真空中でのガラスの静的疲労き裂伝ば[†]

伊 原 千 秋* 重 山 吉 偉**

Static Fatigue Crack Propagation Behavior of Glass in Vacuum

by

Chiaki IHARA* and Yoshihide SHIGEYAMA**

The static fatigue fracture behavior of glass in vacuum was investigated on the basis of a stochastic damage model. Our theoretical results were in good agreement with the experimental ones for 4 glasses and it was shown that the static fatigue crack velocity of glass was proportional to some power of the stress intensity factor. On these theoretical bases, it was concluded that subcritical crack growth was the result of a thermally activated growth process which depended on the crack-tip stress in glass.

Key words : Static fatigue of glass, Fatigue crack propagation, Thermally activated growth process, Stochastic damage model

1 緒 言

セラミックス材料の機械強度部材としての使用が増加するにつれて、セラミックスの疲労強度の研究が活発になってきた。セラミックスの疲労現象については従来からガラスやアルミナを中心に多くの実験がなされているので、本論文では、まずガラスの静的疲労の問題を取り上げる。

ガラスの静的疲労においては、き裂伝ば速度は応力拡大係数 K_I の関数として表わされる。 K_I の小さい第Ⅰ領域では伝ば速度は K_I の指数関数となるが、これは外力をうけたガラスと水との間の応力腐食反応によって起こると考えられ、次の第Ⅱ領域では伝ば速度は湿度の影響はうけるが、 K_I にはほとんど依存しない。 K_I がさらに大きくなって第Ⅲ領域に入ると、伝ば速度は再び K_I の指数関数となるが、この領域では、伝ば速度は水分の影響はうけず、ガラス自身の基本的な破壊過程によって起こるとされている。ここでは第Ⅲ領域でのき裂伝ば機構を解析して、ガラスの力学的な破壊過程を調べたい。

第Ⅲ領域のき裂伝ばの実験は多くの人々によって精力的になされてきたが、特に Wiederhorn らは多種類のガラスについて詳細な実験を行い、第Ⅲ領域のき裂成長はガラスのき裂先端の応力状態に依存した熱活性化過程であると推論した。以上の実験結果ならびにガラスのミクロ的な不均一性を考慮すると、ガラスのき裂成長はある種の確率過程であると考えられるので、§2 ではき裂伝ばの確率論的損傷モデルを提案する。

そして §3 では Wiederhorn らの実験結果とわれわれの理論的な結果を比較し、モデルの妥当性を検討するとともに、き裂伝ば機構を明らかにしたい。

2 確率論的損傷モデル

外部から荷重がかかった時、き裂先端付近には応力集中がおこる。いまその領域を Fig. 1 に示すように、大きさ d_0 の小さい要素に分割する。Fig. 1 でき裂先端を原点とし、き裂の主な伝ば方向を x 軸の正の向きとし、これに垂直に z 軸をとる。原点から x 軸方向に数えて i 番目 ($i=1, 2, 3, \dots, i_0$)、 x 軸から z 軸の正の方向に j 番目 ($j=\pm 1, \pm 2, \dots, \pm j_0$) にある要素を (i, j) 要素と呼ぶことにする。各要素は固有の強度をもっており、それは確率変数であると考えられる。いま (i, j) 要素の強度を $H(i, j)$

Fig. 1. Stress region ahead of crack tip.

† 原稿受理 昭和63年8月12日 Received Aug. 12, 1988

* 正会員 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町, Faculty of Engineering, Kyoto University, Yoshida-hommachi, Sakyo-ku, Kyoto

** 京都大学大学院 京都市左京区吉田本町, Graduate Student, Kyoto University, Yoshida-hommachi, Sakyo-ku, Kyoto

とし、その分布関数を $H_{ij}(h)$ とする。すなわち

$$H_{ij}(h) \equiv \text{Pr}\{H(i, j) \leq h\} \quad (1)$$

ここで強度 $H(i, j)$ は要素が破壊されるまでの原子の熱振動数 h を単位とする。熱振動が n サイクル繰り返されたとき、他のすべての要素に先駆けて、ある1つの要素 (i, j) が破壊されたたすると、き裂は直ちにその位置まで伝ばすると考える。すなわち、 n 回の熱振動でき裂は x 方向に長さ id_0 だけ成長したことになる。

ぜい性的な材料では、熱振動が繰り返された場合、各要素には損傷の累積は起こらないと考える。そこで1回の熱振動で (i, j) 要素が損傷をうけ、破壊される確率を F_{ij} とすると、 (i, j) 要素が h サイクルで破壊される確率は

$$(1 - F_{ij})^{h-1} F_{ij} \quad (2)$$

とかける。したがって、 (i, j) 要素が h サイクル以下で破壊される確率、すなわち $H_{ij}(h)$ は

$$\begin{aligned} H_{ij}(h) &= \sum_{k=1}^h (1 - F_{ij})^{k-1} F_{ij} \\ &= F_{ij} \frac{1 - (1 - F_{ij})^h}{1 - (1 - F_{ij})} = 1 - (1 - F_{ij})^h \end{aligned} \quad (3)$$

ここで (i, j) $j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm j_0$ という $(2j_0)$ 個の要素をまとめて第 i 列と呼ぶことにする。 i 列の要素のうちで、最弱の強度をもつ要素の強度を $Y(i)$ とすると、 $Y(i)$ の分布関数は、

$$F_i(y) \equiv \text{Pr}\{Y(i) \leq y\} \quad (4)$$

と定義される。これは y サイクルを繰り返した時、第 i 列において少なくとも1つの要素が破壊される確率であるから、式(3)(4)より

$$\begin{aligned} F_i(y) &= 1 - \prod_j (1 - H_{ij}(y)) \\ &= 1 - \prod_j (1 - F_{ij})^y \end{aligned} \quad (5)$$

となる。つぎに N 、 M_n という確率変数を導入する。

$$N \equiv \{n | n-1 < Y(i) \text{ for all } i \text{ and}$$

$$Y(i) \leq n \text{ for at least one } i\} \quad (6)$$

$$M_n \equiv \{m | n-1 < Y(i) \text{ for } i=1, 2, \dots,$$

$$m-1, n-1 < Y(m) \leq n \text{ and}$$

$$n < Y(i) \text{ for } i=m+1, \dots, i_0\} \quad (7)$$

ここで N はすべての要素のうち、少なくとも1つが初めて、破壊されるまでのサイクル数である。そして、初めて、要素が破壊された時、破壊された要素のうちで、き裂先端より x 方向に最も遠い要素までき裂が進むものとし、またある要素の破壊が起こってから、その要素までのき裂伝ばは急速に起こり、それに要する繰り返し数は無視できるとすれば、 N は1回の伝ばが起こるのに要するサイクル数である。さらに、 $d_0 M_n$ は $N=n$ の時1回の伝ばによるき裂の x 方向への伝ば量である。すなわち、これは初めて破壊された要素のうちで、き裂先端から x 方向に最も離れた要

素の x 座標の d_0 倍である。以上のことから、き裂伝ば速度は $d_0 M_n / N$ という確率変数であると考えられる。実際に測定されるものは、その平均値であるから、 a をき裂長さとするれば、伝ば速度 da/dn は

$$\frac{da}{dn} = \langle d_0 M_n / N \rangle \quad (\langle \dots \rangle \text{ は平均を表す}) \quad (8)$$

と表される。確率変数 M_n は $N=n$ のときにだけ定義されるから、 M_n 、 N の同時分布は式(4)、(7)から

$$P(m, n) \equiv \text{Pr}\{M_n = m, N = n\}$$

$$\begin{aligned} &= \prod_{i=1}^{m-1} [1 - F_i(n-1)] [F_m(n) - F_m(n-1)] \\ &\quad \times \prod_{i=m+1}^{i_0} [1 - F_i(n)] \end{aligned} \quad (9)$$

また N の分布は

$$P(n) \equiv \text{Pr}\{N = n\} = \prod_i [1 - F_i(n-1)] - \prod_i [1 - F_i(n)] \quad (10)$$

したがって式(8)は式(5)、(9)から

$$\begin{aligned} \frac{da}{dn} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{i_0} \frac{d_0 m}{n} P(m, n) \\ &= d_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{i_0} \frac{m}{n} [F_m(n) - F_m(n-1)] \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{m-1} [1 - F_i(n-1)] \prod_{i=m+1}^{i_0} [1 - F_i(n)] \\ &= d_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{i_0} \frac{m}{n} [\prod_j (1 - F_{mj})^{n-1} - \prod_j (1 - F_{mj})^n] \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{m-1} \prod_j (1 - F_{ij})^{n-1} \times \prod_{i=m+1}^{i_0} \prod_j (1 - F_{ij})^n \\ &= d_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{i_0} \frac{m}{n} [1 - \prod_j (1 - F_{mj})] \\ &\quad \times [\prod_{i=1}^m \prod_j (1 - F_{ij})^{n-1} - \prod_{i=m+1}^{i_0} \prod_j (1 - F_{ij})^n] \\ &= d_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{i_0} \frac{m}{n} [1 - \exp[\sum_j \ln(1 - F_{mj})]] \\ &\quad \times \exp[(n-1) \sum_{i=1}^m \sum_j \ln(1 - F_{ij})] \\ &\quad + n \sum_{i=m+1}^{i_0} \sum_j \ln(1 - F_{ij}) \end{aligned} \quad (11)$$

同様に N の平均値は式(5)、(10)より

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} n P(n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n [\prod_i [1 - F_i(n-1)] - \prod_i [1 - F_i(n)]] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \prod_i [1 - F_i(n-1)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \prod_i \prod_j (1 - F_{ij})^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \exp[(n-1) \sum_i \sum_j \ln(1 - F_{ij})] \end{aligned} \quad (12)$$

さらにき裂先端付近での熱振動による損傷破壊の確率 F_{ij} の値は次節で与えられるように

$$0 < F_{ij} \ll 1 \quad (13)$$

であるから、式(11)、(12)は近似的に次のように書ける。

Table I. Glass Compositions.

Glass	Constituents (wt %)							
	SiO ₂	Al ₂ O ₃	B ₂ O ₃	Na ₂ O	K ₂ O	MgO	CaO	Other
61 % lead	35			4				61 PbO
Aluminosilicate	57	15	5			7	10	6 BaO
Borosilicate crown	70		11	10	7		0.2	2 BaO
Soda-lime silicate	72	2		14	1	4	7	

$$\frac{da}{dn} \cong d_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{i_0} \frac{m}{n} \left[1 - \exp \left\{ - \sum_j \left(F_{mj} + \frac{1}{2} F_{mj}^2 \right) \right\} \right]$$

$$\times \exp \left\{ (1-n) \sum_{i=1}^m \sum_j \left(F_{ij} + \frac{1}{2} F_{ij}^2 \right) \right.$$

$$\left. - n \sum_{i=m+1}^{i_0} \sum_j \left(F_{ij} + \frac{1}{2} F_{ij}^2 \right) \right\}$$

$$\cong d_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{i_0} \frac{m}{n} \left[\sum_j \left(F_{mj} + \frac{1}{2} F_{mj}^2 \right) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \left\{ \sum_j \left(F_{mj} + \frac{1}{2} F_{mj}^2 \right) \right\}^2 \right]$$

$$\times \exp \left\{ (1-n) \sum_{i=1}^m \sum_j \left(F_{ij} + \frac{1}{2} F_{ij}^2 \right) \right.$$

$$\left. - n \sum_{i=m+1}^{i_0} \sum_j \left(F_{ij} + \frac{1}{2} F_{ij}^2 \right) \right\} \quad (14)$$

$$\langle N \rangle \cong \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[(1-n) \sum_{i=1}^m \sum_j \left(F_{ij} + \frac{1}{2} F_{ij}^2 \right) \right] \quad (15)$$

$$\text{ここで} \quad \ln(1-x) \cong -x - \frac{1}{2} x^2$$

$$1 - e^{-x} \cong x - \frac{1}{2} x^2 \quad |x| \leq 1$$

を用いた。

つぎに、1回の熱振動で (i, j) 要素が破壊される確率 F_{ij} は、この過程が熱活性化過程であるとする、

$$F_{ij} = \exp \left(- \frac{\Delta H}{kT} \right) \quad (16)$$

とかける。ここで T は絶対温度、 k はBoltzmann定数で、活性化エネルギー Q はき裂先端付近の応力によってなされる仕事量だけ減少すると考えられるので、

$$\Delta H = Q - c \cdot \sigma_{iz}(i, j) \quad (17)$$

と表される。ここで $\sigma_{iz}(i, j)$ はモードI型で (i, j) 要素に作用する応力の z -成分であって、Fig. 1により

$$\begin{aligned} \sigma_{iz}(i, j) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ &\cong \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi d_0}} \sqrt{\frac{i + \sqrt{i^2 + j^2}}{2(i^2 + j^2)}} \end{aligned} \quad (18)$$

と書ける。

なお、上で述べたサイクル数は原子の熱振動のサイクル数であるから、 $\nu = 10^{13}$ cycle/sec とすると

$$\nu \frac{da}{dn} = \frac{da}{dt} \quad (\text{m/sec}) \quad (19)$$

と書ける。(き裂長さ a はmを単位とする)

3 実験との比較

比較のため用いられるのは、Wiederhorn²⁾らによる4種類のガラスの真空中での静的疲労の実験である。ガラスの組成はTable Iの通りである。式(14)、(16)、(17)、(18)、(19)を用い、 da/dt と K_I との関係を示す実験を再現するように、 Q 、 c 、 d_0 の値を決めると、

$$\frac{da}{dt} \propto K_I^n \quad (20)$$

がFig. 2, 3, 4(a), 4(b), 5のように得られる。 Q 、 c 、 d_0 の値はTable IIに示す。ここで Q は破壊領域 d_0 での平均の活性化エネルギーと考えられ、SiO₂の単独結合強さが約106 Kcal/molであることから、61%鉛ガラス、アルミノケイ酸ガラス、ソーダ石灰ケイ酸ガラスに対する Q の値はほぼ妥当であると思われる。しかし、ホウケイ酸クラウンガラスの場合110°Cの

Fig. 2. Crack velocity da/dt as a function of stress intensity factor K_I according to our model compared with experimental results for 61% lead glass.

Fig. 3. Crack velocity da/dt as a function of stress intensity factor K_I according to our model compared with experimental results for aluminosilicate glass.

データを除くと, $Q=75$ Kcal/mol, $d_0=1.0 \times 10^{-6}$ m となり, 25°C と 110°C のデータのみに注目すると, $Q=100$ Kcal/mol, $d_0=1.0 \times 10^{-8}$ m となるため, 実験による再検討が必要と思われる。また, d_0 はガラスの種類によって相異なるが (金属の場合 d_0 は $10^{-9} \sim 10^{-8}$ m である), これはガラスの組成の違いによる構造上の差異が現れているものと思われる。

つぎに上で得られた Q , c , d_0 の値を用いると, 式(15), (16), (17), (18) から $\langle N \rangle$ と K_I の関係が得られるが, 例として, ソーダ石灰ケイ酸ガラスの場合を示すと, Fig. 6 のようになる。どのガラスでもおなじ傾向を示し, K_I が大きくなるにしたがって, $\langle N \rangle$ は小さくなるが, K_I がある値を越えると, 温度に関係なく, $\langle N \rangle = 1$ となり, 1 回の熱振動で, すなわち瞬時に d_0 領域の破壊がおこり, き裂が伝ばすることがわかる。したがって, この K_I の値は K_{Ic} であると考えられる。

なお, 前節では, $0 < F_{II} \ll 1$ を用いて式(11), (12) を式(14), (15) のように近似したが, Table II の Q , c , d_0 を用い, 例えばソーダ石灰ケイ酸ガラスの場合について

Table II. Crack-Propagation Data

Glass	Q Kcal/mol	c	d_0 m
61 % lead	106	8.18×10^{-28}	1.0×10^{-6}
Aluminosilicate	150	2.79×10^{-28}	1.0×10^{-7}
Borosilicate crown	75	3.73×10^{-28}	1.0×10^{-6}
	100	0.55×10^{-28}	1.0×10^{-8}
Soda-lime silicate	200	0.446×10^{-28}	1.0×10^{-9}

て検討したい。 F_{II} は温度 T が大きいほど, K_I が大きいほど, また i, j が小さいほど大きい。そこで, 今 $T=400^\circ\text{C}$, $K_I=0.7$ MN/m^{3/2}, $i=j=1$ とすると, $F_{II}=3.75 \times 10^{-3}$ となり, たしかに $0 < F_{II} \ll 1$ が示され, 前節での近似が妥当であることがわかる。

(a)

(b)

Fig. 4. Crack velocity da/dt as a function of stress intensity factor K_I according to our model compared with experimental results for borosilicate crown glass.

Fig. 5. Crack velocity da/dt as a function of stress intensity factor K_I according to our model compared with experimental results for soda-lime silicate glass.

以上のことから、Fig. 2, 3, 4(a), 4(b), 5 および Q , c , d_0 の値を考え合わせるとわれわれのモデルで、うまく実験結果を再現できるといえる。したがって、このような静的疲労き裂成長は、Wiederhorn らも示唆しているように、ガラスのき裂先端の応力状態に依存した熱活性化過程であると結論できる。

4 結 言

真空中でのガラスの静的疲労き裂成長をある種の確率過程であるとして、ガラスのき裂伝ばに対する確率論的損傷モデルを提案し、それをを用いてつぎのような結果を得た。

1) 活性化エネルギー Q , 要素の大きさ d_0 をうまく選ぶことによって $\frac{da}{dt} \propto K_I^n$ を求め、実験結果が再

Fig. 6. $\langle N \rangle$ as a function of stress intensity factor K_I according to our model for soda-lime silicate glass.

現できることを示した。

2) $\langle N \rangle$ と K_I の関係から、 $\langle N \rangle = 1$ に相当する K_I の最小値が K_{Ic} であると考えられる。

3) これらのことから、ガラスの静的疲労き裂伝ばはガラスのき裂先端の応力状態に依存する熱活性化過程であると結論できる。

(昭和63年11月9日 第19回疲労シンポジウムにて講演)

参 考 文 献

- 1) 例えば, S. M. Wiederhorn, J. Am. Ceram. Soc., **50**, 407 (1967).
- 2) S. M. Wiederhorn, H. Johnson, A. M. Diness and A. H. Heuer, J. Am. Ceram. Soc., **57**, 336 (1974).