不規則進展抵抗をもつ疲労き裂進展の確率論的考察[†]

伊 原 千 秋* 三 澤 哲 也**

A Stochastic Approach to Fatigue Crack Propagation
with Random Propagation Resistance

by

Chiaki IHARA* and Tetsuya MISAWA**

A stochastic approach to fatigue crack propagation is proposed in consideration of random propagation resistance. It is based on the Paris-Erdogan's propagation law of fatigue crack. By adding the Gaussian white noise to propagation resistance of the propagation law, a non-linear Langevin equation is obtained. A stochastic differential equation of Ito type is derived from the Langevin equation by using a change of variable in the equation and Wong and Zakai's theorem. By using the solution of the stochastic differential equation and its probability density, a sample path and life distribution of fatigue crack propagation are derived, respectively. These theoretical results are compared with the experimental data for high tensile strength steel APFH 60. Through the comparison, an improvement in the above approach is made.

キー・ワード：疲労き裂進展，不規則進展抵抗，伊藤型確率微分方程式，残存寿命分布

1 緒 言

現在，破壊力学の分野において，金属材料のき裂進展過程に対する研究が様々な立場・手法でなされているが，このようなき裂進展過程には，種々の不確定要因が内包されることは容易に想像される。したがって，そのような不確定要因を考慮したき裂進展問題の研究が必要となる。特に，き裂進展則に現れる進展抵抗の不規則性を考慮することは，その不規則性が材料の不均質性，すなわち，材料が本来持っている性質に依存すると思われるだけに重要であろう。そして，すでにこのような見地から，進展抵抗の不規則性を考慮した^{1)~4)}疲労き裂進展の研究がいくつか報告されている。

ところで著者らは，クリープき裂進展問題に対し，上で述べた進展抵抗の不規則性を考慮した研究を先に報告した⁵⁾。そこで用いた手法を簡単に述べると，まず，き裂進展をある程度忠実に表す進展則に対し，その進展抵抗にガウス型白色雑音過程と呼ばれる確率過程を不規則入力として加える。そして，このとき得られる方程式をさらに“伊藤型確率微分方程式”に変換し，これを考えている現象の数学モデルとして採用するのである。このような方法でき裂進展過程を解析する効用としては，次のことが挙げられた。

(i) 実験に方程式を解くことでき裂の見本過程が得られる。

(ii) すでに知られている“伊藤型確率微分方程式”に関連した定理・公式を用いることで，き裂長さの確

率分布（確率密度関数）を容易に求めることができる。この結果をもとにして，いわゆるき裂長さの残存寿命分布も導ける。

本論文では，一定応力振幅下での疲労き裂進展モデルとして広く受け入れられている Paris-Erdogan のき裂進展則に対し，上で述べた手法を用いることで不規則進展抵抗をもつ疲労き裂進展問題を解析する。さらに，その結果に基づいて計算機実験を試み，実際の実験結果と比較することで，ここで用いた解析手法の検討を行う。

2 不規則進展抵抗モデル

一般に Paris-Erdogan のき裂進展則は，次式のよう形で与えられる。

$$\frac{dX}{dn} = C \left(\frac{\Delta K}{\Delta K_0} \right)^m \quad (1)$$

ここで X は適当に規準化された n サイクル後のき裂長さ， ΔK ， ΔK_0 はそれぞれ n サイクル後の応力拡大係数範囲およびそれと同次元の定数， C ， m は材料定数で， m は 2 よりも大きい値をとる。以下では，石川・鶴井の論文と同様に¹⁾⁶⁾

$$\frac{\Delta K}{\Delta K_0} = Z \sqrt{X} \quad (2)$$

が成り立つとするが，ここで Z は適当に規準化された負荷応力振幅で，正の一定値をとるものとする。また，進展抵抗が不規則な場合にも式(1)，(2)を一般化した式

$$\frac{dX}{dn} = C(n) \{ Z \sqrt{X(n)} \}^m \quad (3)$$

[†] 原稿受理 昭和60年7月16日 Received July 16, 1985

* 正 会 員 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町, Faculty of Engineering, Kyoto University, Yoshida-hommachi, Sakyo-ku, Kyoto

** 学生会員 京都大学大学院 京都市左京区吉田本町, Graduate Student, Kyoto University, Yoshida-hommachi, Sakyo-ku, Kyoto

が成り立つものと仮定する。ここで $C(n)$ は無次元の進展抵抗を表す。さらに以下の解析の便宜上、次のような定数 λ を導入する。

$$\lambda = \frac{m}{2} - 1 \quad (4)$$

ただし λ は m の条件より、正の値をとる定数である。これを用いて式(3)を次のように書き改める。

$$\frac{dX}{dn} = C(n) Z^{2(\lambda+1)} \{X(n)\}^{(\lambda+1)} \quad (5)$$

以下式(5)に基づいて不規則進展抵抗を持つ疲労き裂過程を表す伊藤型確率微分方程式を導く。

まず、 $C(n)$ の不規則性を表すモデルとして、次のガウス型白色雑音過程を含む確率過程を採用する。

$$C(n) = C_1(n) + C_2(n)r(n) \quad (6)$$

ここで $C_1(n)$ 、 $C_2(n)$ は共に n に関する確定的な関数で、 n が有限のときにはその絶対値が共に有界となる滑らかな関数とする。また $r(n)$ はガウス型白色雑音、すなわち、ガウス型確率密度関数を持ち、形式的に

$$E\{r(n)\} = 0 \quad (7)$$

$$E\{r(n)r(n')\} = \delta(n-n') \quad (8)$$

を満たす確率過程である。($E\{\dots\}$ は平均をとる操作を表す。また δ はディラックのデルタ関数である。) 式(6)、(7)および(8)よりただちに

$$E\{C(n)\} = C_1(n) \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [E\{C(n)C(n+n')\} - E\{C(n)\}E\{C(n+n')\}]dn' = \{C_2(n)\}^2 \quad (10)$$

が得られる。すなわち、式(6)の $C_1(n)$ 、 $C_2(n)$ はそれぞれ $C(n)$ の平均値、共分散関数に関連する量である。式(6)を式(5)に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dn} = & Z^{2(\lambda+1)} C_1(n) \{X(n)\}^{(\lambda+1)} \\ & + Z^{2(\lambda+1)} C_2(n) \{X(n)\}^{(\lambda+1)} r(n) \end{aligned} \quad (11)$$

が得られる。式(11)はいわゆるランジュバン方程式と呼ばれる方程式で、 $\lambda=0$ のとき線型、 $\lambda>0$ のとき非線型の方程式となっている。著者らの前論文⁵⁾では、Wong らの結果^{7,8)}を用いて線型ランジュバン方程式から伊藤型確率微分方程式を導いたが、非線型ランジュバン方程式に対しては彼らの結果を直接用いることはできない。そこで次のような変数変換

$$Y(n) \equiv \{X(n)\}^{-\lambda} \quad (\lambda > 0) \quad (12)$$

を用いて、式(11)を $Y(n)$ についての方程式として書き換える。すると、

$$\frac{dY}{dn} = -Z^{2(\lambda+1)} \lambda C_1(n) - Z^{2(\lambda+1)} \lambda C_2(n)r(n) \quad (13)$$

が得られるが、この式に対しては、Wong らの結果を用いることができて次のような伊藤型確率微分方程式が得られる。

$$dY(n) = -Z^{2(\lambda+1)} \lambda C_1(n)dn - Z^{2(\lambda+1)} \lambda C_2(n)dw(n)$$

(14)

ここで $w(n)$ は一次元標準ウィーナー過程、すなわち、初期値が0で、次の条件を満たすガウス過程である。

$$E\{w(n)\} = 0 \quad (15)$$

$$E\{w(n)w(n')\} = n \quad (n' \geq n) \quad (16)$$

式(14)に対する解は容易に求めることができ、

$$Y(n) = y_0 - Z^{2(\lambda+1)} \lambda \int_0^n C_1(\tau) d\tau - Z^{2(\lambda+1)} \lambda \int_0^n C_2(\tau) dw(\tau) \quad (17)$$

となる。ここで、 y_0 は $Y(n)$ の初期値で、 $X(n)$ の初期値 x_0 と

$$y_0 = \{x_0\}^{-\lambda} \quad (18)$$

なる関係で結ばれている正の定数である。また、式(17)右辺の第三項の積分は確率積分と呼ばれているものである。以上のことから結局 $X(n)$ は、式(17)で定まる $Y(n)$ に対し式(12)を逆に解いて得られる式

$$X(n) = \{Y(n)\}^{-1/\lambda} \quad (19)$$

を通じて求まることになる。

ところで、 $X(n)$ は常に正でなければならない量であるが、式(17)を満たす $Y(n)$ は負になりうる量である。したがって式(19)に注意すると、式(17)は $Y(0) = y_0 > 0$ から初めて $Y(n)$ が0となるまでの n に対し有効であることがわかる。特に $Y(n) = 0$ のとき式(19)からわかるように $X(n) = \infty$ となる。これはまさしくき裂長さが、鶴井らのモデルでも指摘されている“死点”に到達したことを意味する。したがって $Y(n)$ が初めて0となるサイクル値を N とすると、それ以後の n に対しては $Y(n) = 0$ 、よって $X(n) = \infty$ となるものと仮定する。すなわち、求める不規則進展抵抗をもつ疲労き裂進展過程は

$$X(n) = \begin{cases} \{Y(n)\}^{-1/\lambda} & 0 \leq n < N \\ \infty & N \leq n \end{cases} \quad (20)$$

で与えられる。

つぎに、上の $X(n)$ の確率密度関数を求める。そのために、まず、 $Y(n)$ の確率密度関数を求めるが、上で述べたようなサイクル数 N 以後は $Y(n)$ が0に留まるという、いわゆる吸収条件がある場合には、それを厳密に求めるのは困難である。そこで、その近似として本論文では、吸収条件を考慮しない場合の $Y(n)$ の確率密度関数をそのまま採用する。そのような関数なら、本論文の緒言で述べたように容易に求めることができる。また、この近似が妥当なものであることは、本論文の解析結果を実際の問題に適用するとき、そこで扱われるサイクル数が N よりも十分に小さいと考えられることからわかる。

さて、式(17)に対応するフォッカー・プランク方程式、すなわち、吸収条件を考慮しない $Y(n)$ の確率密度関数 $\rho(y, n)$ の従う偏微分方程式は次の式(21)で与えられる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = Z^{2(\lambda+1)} \lambda C_1(n) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{1}{2} \{Z^{2(\lambda+1)} \lambda C_2(n)\}^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \quad (21)$$

また、式(17)を満たす $Y(n)$ はガウス分布に従うことが知られている。さらに式(15)、(16)および(17)より

$$E\{Y(n)\} = y_0 - Z^{2(\lambda+1)} \lambda \int_0^n C_1(\tau) d\tau \quad (22)$$

$$E\{Y(n) - E\{Y(n)\}\}^2 = \{Z^{2(\lambda+1)} \lambda\}^2 \int_0^n \{C_2(\tau)\}^2 d\tau \quad (23)$$

が導けることに注意すると、結局式(21)の解は

$$\rho(y, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \{Z^{2(\lambda+1)} \lambda\}^2 \int_0^n \{C_2(\tau)\}^2 d\tau}} \times \exp \left[-\frac{\{y - y_0 + Z^{2(\lambda+1)} \lambda \int_0^n C_1(\tau) d\tau\}^2}{2 \{Z^{2(\lambda+1)} \lambda\}^2 \int_0^n \{C_2(\tau)\}^2 d\tau} \right] \quad (24)$$

となる。これが求める $Y(n)$ の近似的な確率密度関数である。したがって式(18)、(19)および式(24)より $X(n)$ の近似的な確率密度関数 $\tilde{\rho}(x, n)$ が次式のように求まる。

$$\tilde{\rho}(x, n) = \frac{1}{x^{\lambda+1} \sqrt{2\pi Z^{4(\lambda+1)} \lambda \int_0^n \{C_2(\tau)\}^2 d\tau}} \times \exp \left[-\frac{\{x^{-\lambda} - x_0^{-\lambda} + Z^{2(\lambda+1)} \lambda \int_0^n C_1(\tau) d\tau\}^2}{2 \{Z^{2(\lambda+1)} \lambda\}^2 \int_0^n \{C_2(\tau)\}^2 d\tau} \right] \quad (25)$$

式(25)をもとに石川・鶴井らの論文⁽¹⁶⁾あるいは著者らの前論文と全く同様にして、き裂長さが x_0 から初めて x_c に達するまでのき裂進展寿命分布、いわゆる残存寿命分布（以下これを $H(n|x_c, x_0)$ で表す）を求めることができる。いま、0の近傍にない n に対し

$$\int_0^n \{C_2(\tau)\}^2 d\tau / \left\{ \int_0^n C_1(\tau) d\tau \right\}^2 \ll 1 \quad (26)$$

が成立すると仮定する。このとき、 $H(n|x_c, x_0)$ は

$$H(n|x_c, x_0) \cong \Phi \left[\frac{x_0^{-\lambda} - x_c^{-\lambda} - Z^{2(\lambda+1)} \lambda \int_0^n C_1(\tau) d\tau}{Z^{2(\lambda+1)} \lambda \sqrt{\int_0^n \{C_2(\tau)\}^2 d\tau}} \right] \quad (27)$$

で与えられる。ここで Φ は標準正規分布の余関数であって、

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \quad (28)$$

で与えられる。ちなみに式(27)よりき裂長さが無限大、つまり“死点”に初めて到達するサイクル値 N の分布も求まる。すなわち、それは

$$H(N|\infty, x_0) = \Phi \left[\frac{x_0^{-\lambda} - Z^{2(\lambda+1)} \lambda \int_0^N C_1(\tau) d\tau}{Z^{2(\lambda+1)} \lambda \sqrt{\int_0^N \{C_2(\tau)\}^2 d\tau}} \right] \quad (29)$$

である。

ここで式(27)から次の事実も導かれることに注意する。すなわち、一般に本論文の解析手法ではき裂長さが減少する可能性もあるが、式(27)はそのようなことが起る確率が十分小さいことを意味している。以上の結果の詳細については、後の付録に示すことにする。

3 材料面からの考察

さて、ここで不規則進展抵抗に現れる二つの関数 $C_1(n)$ 、 $C_2(n)$ に対し材料面からの考察を加えることで、これらの関数の形をもう少し具体的に定める。このことについてはすでに石川らの研究⁽¹⁾があるが、それを本論文に現れる $C_1(n)$ 、 $C_2(n)$ を用いて表現する。

(i) 進展抵抗の不規則性は材料の不均質性による所が大きいと考えられるが、それは空間的には一様と見なすのが自然である。よって、平均き裂進展抵抗は n とは無関係と考えられる。これは式(9)より

$$C_1(n) = C_0 \quad (\text{定数}) \quad (30)$$

と表せることに相当する。

(ii) き裂は進展するにつれて、平均としては徐々にその進展速度を増す。一方、式(10)左辺に現れる進展抵抗 $C(n)$ の共分散関数に関連する量は、式(30)を考慮すると、異なる二時点での $C(n)$ の相関に関連する量とも言える。このような量は、現時点 n でのき裂の先端が一定距離を通過するのに要する時間に比例する、すなわち、き裂進展速度とは逆比例するものと考えられる。以上のことを $C_2(n)$ を用いて表すと、

$$\{C_2(n)\}^2 = k / (dX/dn) \quad (31)$$

となる。ただし k は未知の正の比例定数である。ところで (dX/dn) も確率変数なので、次のような近似を考える。

$$\frac{dX}{dn} = \begin{cases} Z^{2(\lambda+1)} C_0 \{x_0^{-\lambda} - Z^{2(\lambda+1)} C_0 \lambda n\}^{-(\lambda+1)/\lambda} & (x_0^{-\lambda} > Z^{2(\lambda+1)} C_0 \lambda n \text{ の場合}) \\ \infty & (\text{その他}) \end{cases} \quad (32)$$

これはもとの式(5)に対応する決定論的方程式

$$\frac{dX}{dn} = E\{C(n)\} Z^{2(\lambda+1)} \{X(n)\}^{(\lambda+1)}, \quad X(0) = x_0$$

に式(30)の結果 $E\{C(n)\} = C_1(n) = C_0$ を代入して得られる方程式の解を用いて導かれる。よって $C_2(n)$ が正の量であると仮定すると、式(31)および式(32)より

$$C_2(n) = \begin{cases} \sqrt{\frac{k}{Z^{2(\lambda+1)} C_0}} \{x_0^{-\lambda} - Z^{2(\lambda+1)} C_0 \lambda n\}^{(\lambda+1)/(2\lambda)} & (x_0^{-\lambda} > Z^{2(\lambda+1)} C_0 \lambda n \text{ の場合}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (33)$$

が得られる。

式(30)と式(33)を式(17)に代入することにより、不規則進展抵抗をもつ疲労き裂進展過程 $X(n)$ について最終的に以下の結果を得る。

$$X(n) = \begin{cases} \{Y(n)\}^{-(1/\lambda)} & (0 \leq n < N) \\ \infty & (N \leq n) \end{cases} \quad (34)$$

ただし $Y(n)$ は次式で与えられ、 N は $Y(n)$ が初めて 0 に到達するサイクル値を表す。

$$Y(n) = \begin{cases} y_0 - An - B \int_0^n \{y_0 - A\tau\}^{(\lambda+1)/(2\lambda)} d\omega(\tau) & (y_0 > An \text{ の場合}) \\ y_0 - An & (\text{その他}) \end{cases} \quad (35)$$

ここで $A = Z^{2(\lambda+1)} C_0 \lambda$, $B = \sqrt{k Z^{2(\lambda+1)} \lambda^2 / C_0}$ であり、 y_0 は $X(n)$ の初期値 x_0 に対して式(18)より得られる $Y(n)$ の初期値である。式(35)からわかるように、 A はき裂進展の確定論的な挙動を、 B は確率論的な挙動を支配する量と言える。

さらに、式(27)に式(30)と式(33)を代入すると、残存寿命分布は結局

$$H(n|x_e, x_0) = \begin{cases} \Phi \left[\frac{x_0^{-\lambda} - x_e^{-\lambda} - An}{\lambda \sqrt{\alpha \{x_0^{-(2\lambda+1)} - (x_0^{-\lambda} - An)^{(2\lambda+1)/\lambda}\} / (2\lambda+1)}} \right] & (x_0^{-\lambda} > An \text{ の場合}) \\ \Phi \left[\frac{x_0^{-\lambda} - x_e^{-\lambda} - An}{\lambda \sqrt{\alpha x_0^{-(2\lambda+1)} / (2\lambda+1)}} \right] & (\text{その他}) \end{cases} \quad (36)$$

で与えられる。ここで A は式(35)と同じで、 $\alpha = k/C_0^2 = B^2/(A\lambda)$ である。この式(36)の結果は石川らの導いた結果と一致している。(なお、式(36)の残存寿命分布の特性については、既に石川らの同じ文献(1)の中に詳細な報告がある。)

4 計算機実験および考察

以上得られた結果について、その妥当性を具体例に当てはめて検討してみる。比較のため用いられるのは島田らの行った高張力鋼板 APFH60 の疲労試験である。Fig. 1 が疲労き裂の進展を示すその結果で、横軸に繰返し応力数 n 、縦軸にき裂長さがとっており、初期き裂長さは 3.7 mm である。

さて、式(34)、(35)を用いて Fig. 1 のき裂進展に見合うような見本過程を求める。ところで、計算機実験を行うに際して、式(34)、(35)の n をサイクル数としてそのまま用いると計算時間が長くなる。そこで本章では以下 1 ステップ 1000 サイクルとし、 n はこのステップ数を表すものとする。この仮定の下で Fig. 1 の実際のデータのばらつき幅を考慮し、式(34)、(35)で $A = 9.5 \times 10^{-4}$, $B = 8.0 \times 10^{-3}$, $\lambda = 1$ (よって式(4)より $m = 4$) とおく。そうして得られた結果が Fig. 2 である。

ここで Fig. 2 のき裂進展の見本過程をよく見ると、き裂長さのばらつき幅は Fig. 1 の実際のデータに

Fig. 1. Crack length vs. number of stress cycles obtained from the experiment.

Fig. 2. Sample paths of $X(n)$ for $A = 9.5 \times 10^{-4}$, $B = 8.0 \times 10^{-3}$ and $\lambda = 1$.

だいたい合っているが、一本ずつのき裂進展の様子には違いが見られる。つまり、Fig. 1 ではき裂長さが小さい場合には不規則なき裂長さの変動が見られるが、き裂長さが 8.0 mm を過ぎるあたりからはさほど大きな不規則変動が見られない。これに対して、Fig. 2 の見本過程はき裂長さがある程度大きくなっても大きな不規則変動を見せている。この違いは Fig. 2 の見本過程の確率論的挙動を支配する B の値が大きいために生ずると思われる。そこで今度は、一本ずつのき裂進

Fig. 3. Sample paths of $X(n)$ for $A=9.5 \times 10^{-4}$, $B=4.0 \times 10^{-3}$ and $\lambda=1$.

展の見本過程の様子が Fig. 1 の実際のデータに近くなるようにする。それが Fig. 3 である。このとき A , λ の値は Fig. 2 の場合と同じで、 B の値を 4.0×10^{-3} にした。これを見ると残念ながら、Fig. 1 のき裂長さのばらつき幅ほど見本過程のばらつきは大きくないことがわかる。しかしながら、Fig. 1 で平均的なき裂進展から特に大きく離れている両端の何本かのデータを除いてみると、Fig. 3 の見本過程は Fig. 1 のき裂進展の様子をおおよそ再現しているように思える。中でも、き裂長さが初期き裂長さ 3.7 mm の約 2~2.5 倍、すなわち、7.4 mm~9.25 mm の付近が実際のデータとよく合っている（もちろん両端の何本かのデータを除いてであるが）。そこで、7.4 mm, 9.25 mm を x_c とする残存寿命分布を式(36)から求める。その結果が Fig. 4 である。ここで残存寿命分布を導いたときの条件式(26)の左辺のとり値を、Fig. 4 の A , B , λ の値に

対して調べてみる。そのため、式(30)および式(33)を式(26)左辺に代入し、 A , B , λ で表すと次のようになる。

$$\int_0^n \{C_2(\tau)\}^2 d\tau / \left[\int_0^n C_1(\tau) d\tau \right]^2 = \left(\frac{B}{An} \right)^2 \int_0^K (x_0^{-\lambda} - A\tau)^{(K+1)/\lambda} d\tau \quad (37)$$

ただし、 $K \equiv \min(n, x_0^{-\lambda}/A)$ である。この式に $A=9.5 \times 10^{-4}$, $B=4.0 \times 10^{-3}$, $\lambda=1$ を代入する。このとき、例えば n として 8（ただし本章の n はステップ数を表しているの、サイクル数では 8000 サイクル）をとると、式(37)は約 0.16 という値をとる。したがって、付録の結果を考慮すると、この n の値ぐらいまでは条件式(26)は満たされていると言える（ n の値を小さくするにつれて式(37)の値は大きくなる。よって n の値が小さいときには式(26)が成立しない場合があることを注意しておく）。ところで、Fig. 4 の残存寿命分布で考慮されるサイクル数は約 12 万~16 万サイクルである。したがって、これらの値に比べると 8000 サイクルは十分に小さい値である。よって、Fig. 4 の分布は妥当なものである。このことと Fig. 3 の結果を合せ考えると、ここで得られた分布は、実際のき裂長さの残存寿命分布のおおよその傾向を知る上で有効であろう。

以上、進展抵抗の不規則性を考慮した疲労き裂進展モデルをもとに考察を進めてきたが、ここで Fig. 2, 3 を通じてわかったことを改めてまとめてみると、

(i) 実際のき裂長さのばらつき具合と見本過程のそれがおおよそ一致するように確率論的挙動を支配する量 B を決めると、見本過程の一本ずつのき裂長さの不規則変動が実際のそれより大きくなってしまう。

(ii) 逆に、実際の一本ずつのき裂長さの不規則変動の様子と見本過程のそれがおおよそ一致するように B を決めると、見本過程のき裂長さのばらつき具合が実際のそれより小さくなってしまう。

したがって、Fig. 1 に示される実際のき裂進展過程により近い見本過程を得るためにはき裂進展抵抗の不規則性を考慮するだけでは不十分であるように思われる。

Fig. 4. Life distributions for $x_c/x_0=2$ and $x_c/x_0=2.5$ under $A=9.5 \times 10^{-4}$, $B=4.0 \times 10^{-3}$ and $\lambda=1$.

ところで、島田²⁾あるいは市川⁴⁾らは、不確定要因をもつ疲労き裂進展問題を考えるさい、進展抵抗だけでなく材料定数 m も不確定要因の一つと考えている。特に、市川⁴⁾らは、 m の不確定さが進展抵抗の不確定さとは独立に正規分布で与えられるとき、解析結果が最もよく実際のデータと合うことを報告している。以上のことを考慮して、 m すなわち λ を進展抵抗の不規則性から導かれるウィーナー過程 $w(n)$ とは独立で正規分布に従う確率変数と考える。Fig. 5 は Fig. 3 と同じ A , B の値に対して λ を平均1, 分散0.125の正規分布(このことを記号で $N(1, 0.125)$ と表す)に従う確率変数としたときの結果であるが、そこに現れる見本過程は実際のデータに非常に近いものになっていることがわかる(ここで、 λ は負の値をとる可能性もあるが、上で与えた分布よりその確率はほぼ無視できるほど小さいことを注意しておく)。特に、Fig. 3 と Fig. 5 を比較すると、き裂長さのばらつきには λ , すなわち m のばらつきが大きく関与していると言えるであろう。

Fig. 5. Sample paths of $X(n)$ for $A=9.5 \times 10^{-4}$, $B=4.0 \times 10^{-3}$ and λ the random variable with the Gaussian distribution $N(1, 0.125)$.

さて、 λ を正規分布 $N(\bar{\lambda}, \sigma^2)$ (ただし $\bar{\lambda} > 0$)に従う確率変数とすると、式(8)の残存寿命分布 $H(n|x_c, x_0)$ は λ を含むので、それ自身もまた確率変数である。そこで、き裂長さの寿命分布に関する一つの指標として H を λ で平均化した関数を採用することは自然なことと思われる。このとき、 λ は本来非負の量であることを考慮すれば、 σ^2 が $\bar{\lambda}$ に対して十分小さいという仮定の下で、次のような関数 $\bar{H}$ を指標として採用でき

るように思われる。

$$\bar{H}(n|x_c, x_0) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty H(n|x_c, x_0) e^{-((\lambda-\bar{\lambda})^2/2\sigma^2)} d\lambda \quad (8)$$

ところが式(8)の計算は、式(8)からもわかるように容易ではなく、また、計算機を用いて数値的に求めるとしても、 $\lambda=0$ 付近で計算誤差が大きくなる可能性が大きい。したがって、現在のところ式(8)の $\bar{H}$ は形式的な式の上だけの関数である。式(8)を近似的にでも求める方法については、今後の課題としたい。

5 結 言

本論文では、不確定要因が進展抵抗に含まれる場合の疲労き裂進展問題を「伊藤型確率微分方程式」を用いて記述し、それをもとに解(見本過程)および近似的な確率密度関数を求め、さらにそれにつづいて残存寿命分布を求めた。そして、得られた結果と実際の実験結果を比較すると以下のことがわかった。

(1) 本論文で与えた進展抵抗の不規則性は、一本ずつのき裂進展の不規則変動に大きく関与している。 λ すなわち m が一定の場合、ここでのモデルは、実際の現象をよく再現するとは必ずしも言えないが、それでも部分的にはそれのおおよその傾向をこのモデルから知ることはできる。

(2) き裂長さのばらつきについては、進展抵抗だけでなく、 λ すなわち m のばらつきも考慮すべきである。特に m を、進展抵抗の不規則性と関連するウィーナー過程と独立で正規分布に従う確率変数にとると、非常によく現実のデータを再現する。

(3) (2)を扱う場合、残存寿命分布も確率変数となるが、このときのき裂長さの寿命分布の指標となるべきものについての求め方は今後の課題である。

付録 残存寿命分布式(7)の導出についての注意

ここでは、鶴井⁶⁾らの議論に沿って、式(8)の下で式(7)がどのように求められるかを確認しておく。

いま、初期き裂長さ x_0 で、時点 n でき裂長さが x_c より大きくなる確率分布を $W(x_c, n|x_0)$ で表す。すると、再生過程の考え方を用いて、本文中の分布関数 $H(n|x_c, x_0)$ が次の積分方程式

$$W(x_c, n|x_0) = \int_0^n W(x_c, n-n'|x_c) dH(n'|x_c, x_0) \quad (A-1)$$

を満たすことがわかる。ところで上のような $W(x_c, n|x_0)$ は、式(2)から次のように求められる。

$$W(x_c, n|x_0) = 1 - \int_0^{x_c-x_0} \bar{\rho}(x, n) dx \\ = \Phi \left[\frac{x_0 - \lambda - x_c - \lambda - Z^{2(\lambda+1)} \lambda \int_0^n C_1(\tau) d\tau}{Z^{2(\lambda+1)} \lambda \sqrt{\int_0^n \{C_2(\tau)\}^2 d\tau}} \right] \quad (A-2)$$

ここで Φ は式(28)で与えられる関数である。よって式(A-1)の被積分関数は次の形で与えられる。

$$W(x_e, n-n'|x_e) = \Phi \left[-\sqrt{1 / \left(\frac{\int_0^{n-n'} \{C_2(\tau)\}^2 d\tau}{\{\int_0^{n-n'} C_1(\tau) d\tau\}^2} \right)} \right] \quad (\text{A-3})$$

ここで式(28)の条件が使われる。すなわち、 n' が n の近傍にある場合を除いて式(28)が成り立っておれば上式は近似的に1とおける。この近似は、式(28)左辺の値が約0.18よりも小さければ妥当なように思われる。何故なら、式(28)左辺の値が0.18のとき、式(A-3)の W の値は約0.99であるから。

以上のことに注意して、式(A-2)を式(A-1)に代入すると式(27)が導かれるが、このとき同時に

$$W(x_e, n|x_0) \cong H(n|x_e, x_0) \quad (\text{A-4})$$

が成り立っている。これはまさしく、き裂長さが減少する確率が十分小さいことを意味している。

参 考 文 献

- 1) 石川 浩, 鶴井 明, 日本機械学会論文集, **50**, 1309 (1984).
- 2) 島田佳弘, 中川隆夫, 徳納久睦, 材料, **33**, 475 (1984).
- 3) F. Kozin and J.L. Bogdanoff, Eng. Fract. Mech., **14**, 59 (1981).
- 4) 市川昌弘, 浜口光夫, 中村武夫, 材料, **33**, 8 (1984).
- 5) 伊原千秋, 三澤哲也, 材料, **34**, 1089 (1985).
- 6) 鶴井 明, 石川 浩, 日本機械学会論文集, **51**, 31 (1985).
- 7) E. Wong and M. Zakai, Ann. Math. Stat., **36**, 1560 (1965).
- 8) E. ワン, “情報と動的システムの確率過程”, 第4章 (1977) 産業図書, 東京.
- 9) 砂原善文, “確率システム理論”, 第6章～第8章(1979) 電気通信学会, 東京.
- 10) L. Arnold, “Stochastic Differential Equations: Theory and Applications”, Chap. 4～Chap. 9 (1973) John Wiley & Sons, New York.