ベイズ解析と信頼度効用関数の導入 による信頼性実証試験の最適化[†]

大久保 泰生* 岡村 弘之** 酒井 信介**

An Optimization of the Proof Test Loading Factor by Bayesian Analysis and Reliability Utility Function

by

Taisei OKUBO*, Hiroyuki OKAMURA** and Shinsuke SAKAI**

An optimization method of the proof test loading factor is described. The decision of an optimum load factor under the consideration of prior test results was made by using the Bayesian analysis. Moreover, the reliability utility function which shows the utility value of reliability was newly introduced, so that the present optimization method became similar to the Bayesian decision making procedure defined as the maximization of expected utility.

The initial conditions used were the prior distribution $A^0(\mu)$ of mean value μ , the coefficient of variation COV of the strength distribution which was assumed to be the normal distribution, and the degree of belief R_{coeff} used to evaluate the reliability by the Bayesian analysis. As the result of the numerical calculation, it was concluded that the effective estimation of the reliability could be performed based on the test results using the optimum loading factor obtained by the present method.

キー・ワード：信頼性評価，実証試験，最適化，ベイズ解析，信頼度効用関数

1 緒 言

機械や構造物の全体，またはその主要コンポーネントについての，いわゆる信頼性実証試験は，大型構造物から小型機械部品まで様々な分野で実施されているが，その重要性は近年ますます増加している。これは，機械構造物に対して経済的制約のもとで，機能の多様化，使用条件の過酷化，それに伴う構造の複雑化等の要求が増大し，適正な信頼度を持った製品の設計製作がより重要となってきたためである。過大な安全率を有する過剰品質の設計は許されにくくなっており，製品の信頼度が必要かつ十分であることを精度良く予測，確認することが不可欠となっている。設計段階での信頼性予測評価技術も進歩してきてはいるが，強度面だけ考えても，応力集中や欠陥分布も含めた実製品の強度分布については不明な点も多く，机上検討での思わぬミスを防止するためにも実証試験による信頼度予測は重要である。

このため，効果的に信頼性実証試験を実施してゆく手法について検討を加えることが必要となる。板垣¹⁾は，打切荷重による静的強度試験に対して，ベイズ解析を適用し，有効な結論を得るための試験方法について考察している。また，柏崎^{2,3)}らは，ノンパラメトリックな信頼度推定を行う場合の最適試験荷重レベルを求める方法について提案している。一般に複数の試

験体を有する場合，試験荷重の設定は試験開始時にすべて決定するのではなく，その時点までの試験結果を考慮して決めてゆくのが妥当と考えられるが，そのような検討を行った研究は見られない。

本研究はベイズ解析と，新たに導入した信頼度とその価値を対応づける信頼度効用関数を用い，従来あまり見られない過去の試験結果を考慮して，試験条件の最適レベルを設定する方法について検討したものである。手法の提案の後，数値計算結果の評価により本法の妥当性について考察する。

2 理論的検討

2・1 信頼性実証試験

強度についての信頼性実証試験は，静的強度試験，疲労試験に代表される2種類のタイプに分けられる。前者の場合，連続的に荷重を変化させて試験体の強度特性値そのものを得ることができ，さらに破壊モードや最弱部分を調べる限界試験的な役割も果している。これに対して後者では，一般に1個の試験体を複数の条件下で試験できず，得られる情報は試験体の強度特性値と試験条件に応じたある値との大小関係のみとなる。このため試験条件レベル設定は大きな問題となる。さらに，一般に実証試験は時間と費用を要し，また設備上や使用可能試験体数等の制約があることも多いが，後者の場合特に問題となりやすく，有効な結果を得る

[†] 原稿受理 昭和61年3月22日 Received Mar. 22, 1986

* 正会員 (株)小松製作所小山工場 小山市横倉新田, Oyama Plant, Komatsu Ltd., Yokokura, Shinden, Oyama

** 正会員 東京大学工学部 東京都文京区本郷, Faculty of Engineering, University of Tokyo, Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo

には試験条件の十分な検討が必要となる。本研究では後者のタイプについて、信頼度予測を目的として実証試験を実施する場合を想定して議論を進める。なお、後者のタイプの試験の場合、破壊したときに得られる情報は試験体強度が試験条件より低いことその他、その程度に関連した量として寿命値を得ることができるが、本研究では第一段階として、寿命値については考慮せず、単に強度と試験条件の大小関係のみを取扱うことにする。

2・2 本研究の方針

本研究では以下の方針で検討を行った。

(1) n 個の試験体について、疲労試験を想定した信頼性実証試験を行うとき、各試験体について使用荷重に対する試験荷重の最適試験倍率を求める。

(2) m 番目の条件は、 $m-1$ 番目までの試験結果を考慮して決定するが、 $m+1$ 番目以降の試験は想定しない。

時間、費用、試験体数等の制約を考慮すると、方針(2)は重要であると考えられるが、この点から研究を行ったものはあまり見られない。本研究ではこの点を考慮して、ベイズ解析により実用的な結果を得ることを目標とした。

2・3 ベイズ解析による試験条件の最適化

本研究では、荷重は確定値とし、強度のみ確率分布すると考える。強度分布は正規分布とし、変動係数 $COV(=\sigma/\mu, \sigma$: 標準偏差) は既知であるが、平均値 μ が未知であるため信頼度が不確定であるとする。いま、製品の使用荷重 X_0 における信頼度が R_{val} となる μ を μ^* とすると、 μ^* は R_{val} の関数となり Fig. 1 を参照して、

Fig. 1. Distribution of strength.

$$\Phi\left(\frac{X_0 - \mu^*}{\mu^* \cdot COV}\right) = 1 - R_{val} \quad (1)$$

ここで、 Φ は標準正規分布関数を表す。よって、

$$\mu^* = \frac{X_0}{1 + COV \cdot \Phi^{-1}(1 - R_{val})} \quad (2)$$

信頼度が R_{val} 以上であるためには、 $\mu > \mu^*$ であれば良い。

ベイズ解析では情報不足のために不確実な事柄に対して、主観的な確率を対応づけ、その計算をベイズの定理により行う。ここでは、 $\mu > \mu^*$ であることに対応する主観確率を信頼度 R_{val} と区別して、信頼係

数 R_{coeff} と呼ぶことにする。いま、 μ についての試験前の主観確率分布を $A^0(\mu)$ (事前分布) とすると、試験前の R_{coeff} は、

$$R_{coeff} = \int_{\mu^*}^{+\infty} A^0(\mu) d\mu \quad (3)$$

となる。つぎに試験倍率 α で試験を実施し、破壊しない場合と、した場合の μ についてのゆう度関数をそれぞれ、 L, L' とすると、

$$L(\mu|\alpha \text{ で破壊せず}) = 1 - \Phi\left(\frac{\alpha \cdot X_0 - \mu}{\mu \cdot COV}\right) \quad (4)$$

$$L'(\mu|\alpha \text{ で破壊}) = 1 - L = \Phi\left(\frac{\alpha \cdot X_0 - \mu}{\mu \cdot COV}\right) \quad (5)$$

となる。事前分布 $A^0(\mu)$ に(4), (5)および積分値が1となる規準化定数 C_1, C_1' を乗ずれば、ベイズの定理により、それぞれの結果に対する事後分布 $A^1(\mu), A^{1'}(\mu)$ となる。 μ の事後分布に対し、(3)と同様の積分を考えると、それぞれの結果が得られた後の、 $\mu > \mu^*$ に対する信頼係数となり、Fig. 2 に示すように、試験前後で R_{coeff} から R_{coeff1} または $R_{coeff1'}$ に変化することになる。

Prior distribution and likelihood function

Posterior distribution 1 (not failed)

Posterior distribution 2 (failed)

Fig. 2. Change of subjective distribution of μ with test results.

これまで μ の事前分布として $A^0(\mu)$ を考えてきたが、使用荷重 X_0 についての一般化を計るため、 μ の代りに μ を X_0 で規準化した μ/X_0 を用いることとしても同様の議論を行うことができる。以後の数値計算では $A^0(\mu/X_0)$ を用いたが、ここで改めて μ/X_0 のことを μ と書くことにする。この場合、上記の式は $X_0=1$ としたものとなる。

つぎに、最適試験について定式化する。信頼度 R_{val} と信頼係数 R_{coeff} は対応関係にあり、 μ の分布が与えられたなら一方から他方を計算することができる。

試験の価値を考える場合、どちらかを固定して他が大の方が価値があると考えられる。一般には、設定された信頼係数のもとで予測される信頼度について議論されることが多く、本研究でも R_{coeff} を固定して検討を行う。ここで、信頼度 R_{val} の持つ価値という概念を導入し、それを $V(R_{\text{val}})$ (これについては後述) で表すと、試験倍率 α の試験結果から信頼係数 R_{coeff} で予測される下限信頼度の価値の期待値 E が次式により与えられる。

$$E = P \cdot V(R_{\text{val}1}) + P' \cdot V(R_{\text{val}1}') \quad (6)$$

ここで、 P および P' は試験により破壊しない確率、およびする確率であり、

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} A^0(\mu) \cdot L(\mu|\alpha \text{ で破壊せず}) d\mu \quad (7)$$

$$P' = \int_{-\infty}^{+\infty} A^0(\mu) \cdot L'(\mu|\alpha \text{ で破壊}) d\mu = 1 - P \quad (8)$$

で与えられる。 $R_{\text{val}1}$ および $R_{\text{val}1}'$ はそれぞれ破壊せず、および破壊という結果のもとで、信頼係数 (主観確率) R_{coeff} で予測される信頼度の下限値を表す。ここで、 P , P' も主観確率分布 $A^0(\mu)$ から求められる主観確率であり、期待値 E は信頼度の価値をそれが得られる主観確率で重み付け平均したものである。本研究では、この E を最大とする α を最適試験倍率と考える。すなわち、固定した信頼係数 R_{coeff} のもとで、試験結果から得られる信頼度の下限値を、効用関数 $V(R_{\text{val}})$ で評価した価値の主観的な期待値を最大とすることで最適試験倍率を求めることとなり、期待効用最大化というベイズ意志決定の手法に準じていることとなる。

また、試験結果から得られた事後分布を、つぎの試験体の条件設定のための事前分布とすることにより、方針(2)を満足する結果が得られることになる。

2.4 信頼度効用関数の導入

ここでは、前述の信頼度 R_{val} の持つ価値 $V(R_{\text{val}})$ について検討するが、 $V(R_{\text{val}})$ を信頼度効用関数と呼ぶことにする。従来の研究では、信頼度そのものについての期待値を検討していることが多い。これらは、信頼度効用関数の概念を導入していないのであるが、計算上は効用関数を次式で評価していることに相当する。

$$V(R_{\text{val}}) = k \cdot R_{\text{val}} \quad (k: \text{比例定数}) \quad (9)$$

しかしながら、信頼度が0.50から0.55に向上した場合の0.05と、0.90から0.95に向上した場合とでは価値が同じとは考えられず、平均値を求めることに相当する期待値計算に使用するには問題があると思われる。そこで新しく次式により $V(R_{\text{val}})$ を定義する。

$$dV(R_{\text{val}}) = k \cdot \frac{dR_{\text{val}}}{1 - R_{\text{val}}} \quad (k: \text{比例定数}) \quad (10)$$

$$dV(R_{\text{val}}) = k \cdot \frac{dR_{\text{val}}}{1 - R_{\text{val}}}$$

Fig. 3. Schematic view of reliability utility function.

本式は、Fig. 3 において信頼度が R_{val} から微小量 dR_{val} だけ増加した場合の価値の増分は、 dR_{val} に比例し、不信度 $1 - R_{\text{val}}$ に反比例すると考えるものである。信頼度の増加による不信度の減少率が、価値に比例すると考えることもできる。ここで、 $k=1$ としても本質的に変わらず、また $V(0)=0$ と考えられるので、式(10)より次式が得られる。

$$V(R_{\text{val}}) = \log_e \left(\frac{1}{1 - R_{\text{val}}} \right) \quad (11)$$

つぎに、並列システムによる信頼度向上を行う場合に本式を適用してその妥当性について検討する。 n 個の要素の故障が独立の場合、各要素の信頼度 $R_i (i=1 \sim n)$ に対し、並列システムの信頼度 R_s は次式となる。

$$R_s = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i) \quad (12)$$

式(11), (12)より

$$\begin{aligned} V(R_s) &= \log_e \left[1 / \prod_{i=1}^n (1 - R_i) \right] = \sum_{i=1}^n \log_e \{ 1 / (1 - R_i) \} \\ &= \sum_{i=1}^n V(R_i) \end{aligned} \quad (13)$$

すなわち、並列システムの信頼度の価値は、各要素の信頼度の価値の総和となる。このことは、例えば価値と費用を対応づけて考えれば妥当なことであり、本式の一般的妥当性を示していると考えられる。

ただし、信頼度効用関数は本来試験者それぞれが独自のものを持つべきものであり、本式の他に試験者にとって意味のある他の式がある場合は、それを使用すべきであると考えられる。しかしながら、特に意味のある他の式がない場合、信頼度の価値は信頼度の値そのもので考えるより、提案した効用関数で評価した方がよい。これは信頼度が、0.9→0.99→0.999と向上したとき、価値をそのもので評価すると1→1.1→1.11倍となり、本効用関数で評価すると1→2→3倍となることと、この場合の信頼度向上に要する努力を考えれば、感覚的にも理解できる。

3 数値計算結果

3.1 計算方法

前述の方法により、試験体数5としてそれぞれの最適試験倍率を数値計算により求めた。試験条件を決定するために、それまでの試験結果を考慮してゆくので、

m 番目の試験体の最適試験倍率は, $m-1$ 番目までの試験体の破壊の有無により 2^{m-1} 種類考えることができる. このため, 試験体 1~5 に対して最適試験倍率を計算する回数は, それぞれ 1, 2, 4, 8, 16 となり, 計 31 回の計算が必要となる. 計算手順としては, 各試験体について最適試験倍率を求めた後, その条件で破壊しない場合と, した場合の μ の事後分布を求め, それらを次の試験体の事前分布として評価してゆくものである. 初期条件としては, ①信頼係数 R_{coeff} , ② μ の事前分布 $A^0(\mu)$, ③変動係数 COV を変化させて, その影響を考察する.

積分はシンプソン則による数値積分を行い, 計算にはパーソナルコンピュータ PC-9801 を使用した. 使用言語を MS-DOS 上の BASIC コンパイラとし, 数値演算プロセッサを併用した場合, 上記 31 回の計算に要する時間は約 4 時間である.

3・2 計算結果例

μ の事前分布を $0.8 \leq \mu \leq 1.8$ の範囲で一様分布,

Table I. Example of calculated optimum load factor α . Upper and lower result of pairs divided by solid lines correspond to the case of unfailing and failing prior specimen, respectively.

Specimen No.	Optimum load factor α	Given reliability (not failed)	Given reliability (failed)	Expected value
1	1.34	0.99409	0.04586	2.2995
2	1.53	0.99946	0.98424	5.9964
	1.17	0.85205	0.02558	0.6653
3	1.61	0.99985	0.99879	7.8983
	1.46	0.99735	0.97120	4.6733
	1.30	0.96869	0.78182	2.3707
	1.09	0.54222	0.01819	0.2229
4	1.66	0.99993	0.99973	9.0075
	1.59	0.99966	0.99789	7.0403
	1.56	0.99932	0.99570	6.2724
	1.38	0.99162	0.95366	3.8715
	1.41	0.99192	0.95479	3.8045
	1.22	0.91493	0.70198	1.7848
5	1.15	0.78869	0.44106	1.0050
	1.05	0.30656	0.01468	0.0913
	1.69	0.99996	0.99990	9.7217
	1.65	0.99989	0.99957	8.4148
	1.64	0.99986	0.99945	8.1782
	1.55	0.99926	0.99674	6.3987
	1.62	0.99975	0.99894	7.5224
	1.50	0.99843	0.99353	5.6809
	1.46	0.99690	0.98788	5.0049
	1.33	0.98168	0.93151	3.2973
	1.49	0.99758	0.98842	5.1024
	1.34	0.98160	0.93804	3.3040
	1.29	0.96226	0.88784	2.6521
	1.17	0.84616	0.62074	1.3834
	1.22	0.89696	0.73691	1.7272
	1.11	0.66092	0.35357	0.7174
	1.08	0.54814	0.23031	0.4863
	1.03	0.17502	0.01268	0.0460

すなわち,

$$A^0(\mu) = \begin{cases} 1; & 0.8 \leq \mu \leq 1.8 \\ 0; & \text{それ以外} \end{cases} \quad (14)$$

とし, 信頼係数 $R_{\text{coeff}}=0.9$, 変動係数 $COV=0.1$ とした場合の最適試験倍率 α を, 5 個目の試験体まで求めたものを Table I に示す. 各試験体とも実線で区分された 2 種類の最適試験倍率が 1 組となっており, 上段は一つ前の試験で破壊しなかった場合, 下段はした場合に対応している. 最適試験倍率 α と同時に, その条件で破壊しない, またはした場合にその時点での全試験結果と合せて得られる μ の事後分布から信頼係数 R_{coeff} で推定される信頼度の下限值, および最適 α で最大となる前述の信頼度の価値の期待値 E の値を示してある. つぎに, 最適 α が求められる様子を Fig. 4 に示す. これは 1 個目が最適試験倍率 $\alpha=1.34$ で破壊しないとき, 2 個目の最適 α を求める場合であり, 価値の期待値が最大となる点として, $\alpha=1.53$ が求められている.

Fig. 4. Change of expected value with testing load factor α for second specimen (in the case of unfailing first specimen under $\alpha=1.34$).

4 考 察

4・1 推定信頼度価値の期待値

本法に対する各種要因の影響についての検討, および他の方法との比較を行うために, 試験結果により得られる推定信頼度の持つ価値についての期待値を考える. すなわち, 本法により 5 個目まで試験を行うと, 各試験体についての破壊の有無により, $2^5=32$ 種類の結果がえられ, 最終的に得られる推定信頼度も 32 種類あることになる. ここで真の平均値 μ を仮定すると, 上記 32 種類の結果のそれぞれについて生起確率が計算できるので, 試験から推定される信頼度の下限値の確率分布が定まる (この場合 32 種の離散分布). この分布と仮定した真の μ から得られる真の信頼度との比較により推定の効果を見ることができるが, 多くの μ について比較することは繁雑となるため, 本研究では分

布の代表値として、平均値すなわち期待値を用いることにする。さらに、信頼度そのものの期待値は2・4節で議論した欠点があるので、ここでも信頼度を前述の信頼度効用関数で評価したものについての期待値を考える。この値は推定の効果を示す一つの指標と考えられ、以後の検討は横軸に仮定する真の μ 、縦軸にこの価値の期待値をとった図を用いて検討を行う。

4・2 信頼係数 R_{coeff} の影響

事前分布を式(4)、 $COV=0.1$ として $R_{\text{coeff}}=0.9$, 0.95, 0.99 の3種類について比較したものを Fig. 5 に示す。破線で示した真の信頼度の価値に対して、 μ の全域にわたり良い推定が行える。 R_{coeff} が大きくなるに従って信頼度の価値は低下するが、信頼度についての確信の度合い(信頼係数)を大きくすれば、当然得られる信頼度の下限値は低下するためである。

Fig. 5. Variation of expected value of given reliability with true mean value μ for the degree of belief R_{coeff} .

4・3 事前分布 $A^0(\mu)$ の影響

ここではすべて一様分布とし、範囲のみ $1.0 \leq \mu \leq 1.5$, $0.8 \leq \mu \leq 1.8$, $0.5 \leq \mu \leq 2.5$ と変えた3種類の μ の事前分布について比較したものを Fig. 6 に示す。

$COV=0.1$, $R_{\text{coeff}}=0.9$ とした。真の μ が事前分布の範囲外となると推定精度は悪くなっているが、範囲

Fig. 6. Variation of expected value for the prior distribution $A^0(\mu)$.

内であれば3種類とも同程度の推定が行える。これは5回の試験を行っているため事前分布の誤差が事後分布では効率良く改善されているためと思われる。試験体数によっては差が生じると考えられる。このため、試験体を多数使用できる場合には、事前分布についての情報が少なくても範囲を広くした一様分布とすることで対応できるが、試験体が少ない場合には事前分布の設定に注意を要する。

4・4 変動係数 COV の影響

事前分布を式(4)、 $R_{\text{coeff}}=0.9$ として $COV=0.05$, 0.1, 0.15 の3種類について比較したものを Fig. 7 に示す。この図は既知として計算している COV が真の COV と等しい場合についてのものであり、低い COV に対しては当然高い信頼度が得られている。

Fig. 7. Variation of expected value for the coefficient of variation COV (in the case of true $COV=\text{known } COV$).

Fig. 8. Variation of expected value for the coefficient of variation COV (in the case of true $COV \neq \text{known } COV$).

つぎに、既知としている COV が真の COV と異なった場合について、真の $COV=0.1$ とし、既知とした $COV=0.05, 0.08, 0.1, 0.12, 0.15$ と変えて比較したものを Fig. 8 に示す。真の COV の差により試験結果の生起確率が異なり、Fig. 7, 8 の同じ COV に対する結果は、 $COV=0.1$ 以外では異なっているが、

その差は小さいようである。COV を誤って仮定すると試験結果から得られる推定信頼度が異なるが、真の値との差は COV により大きく影響されている。特に COV を小さく仮定すると、大きく危険側の推定をする可能性が有り、既知とした COV が十分正確でない場合は、大きめの値として試験を行う必要がある。

4・5 他の試験法との比較

事前分布を式(14), $R_{\text{coeff}}=0.9$, $\text{COV}=0.1$ とし、5個の試験体について同一条件で試験をした結果から得られる μ の事後分布を用いて、本法と同様にベイズ解析で信頼度の下限値を予測する場合について、一定とした試験倍率 α を変えて比較したものを Fig. 9 に示す。各試験条件とも真の μ が α に近い範囲では良い推定ができるが、その他の範囲では信頼度を過小評価した安全側の推定となる。

Fig. 9. Variation of expected value for the loading factor of the constant load testing.

つぎに、信頼度効用関数を式(9)として、本法と同様に最適 α を決定したもの、前述の一定条件で $\alpha=1.2$ としたもの、および本法によるものの比較を Fig. 10 に示す。式(9)を使用すると、1に近い信頼度の値が正しく評価されず、最適試験倍率が概して低めとなり、低い信頼度しか得られない。このため、信頼度があまり高くない製品については、本法よりも良い推定が行

Fig. 10. Variation of expected value for the present method and other testing methods.

えることもあるが、高い信頼度を持つものに対しては過小評価することになる。一般に問題にしている信頼度は相当高いのが普通であるから、 μ の全域で良い推定が行える本法の方が、他の方法より優れていると考えられる。

5 結 言

信頼性実証試験を行う場合の最適試験倍率の設定法について検討した。それ以前の試験結果を考慮して次の最適試験倍率を決定することを、ベイズ解析を適用して可能とした。また、信頼度の持つ価値についての考察から、新たに信頼度とそれの持つ価値を対応づける信頼度効用関数を提案し、期待効用最大化のベイズ意志決定の手法に準じて最適試験倍率を決定している。計算のための初期条件は、正規分布を仮定した強度分布の平均値 μ についての事前主観確率分布 $A^0(\mu)$ 、変動係数 COV、ベイズ解析により信頼度の下限値を推定する際の信頼係数(確信の度合) R_{coeff} である。

数値計算結果を考察することにより、以下の知見を得ることができた。

- (1) 本法による最適試験倍率で試験を実施することにより、真の信頼度の値にかかわらず良い推定が行える。また、信頼係数 R_{coeff} を大きくすると、予測される信頼度の下限値は低下する。
- (2) μ についての事前分布の情報が少ない場合、試験体数が多ければ範囲を広くした一様分布とすることで対応できるが、試験体数が少ない場合には事前分布の設定に注意を要する。
- (3) 変動係数 COV を誤って設定すると、推定下限信頼度は大きく影響を受ける。特に COV を小さく仮定すると大きく危険側の推定となることがあり、正確な COV が不明な場合には、大きめの値として試験を行う必要がある。

(昭和60年12月12日 第7回設計における信頼性工学シンポジウムにて講演)

参 考 文 献

- 1) 板垣 浩, 石川 浩, 山本規雄, 日本造船学会論文集, No. 153, 376 (1983).
- 2) 柏崎昭宏, 座古 勝, 石川島播磨技報, 24, 6, 415 (1984).
- 3) 柏崎昭宏, 日本機械学会論文集, C-51, 1072 (1985).
- 4) 岡村弘之, 板垣 浩, “強度の統計的取扱い”, p. 242 (1979) 培風館.