および反力支点たわみ角 θ_0 の計測結果も Table I に併記した。さらに、比較しやすいよう Table I より $\eta(1)$ 、 θ_0 の推定値と実験値を抽出し、 α に対しそれぞれ Fig. 8, 9 に図示した。こうした図、表より明らかに本資料で提案した換算に基づく $\eta(1)$ 、 θ_0 の推定値と実験値とは最大で 5 % 程度の相違となるが、全体的にかなりよい一致を示している。したがって、こうした簡易推定法は、大たわみ変形時の特定変形諸量を簡便に知るためには極めて有効な方法であると考えられる。なお換算法による推定値と厳密大たわみ理論は本来は同一値を示すものであるが、Fig. 8, 9 において最大で 4 % 程度の差がみられるのは、推定値の算出に際して計算図表による図上読取値を採用していることに起因するものであり、したがって計算図表を利

 Fig. 8. Relation between parameter α and nondimensional maximum deflection $\eta(1)$.

 Fig. 9. Relation between parameter α and deflection angle θ_0 at end support.

用したこうした簡易推定法自体にこの程度の誤差を含むと考えればよい。

4 む す び

材料試験法としての観点から支点摩擦の影響を考慮した対称三点大たわみ曲げ変形を解析し、その基本式を基に、新たに換算係数を定義し、その係数を用いることにより、従来の線形曲げ理論解を応用して、特定の大たわみ変形諸量を容易に推定しうる方法を提示した。また、本簡易推定法の有効性を確かめるため、PVC 薄板を用いて、大たわみ曲げ試験を実施し、推定値と実測値がよく一致することを示した。

(昭和59年7月25日 精機学会定期学術講演会にて一部講演)

参 考 文 献

- 1) H.D. Conway, Phils. Mag., Ser. 7, **38**, 905 (1947).
- 2) R. Frisch-Fay, Aust. J. Apple. Sci., **11**, 443 (1960).
- 3) 大槻敦巳, 日本機械学会論文集, **51**, No. 471 (1985).