塑性加工プロセスと材料

3. 粉末材料および多孔質材料の塑性変形特性[†]

田 端 強* 島 進**

1 ま え が き

金属粉末やセラミック粉末を圧縮成形する場合のように、個々の粉末粒子の塑性変形の有無にかかわらず、集合体として形状や寸法が見かけ上永久変化するのを、ここでは広義に解釈して、塑性変形と呼ぶことにする。このように考えると、粉末集合体も塑性変形とともに体積が変化する、いわゆる圧縮性材料である。また金属粉末の成形体を焼結した焼結金属も、その内部に空けきを含むため、鍛造や押出しなどの塑性変形とともに体積が変化する圧縮性材料である。

粉末材料のような粒状体物質の力学的な挙動を記述するには、粉末を連続体としてとらえる考え方と、粒子に着目したいわゆるマイクロメカニクスのアプローチがある。後者については実際の粉末粒子特性との関連付けが充分とは言えないようで、したがって応用がまだ充分なされていないとも言えない。現在のところ前者のようなアプローチで粉末成形における粉末材料の挙動が論じられている。

本講座ではこのような圧縮性材料の変形特性を、力学的な側面から、その塑性構成式、すなわち降伏関数、応力ひずみ関係式等を示し、それらに基づく種々の解析手法を述べ、さらにそれらの応用例を示す。

2 構 成 式

圧縮性材料のうち、まず内部に空けきを含む固体（たとえば焼結金属）を対象として話を進めることにする。焼結金属の塑性変形における特徴は次に示す通りである。

(1) 降伏に静水応力 σ_m が影響する。すなわち静水応力のみが作用した場合でも、空けきが押しつぶされ、塑性変形する。

(2) 降伏に密度比 ρ （あるいは相対密度：見かけの密度と真密度の比）が影響する。このことは ρ が低いほど小さな応力で変形することから明らかである。

(3) 塑性変形とともに体積が変化する。

以上の特徴を考慮して、多くの研究者によって²⁾⁻¹⁰⁾圧縮性材料に対する構成式が提案された。まず降伏関数に

ついては、代表的なものとして次式が挙げられる。

$$F = \frac{3}{2} \sigma_{ij}' \sigma_{ij}' + \left(\frac{\sigma_m}{f_1} \right)^2 - (\rho^n \bar{\sigma})^2 \quad (1)$$

ここで n は材料によって決まる定数である。また f_1 は密度比 ρ の関数であり、次のような形で与えられている。

$$f_1 = 1/a(1-\rho)^m \quad (2)$$

ただし、 a 、 m は材料によって決まる定数である。また $\bar{\sigma}$ は空けき以外の実質部材料の変形抵抗である。 $\bar{\sigma}$ が一定値で降伏するとすると、降伏曲面は図1に示すような、 σ_m 軸を中心とする回転だ円体である。密度比 ρ が高くなるに従い、だ円体の両軸、特に長軸が大きくなる。すなわち σ_m 軸方向により細長いだ円体となる。そして $\rho=1$ で円筒面となりミーゼスの降伏曲面と一致する。

さて、応力とひずみ速度の関係式は非圧縮性材料のそれと同様に、ひずみ速度の方向が、降伏曲面上の考えている点において立てた外向き法線に一致すること（法線則）を前提として導かれている。ひずみ速度は

図1 降伏曲面(式(1)に対応)

[†] 原稿受理 平成元年3月1日

* 正 会 員 大阪工業大学 大阪市旭区大宮

** 正 会 員 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

式(1)の F を応力で偏微分することによって次のように得られる。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}}{\rho^{2n-1} \bar{\sigma}} \left\{ \sigma_{ij} - \delta_{ij} \left(1 - \frac{2}{9 f_1^2} \right) \sigma_m \right\} \quad (3)$$

ここで $\dot{\epsilon}$ は実質部が受ける相当ひずみ速度で

$$\dot{\epsilon} = \rho^{n-1} \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + (f_1 \dot{\epsilon}_v)^2} \quad (4)$$

と表される。したがって体積ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{ii}$ は

$$\dot{\epsilon}_v = \frac{1}{\rho^{2n-1}} \frac{\dot{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \frac{1}{f_1^2} \sigma_m \quad (5)$$

となる。また塑性変形エネルギー消散率 $\dot{W}$ は次のように表される。

$$\dot{W} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \rho \bar{\sigma} \dot{\epsilon} \quad (6)$$

以上述べた構成式の特徴は、式(3)の逆転が可能で、次のように応力をひずみ速度で表すことができることである。

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho^{2n-1} \bar{\sigma}}{\dot{\epsilon}} \left\{ \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} + \delta_{ij} \left(1 - \frac{2}{9 f_1^2} \right) f_1^2 \dot{\epsilon}_v \right\} \quad (7)$$

すなわち、非圧縮性材料の場合、ひずみ速度から偏差応力が求められるだけであるのに対し、この場合には各応力成分を直接算出することができる。

以上では圧縮性材料のうち、材料内部に空気を有する材料を前提として、話を進めてきた。次に粉末に対する構成式について述べる。まえがきにも述べたように、マイクロメカニクスのアプローチから展開された構成式はまだ充分確立されていない。したがって、連続体として粉末をとらえた構成式について述べる。結論から先に言うと、現在のところ粉末に対しても、形式的には上と全く同じ形の構成式が提案されている^{11)~13)}。両者の違いは、焼結金属の場合には $\bar{\sigma}$ および $\dot{\epsilon}$ がそれぞれ実質部の受ける相当応力および相当ひずみ速度であるのに対して、粒子相互のすべりが存在する粉末の場合は、そのようには言えないことである。提案されている式では $\bar{\sigma}$ は粉末によって変わる定数であり、 $\rho^n \bar{\sigma}$ は成形抵抗と呼ばれている。これは密度比 ρ の増加とともに成形に対する抵抗が大きくなることを意味する。しかしいずれにせよ、構成式の形が同一なので、これを応用する際には、焼結金属と粉末の区別なく使うことになる。

以上の構成式に対し、塑性変形の種々の解析法への適用のしやすさを考え、以下に示す構成式が提案されている⁸⁾。

$$F = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \pm f_2 \sigma_m - \rho^k \bar{\sigma} \quad (8)$$

ここで複号は $\sigma_m > 0$ のときに上側、 $\sigma_m \leq 0$ のときは下側をとるものとする。 k は材料によって決まる定数であり、また f_2 は密度比 ρ の関数で、 b, c を定数とすると次のように表されている。

図2 降伏曲面(式(8)に対応)

$$f_2 = b(1 - \rho)^c \quad (9)$$

この場合の降伏曲面は図2に示すように、 σ_m 軸を中心軸とし、 π 平面をはさんだ2つの円すいで表される。密度比 ρ が高くなるにしたがい、円すいの高さは大きくなり、 $\rho = 1$ でミーゼスの降伏曲面と一致する。

応力とひずみ速度の関係は法線則より

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3 \dot{\epsilon}}{\sqrt{J}} \left\{ \sigma_{ij} - \delta_{ij} \left(\sigma_m \pm \frac{2}{9} f_2 \sqrt{J} \right) \right\} \quad (10)$$

と表される。ただし $J, \dot{\epsilon}$ はそれぞれ

$$J = \frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}, \quad \dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{3}{2} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} \quad (11)$$

である。体積ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_v$ は

$$\dot{\epsilon}_v = \pm f_2 \dot{\epsilon} \quad (12)$$

となり、塑性変形エネルギー消散率 $\dot{W}$ は次のようになる。

$$\dot{W} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \rho^k \bar{\sigma} \dot{\epsilon} \quad (13)$$

平面ひずみ ($\dot{\epsilon}_3 = 0$) の場合、式(8)は

$$F = |\sigma_1 - \sigma_2| \pm (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \theta - \rho^k \bar{\sigma} \cos \theta \quad (14)$$

と表される。ただし θ は次の通りである。

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3} f_2}{\sqrt{9 - f_2^2}}, \quad \cos \theta = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{9 - f_2^2}} \quad (15)$$

次に速度依存性材料の構成式について触れておく。

HIP などのように高温での成形の場合にはひずみ速度依存性が考慮されねばならない。そこで、HIP 解析を目的として、温度も考慮に入れた圧縮性粘塑性構成式が提案されている¹⁴⁾。降伏関数 F としては式(1)の形式を考え、 $\bar{\sigma}$ は温度と密度比 ρ に依存するとしている。また全ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ は

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^{\text{th}} + \dot{\epsilon}_{ij}^{\text{pl}} + \dot{\epsilon}_{ij}^{\text{v}} \quad (16)$$

と表されている。ここに、

図6 平面ひずみ押し出しにおける速度場

図7 ホドグラフ

3・2 上界法

上界定理の基礎になっている仮想仕事の原理は構成式と無関係に成り立つ。一方、降伏曲面が外側に凸で、かつ法線則を仮定する限り、最大塑性仕事の原理も成り立つ。したがって、前章にあげた圧縮性材料の構成式のもとでも、上界定理は容易に証明される。^{(5), (19)} 上界法では可容速度場によって解が求められる。可容速度とは、非圧縮性材料の場合には、速度の境界条件と、体積一定の条件とを同時に満足する速度のことであるが、圧縮性材料の場合には体積は一定ではない。これが圧縮性材料の場合の可容速度場の大きな特徴である。

上界法の応用として、平面ひずみ押し出しについて述べる。図6に示すような三角形剛体速度場^{(5), (20)}を考える。速度不連続線において、接線方向のみならず法線方向の不連続も存在することは先に述べた。降伏条件式(14)を用いる場合、式(20)に示したように不連続速度は不連続線に対して角度 θ だけ傾いている。ゆえに図7のようなホドグラフが描ける。図6, 7をもとに、エネルギー消散率が最小になるように点Bの位置すなわち角度 β を決定すると押し出し圧力が求められる。一方、降伏条件式(1)を用いる場合は、不連続線における法線方向の不連続量すなわち体積変化量は特定できない。そ

こで点Bの位置のみでなく、体積変化量も変数と考え、エネルギー消散率を最小にすることによって押し出し圧力が計算される。⁽¹⁹⁾ その他焼結金属を塑性加工する場合の摩擦係数を決定する方法の一つとして、上界法による円板やリングの圧縮等の解析が行われている。また粉末からシートを直接成形する粉末圧延が、銅粉末の構成式に対して上記の上界定理を応用した手法によって解析されている。^{(11), (25)}

3・3 有限要素法

塑性加工の解析に広く利用されている剛塑性有限要素法は、上界定理または変分原理を応用したものである。変分原理（最小ポテンシャルエネルギーの原理）は、圧縮性材料の構成式を用いて通常の手順で次のように導くことができる。

$$\Phi = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_{S_\sigma} T_i u_i dS \quad (23)$$

$\Phi \rightarrow$ 停留

ここで、 T_i は S_σ 上で与えられた表面力、 u_i は残りの表面 S_u 上で与えられた速度、 V は考えている物体の体積である。この変分原理は非圧縮性材料の場合と同じである。したがって、対象とする材料が非圧縮性であろうと圧縮性であろうと基本的に変わるところはな

(a) メッシュの変形パターン

(b) 密度比の分布

(c) 応力分布

図8 円柱の端面拘束圧縮の解析

い。しかし、上界法の場合と同様に、非圧縮性材料の場合には、求めるべき節点速度が体積一定の条件を満足しなければならないのに対して、圧縮性材料の場合にはその必要はない。いいかえると、前者では体積一定という拘束条件のもとで、範囲数 Φ を停留（または最小化）させる必要がある。これに対して、後者では拘束条件なしに Φ を停留させることになる。したがって、実際の数値解析では、後者の方が簡単になる。

塑性ひずみ速度に弾性のひずみ速度を加え、プラントル-ロイスの形式の構成式を利用した弾塑性解析のための定式化も行われている。²⁶⁾

剛塑性有限要素法の応用例として、円柱の端面拘束圧縮についての計算結果を図8に示す。この例は初期のころのものでアワグラスモードが出ており良くない例ではあるが、(a)のメッシュの変形パターン、(b)の密度比の分布はもちろん、式(7)を用いることによってひずみ速度の分布から直接応力分布が(c)のように計算される。

粉末成形技術の中で静水圧成形（HIP、CIP）が最近特に注目されている。成形体の形状や密度分布を求めるには、有限要素法が適している。例えば式(16)を用いてHIPの粘弾塑性解析が行われている。¹⁴⁾ 静水圧成形では塑性変形量が大いので剛塑性有限要素法が適していると思われる。しかしながら、従来と同じ定式化では剛塑性有限要素法に粉末の構成式を用いても、静水圧成形の解が得られない。²⁸⁾ そこで、圧縮性材料の構成式では式(7)のように応力とひずみ速度の関係が逆転できることに着目した定式化で剛塑性有限要素法による解析が行われている。^{13), 26)} また弾塑性解析も行われている。²⁹⁾

セラミック粉末の構成式を用いたCIPの剛塑性有限要素解析例を図9に示す。^{13), 28)} また式(16)で弾性ひずみ速度を無視して、HIPの解析を行って良い結果を得ているが、この解析例を図10に示す。³⁰⁾

HIP・CIPの解析には、種々の温度あるいは密度比における粉末の挙動が十分把握される必要がある。またこのような連続体としての捉え方の他に、粒子の変形に着目した圧密の機構についても検討がなされている。³¹⁾ 今後もこの方面での検討がなされて行くであろう。

4 あ と が き

粉末や焼結金属などの圧縮性材料は非圧縮性材料とは異なった塑性変形挙動を示す。そこで本講座ではまず圧縮性材料に対する塑性構成式を示した。さらにこの構成式をもとに、いくつかの解析手法について説明した。圧縮性材料に対する塑性理論ができた結果、従来の非圧縮性材料に対する理論では扱えなかった多くの問題が解析されるようになってきた。また本講座で

初期形状：直径/高さ = 1/2.5

図9 Si_3N_4 粉末のCIPの解析

図10 タービンディスクのHIPにおける形状解析
(細線：初期形状，太線：最終形状)

は取り上げなかったが、この種の構成式を利用して、延性破壊や塑性不安定などの解析もかなり多くなされており、文献³²⁾にそれらがあげられている。興味のある読者は原論文を参照されたい。

一方、粉末材料に関しては、その変形機構そのものがまだ十分理解されているとはいいがたく、現在提案されている構成式に含まれる材料定数と、粉末の特性との関連も明らかになっているとはいえない。今後このような方面の研究が進むと思われる。

参 考 文 献

- 1) 佐武政雄, 精密工学会誌, **54**, 1917 (1988).
- 2) H. A. Kuhn and C. L. Downey, Int. J. Powder Met., **7**, 5 (1971).
- 3) R. J. Green, Int. J. Mech. Sci., **14**, 215 (1972).

- 4) 大矢根守哉, 島 進, 鴻野雄一郎, 日本機械学会論文集, **39**, 86 (1973).
- 5) 大矢根守哉, 田端 強, 塑性と加工, **15**, 43 (1974).
- 6) S. Shima and M. Oyane, Int. J. Mech. Sci., **18**, 285 (1976).
- 7) A. L. Gurson, Tr. ASME (Ser. H), **99**, 2 (1977).
- 8) 田端 強, 真崎才次, 阿部吉隆, 塑性と加工, **18**, 373 (1977).
- 9) M. S. Gadala M. L. Mullins and M. A. Dokainish, Int. J. Num. Meth. Eng., **15**, 649 (1980).
- 10) J. Duszczek, Proc. 2nd ICTP, Adv. Tech. Plasticity, **2**, 969 (1987).
- 11) 島 進, 井上隆雄, 大矢根守哉, 沖本邦郎, 粉体及び粉末冶金, **22**, 25 (1976).
- 12) S. Shima and K. Mimura, Int. J. Mech. Sci., **28**, 53 (1986).
- 13) 島 進, 中西利介, 材料, **37**, 69 (1988).
- 14) M. Abouaf and J. L. Chenot, Int. J. Num. Meth. Engng., **25**, 191 (1988).
- 15) 田端 強, 真崎才次, 魚住泰男, 日本機械学会論文集, **42**, 2939 (1976).
- 16) 田端 強, 真崎才次, 魚住泰男, 同上, **44**, 679 (1978).
- 17) 田端 強, 真崎才次, 魚住泰男, 同上, **44**, 685 (1978).
- 18) A. J. M. Spencer, "Mechanics of Solids", The R. Hill 60th Anniversary Vol. (Ed. Hopkins and Sewell) 607 (1982) Pergamon.
- 19) S. Shima, T. Tabata, M. Oyane and T. Kawakami, Mem. Fac. Eng., Kyoto Univ., **38**, 117 (1976).
- 20) 田端 強, 真崎才次, 塑性と加工, **16**, 279 (1975).
- 21) T. Tabata and S. Masaki, Int. J. Mech. Sci., **20**, 505 (1978).
- 22) T. Tabata, S. Masaki and K. Hosokawa, Int. J. Powder Met. & Powder Tech., **16**, 149 (1980).
- 23) H. K. Oh, J. Mech. Working Tech., **9**, 193 (1984).
- 24) H. K. Oh, ibid., **9**, 279 (1984).
- 25) S. Shima & M. Yamada, Powder Met., **27**, 39 (1984).
- 26) 島 進, 稲本治朗, 小坂田宏造, 鳴滝良之助, 塑性と加工, **16**, 660 (1975).
- 27) 森謙一郎, 島 進, 小坂田宏造, 日本機械学会論文集, **45**, 955 (1979).
- 28) 島 進, 中西利介, 塑性と加工, **29**, 139 (1988).
- 29) 中川知和, 野原 章, 藪 忠司, 第119回塑性加工シンポジウムテキスト, 58 (1989).
- 30) A. Nohara, T. Nakagawa, T. Soh and T. Shinke, Int. J. Num. Mech. Eng., **25**, 213 (1988).
- 31) S. V. Nair and J. K. Tien, Met. Tr., **18A**, 97 (1987).
- 32) 島 進, 塑性と加工, **29**, 681 (1988).