積層複合円筒殻の静水圧座屈に及ぼす積層構成の影響[†]

粕 谷 平 和*

Effect of Lamination Constitution on Buckling of Laminated Composite Cylindrical Shells under Hydrostatic Pressure

by

Hirakazu KASUYA*

Advanced fiber-reinforced laminated composite materials have been used for structural members in various fields, because of their high specific strength and stiffness. In general, laminated composite cylindrical shells behave differently from homogeneous orthotropic cylindrical shells due to their anisotropy and unsymmetric lamination.

In the present paper, the buckling problems of carbon fiber/epoxy (CFRP) cross-ply and angle-ply laminated cylindrical shells under hydrostatic pressure are considered. That is, the effects of stacking sequence, number of layers, lamination angle, buckling modes and dimension of cylinders, on the buckling pressure are analysed by assuming the buckling patterns which satisfy the equilibrium equation based on the Donnell-type expressions.

Key words : Structural analysis, Composite materials, Laminated cylindrical shells, Buckling strength, Hydrostatic pressure, Lamination constitution

1 緒 言

高比強度、高比剛性の高性能繊維強化プラスチック材が最近開発され、各分野の構造に数多く用いられるようになってきた。このような異方性材料よりなる積層複合円筒殻は、積層配列や強化繊維の配向等によってはカップリング効果などの各種の積層構成効果があり、単純な直交異方性積層理論による均質な直交異方性円筒殻とは異なる力学的挙動を示す。そこで、このような積層複合円筒殻の各種外圧のもとでの座屈現象を的確に把握しておく必要が生じ、数例の解析的研究の報告がなされている。^{1)~3)}

本論文では、海中構造物に見られるような、半径方向および軸方向に均一な外圧力を受ける問題を取り上げ、クロスプライおよびアングルプライ積層円筒殻を例にとって、前報と同様な手法を用いて理論解析し、積層構成、積層数の他に、特に前報では取り上げなかった積層順序、殻の形状寸法などの静水圧座屈に及ぼす影響を系統的に検討し、最適積層構成に対する参考資料とする。

2 座屈解析法

Fig. 1 に示すような積層円筒殻（半径 R 、筒長 L 、板厚 t ）が半径方向と軸方向に均一な外圧力 p を受ける場合について考え、円筒軸方向、円周方向、半径

方向にそれぞれ x , y , z 軸をとる。また、Fig. 2 に示すように、積層円筒殻は各層とも均質な直交異方性材の N 層積層からなり、 k 番目の層は基準面から $z = t_k - t_{k+1}$ 間に存在し、繊維は円筒主軸と角度 θ_k の方向を向いているとする。

2・1 積層円筒殻の基礎式

一般的な積層円筒殻が半径方向と軸方向に均一な外

Fig. 1. Configuration and coordinates of laminated composite cylindrical shell.

Fig. 2. Geometry of an N -layered laminate.

[†] 原稿受理 平成元年1月9日 Received Jan. 9, 1989

* 正会員 東海大学工学部 平塚市北金目, Faculty of Engineering, Tokai University, Kitakaname, Hiratsuka

圧力 p を受けて座屈するときの付加変位 u , v , w を用いて表した Donnell 形の平衡方程式は次式となる。

x 方向;

$$\begin{aligned} & A_{11}u_{,xx} + A_{12}(v_{,xy} + w_{,x}/R) + A_{16}(v_{,xx} \\ & + u_{,xy}) - B_{11}w_{,xxx} - B_{12}w_{,xyy} - 2B_{16}w_{,xyx} \\ & + A_{16}u_{,xy} + A_{26}(v_{,yy} + w_{,y}/R) + A_{66}(v_{,xy} \\ & + u_{,yy}) - B_{16}w_{,xxx} - B_{26}w_{,yyy} - 2B_{66}w_{,xyy} \\ & = 0 \end{aligned}$$

y 方向;

$$\begin{aligned} & A_{16}u_{,xx} + A_{26}(v_{,xy} + w_{,x}/R) + A_{66}(v_{,xx} \\ & + u_{,xy}) - B_{16}w_{,xxx} - B_{26}w_{,xyy} - 2B_{66}w_{,xyx} \\ & + A_{12}u_{,xy} + A_{22}(v_{,yy} + w_{,y}/R) + A_{26}(v_{,xy} \\ & + u_{,yy}) - B_{12}w_{,xxx} - B_{22}w_{,yyy} \\ & - 2B_{26}w_{,xyy} = 0 \end{aligned}$$

z 方向;

$$\begin{aligned} & B_{11}u_{,xxx} + B_{12}(v_{,xy} + w_{,x}/R) + B_{16}(v_{,xxx} \\ & + u_{,xy}) - D_{11}w_{,xxx} - D_{12}w_{,xyy} - 2D_{16}w_{,xyx} \\ & + 2[B_{16}u_{,xy} + B_{26}(v_{,xy} + w_{,y}/R) + B_{66}(v_{,xy} \\ & + u_{,xy}) - D_{16}w_{,xxx} - D_{26}w_{,xyy} - 2D_{66}w_{,xyx}] \\ & + B_{12}u_{,xy} + B_{22}(v_{,yy} + w_{,y}/R) + B_{26}(v_{,xy} \\ & + u_{,yy}) - D_{12}w_{,xxx} - D_{22}w_{,yyy} - 2D_{26}w_{,xyy} \\ & - [A_{12}u_{,x} + A_{22}(v_{,y} + w/R) + A_{26}(v_{,x} + u_{,y}) \\ & - B_{12}w_{,xx} - B_{22}w_{,yy} - 2B_{26}w_{,xy}] / R \\ & + \bar{N}_x w_{,xx} + \bar{N}_y w_{,yy} = 0 \end{aligned}$$

(1)

ここで、添字 “ x ”, “ y ” は x , y に関する偏微分を意味し、 A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) は、それぞれ伸張剛性マトリックス、カップリング剛性マトリックス、曲げ剛性マトリックスである⁴⁾。また、 $\bar{p}$ を座屈時静水圧とし、 $\bar{N}_x$ は軸方向膜力 ($=\bar{p}R/2$)、 $\bar{N}_y$ は円周方向膜力 ($=\bar{p}R$) である。

2.2 静水圧座屈値の解析

2.2.1 クロスプライ積層円筒殻 クロスプライ積層円筒殻は、軸方向 (0°) と円周方向 (90°) の2層を交互に積層したもので、単純支持の境界条件 ($S-2$) [$x=0, L$ で $w=M_x=N_x=v=0$] と平衡方程式 (1) を満足する座屈波形

$$\left. \begin{aligned} u &= u_{mn} \cos(m\pi x/L) \sin(ny/R) \\ v &= v_{mn} \sin(m\pi x/L) \cos(ny/R) \\ w &= w_{mn} \sin(m\pi x/L) \sin(ny/R) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

を式 (1) に代入すれば各項は同じ関数形となり、変位係数に関する連立同次方程式を解けば座屈値が後述の式 (4) から求められる。

2.2.2 アングルプライ積層円筒殻 アングルプライ積層円筒殻は、円筒主軸に対して $(+\theta)$, $(-\theta)$ ($\theta = 0^\circ \sim 90^\circ$) の2層を交互に積層したもので、多くのカップリング項があり、境界条件と平衡方程式の両者を厳密に満足する解析解を得ることは難しい。そこで、

ある程度の筒長を有する場合を考え、平衡方程式のみを完全に満足する周期解を用いて近似的に検討する。すなわち、非対称変形座屈様式として

$$\left. \begin{aligned} u &= u_{mn} \sin(m\pi x/L) + (ny/R) \\ v &= v_{mn} \sin(m\pi x/L) + (ny/R) \\ w &= w_{mn} \cos(m\pi x/L) + (ny/R) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

を考え、式 (1) に代入すると、式 (1) の各項は同じ関数形となり、変位係数に関する連立同次方程式となる。

2.2.3 座屈値の解析式 クロスプライ積層円筒殻、アングルプライ積層円筒殻の場合ともに座屈値は次の係数行列式から固有値として解析式で得られる。

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} T_{11} &= A_{11}(m\pi/L)^2 + 2A_{16}(m\pi/L)(n/R) \\ &\quad + A_{66}(n/R)^2 \\ T_{12} &= A_{16}(m\pi/L)^2 + (A_{12} + A_{66})(m\pi/L)(n/R) \\ &\quad + A_{26}(n/R)^2 \\ T_{22} &= A_{66}(m\pi/L)^2 + 2A_{26}(m\pi/L)(n/R) \\ &\quad + A_{22}(n/R)^2 \\ T_{13} &= -[A_{12}(m\pi/L)/R + B_{11}(m\pi/L)^3 \\ &\quad + 3B_{16}(m\pi/L)^2(n/R) + (B_{12} \\ &\quad + 2B_{66})(m\pi/L)(n/R)^2 \\ &\quad + B_{26}(n/R)^3 + A_{26}(n/R)/R] \\ T_{23} &= -[A_{26}(m\pi/L)/R + B_{16}(m\pi/L)^3 \\ &\quad + (B_{12} + 2B_{66})(m\pi/L)^2(n/R) \\ &\quad + 3B_{26}(m\pi/L)(n/R)^2 + B_{22}(n/R)^3 \\ &\quad + A_{22}(n/R)/R] \\ T_{33} &= A_{22}/R^2 + 2B_{12}(m\pi/L)^2/R \\ &\quad + 4B_{26}(m\pi/L)(n/R)/R + 2B_{22}(n/R)^2/R \\ &\quad + D_{11}(m\pi/L)^4 + 4D_{16}(m\pi/L)^3(n/R) \\ &\quad + 2(D_{12} + 2D_{66})(m\pi/L)^2(n/R)^2 \\ &\quad + 4D_{26}(m\pi/L)(n/R)^3 \\ &\quad + D_{22}(n/R)^4 + \bar{N}_y(n/R)^2 + (m\pi/L)^2/2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

静水圧座屈値は、 $K_0 = \bar{p}R/E_T t$ のように無次元値で表わすと、殻の材料定数の他に形状因子 R/t , $Z = L^2/Rt$ の関数であり、各種の波数 m , n の整数値に対するその最小値に相当する。

3 数値計算例と解析結果の検討

数値計算例としては、カーボン繊維強化プラスチック (CFRP) 材を考える。その基本の弾性材料定数は平均化近似解析による式により計算され、実験で確かめられた次の値である。

$$E_L = 137 \text{ GPa}, E_T = 8.17 \text{ GPa}$$

$$G_{LT} = 4.75 \text{ GPa}, \nu_L = 0.316, \nu_T = 0.0189$$

本計算例では、板厚 t のもとで、各構成層は等厚

とし、したがって積層数 N は対称積層の場合は奇数、逆対称積層の場合は偶数として考える。

3・1 クロスプライ積層円筒殻の検討

クロスプライ積層円筒殻の数値計算結果を、対称積層で最内層積層角を 0° とした場合を Fig. 3 に、最内層積層角を 90° とした場合を Fig. 4 に、逆対称積層の場合を Fig. 5 に示す。

(1) 形状パラメータ Z , R/t の影響 座屈係数 K_0 と形状パラメータ Z との関係は、対称積層、逆対称積層の場合ともに、いずれの R/t に対しても Z の増加にともない K_0 値は低下している。通常の円筒殻で $Z > 100$ とすれば、Fig. 3 ~ Fig. 5 でわかるように K_0 値の低下は両対数表示で直線的なので、 $K_0 = \alpha/Z^\beta$ の形で表わされる。ここで指数 β は R/t にほぼ無関係に一定値をとるが、係数 α は積層構成、積層数、積層順序などによって異なる値を示す。

座屈係数に及ぼす R/t の影響は、軸圧縮座屈の場

合には現れないが、静水圧座屈の場合には、対称積層、逆対称積層の場合ともに、 R/t が大きくなるとともに座屈係数は低下する。これは等方性材料の場合と同じである。

(2) 積層数 N の影響 対称積層の場合には、カップリング効果はないが、クロスプライ比の変化による各種剛性値の変化が K_0 値に及ぼす影響が大きく、最内層積層角が 0° の場合には、積層数の減少による K_0 値の低下が顕著に現れ、 Z の増加とともにその差は大きくなっている。また、最内層積層角が 90° の場合には、積層数の減少にともない K_0 値は増加する。このように対称積層では、最内層積層角を 0° とした場合と 90° とした場合とでは、積層数の多少が K_0 値に及ぼす影響は逆に両者の差が明確になり、積層順序が座屈値に及ぼす影響は顕著になってくる。これは後述のアングルプライ積層円筒殻のところで示してあるよ

(a) $R/t = 100$.

(b) $R/t = 50 \sim 500$.

Fig. 3. Variation of buckling coefficients of symmetric cross-ply laminated cylindrical shells with shape parameter Z . (Inner lamination angle $\theta = 0^\circ$).

(a) $R/t = 100$.

(b) $R/t = 50 \sim 500$.

Fig. 4. Variation of buckling coefficients of symmetric cross-ply laminated cylindrical shells with shape parameter Z . (Inner lamination angle $\theta = 90^\circ$).

うに、積層角が 0° よりも 90° のほうが高い座屈値を与えるからである。

逆対称積層の場合には、クロスプライ比は一定値1.0となるが、中央面と中立面とが異なるために生ずる伸張-曲げカップリング効果が現れ、 K_0 値は積層数が少ないと低下し、特に2層の場合に著しい低下を示した。

(3) 座屈波形の影響 最小座屈値を与える座屈波数のうち、軸方向半波数 m は対称積層、逆対称積層に関係なくすべての積層数 N 、形状パラメータ R/t 、 Z に対して1であり、軸方向に半波形で座屈する。しかし、円周方向波数 n は図中に示してあるように、 Z の増加および R/t の減少にともない減少する。また N の変化による n は、最内層積層角が 0° の対称積層および逆対称積層の場合には N の増加にともない、最内層積層角が 90° の対称積層の場合には N の減少にともない減少する。

(a) $R/t=100$.

(b) $R/t=50\sim500$.

Fig. 5. Variation of buckling coefficients of antisymmetric cross-ply laminated cylindrical shells with shape parameter Z .

(4) 積層順序の影響 対称積層では、最内層積層角を 0° とした場合と 90° とした場合とでは、前述したように積層順序が座屈値に及ぼす影響は大きく現れる。しかし逆対称積層では、伸張剛性 A_{11} と A_{22} および曲げ剛性 D_{11} と D_{22} の値が同一になるため、積層順序が座屈値に与える影響はなくなる。

3.2 アングルプライ積層円筒殻の検討

アングルプライ積層円筒殻の数値計算結果を、対称積層の場合を Fig. 6 に、逆対称積層の場合を Fig. 7 に示す。座屈値に及ぼす形状パラメータ Z の影響は、クロスプライ積層円筒殻の場合と同様に表わされるので、一例として $Z=900$ の場合について示している。

(1) 積層角 θ の影響 座屈係数 K_0 と積層角 θ との関係は、対称積層、逆対称積層の場合ともに、いずれの積層数、形状パラメータに対しても、 θ の増加にと

(a) $R/t=100$.

(b) $R/t=50\sim500$.

Fig. 6. Variation of buckling coefficients of symmetric angle-ply laminated cylindrical shells with lamination angle θ .