平均値と分散による破損確率および安全係数の上界評価 (連続・単峰性のみを仮定した場合)[†]

市 川 昌 弘*

Evaluation of Upper Bounds of Probability of Failure and Factor of Safety Based on Means and Variances (The Case When Only Continuity and Unimodalness are Assumed)

by

Masahiro ICHIKAWA*

This paper is concerned with evaluation of the upper bound of probability of failure when the distribution forms of the strength R and the stress S are unknown and only their means μ_R and μ_S , and variances σ_R^2 and σ_S^2 are known. In the previous paper, assuming (a) the distribution of $Z \equiv R - S$ is continuous and unimodal and (b) the mode of Z is equal to the mean of Z , the present author derived the formula $P_{fu} = (4/9)(f_c^2 \eta_R^2 + \eta_S^2)/(f_c - 1)^2$ using Camp-Meidell inequality, where $f_c \equiv \mu_R/\mu_S$ is the central factor of safety, and $\eta_R \equiv \sigma_R/\mu_R$ and $\eta_S \equiv \sigma_S/\mu_S$ are the coefficients of variation of R and S , respectively. However, the assumption (b) can be satisfied only in limited cases. Thus, it was attempted in the present paper to evaluate P_{fu} assuming only (a) without assuming (b). The problem was formulated as an optimization problem and solved using linear programming. It was found that the above formula can still be used under the assumption (a) alone. That is, the formula gives an almost exact value of P_{fu} under the assumption (a) alone when η_Z , the coefficient of variation of Z , is small, and gives a somewhat higher value when η_Z is large. Hence, practical applicability was given to the above formula in the present study. The upper bound of the central factor of safety can also be obtained from this formula only by assuming the condition (a). Thus, by merely assuming that the distribution of $Z \equiv R - S$ is continuous and unimodal, considerably lower upper bounds can be obtained for the probability of failure and for the factor of safety as compared with the case when no assumption is made.

Key words : Reliability engineering, Probability of failure, Factor of safety, Upper bound, Linear programming

1 緒 言

分布形が不明で平均値と分散しかわからない場合の構造信頼性の評価尺度として、いわゆる安全性指標 β (信頼性指標ともいう)^{(1),(2)}が知られているが、破損確率 P_f は分布形を仮定しない限り求めることはできない。しかし、 P_f の上界は平均値と分散のみからでも求めることができる⁽³⁾。

強度 R と荷重 S の平均値を μ_R , μ_S , 分散を σ_R^2 , σ_S^2 とすると、これらを用いた破損確率の上界 P_{fu} の式として、Thienらは1974年に次式を導いた。

$$P_{fu} = \frac{f_c^2[(1 + \eta_R^2)(1 + 3\eta_S^2) + \lambda(\lambda - 2)(1 + \eta_S^2)^2]}{[\lambda f_c(1 + \eta_S^2) - 1]^2} \quad (1)$$

$$\lambda = \frac{f_c[(1 + \eta_R^2)(1 + 3\eta_S^2)/(1 + \eta_S^2)] - 1}{f_c(1 + \eta_S^2) - 1}$$

ここで、 $f_c (= \mu_R/\mu_S)$ は中央安全係数、 $\eta_R (= \sigma_R/\mu_R)$ と $\eta_S (= \sigma_S/\mu_S)$ はそれぞれ R と S の変動係数である。

その後1983年に著者は式(1)よりも低い上界を与えることのできる式を次のように導いた⁽⁵⁾。

$$P_{fu} = \frac{f_c^2 \eta_R^2 + \eta_S^2}{(f_c - 1)^2 + f_c^2 \eta_R^2 + \eta_S^2} \quad (2)$$

この式は強度 R と荷重 S の分布形がどのようなものであっても、破損確率は式(2)の右辺を超えないということを表している。

式(1)や式(2)の導出では R , S の分布に対し何らの仮定もなされていないが、もしも、(a) $Z \equiv R - S$ の分布は連続・単峰であり(最頻値が1個だけであることを単峰という)、かつ、(b) Z の平均値 μ_Z と最頻値 Z_{mo} は等しい、という2つの仮定を設けるならば、Camp-Meidellの不等式を利用して、次式を導くことができる⁽⁵⁾。

$$P_{fu} = \frac{4}{9} \frac{f_c^2 \eta_R^2 + \eta_S^2}{(f_c - 1)^2} \quad (3)$$

[†] 原稿受理 平成元年1月9日 Received Jan. 9, 1989

* 正会員 電気通信大学 調布市調布ヶ丘, University of Electro-Communications, Chofugaoka, Chofu

式(3)は式(2)よりもさらに低い上界を与える。しかし、上記の仮定(a), (b)のうちで、(b)が満足されるのは特別の場合に限られる。したがって、仮定(b)を必要とする限り、式(3)は実用性に欠ける。

そこで、本報では仮定(a)のみ、すなわち連続・単峰性のみを仮定して P_f の上界を求めることを試みた。仮定(a)は多くの場合満足されると思われるので、(a)のみを仮定して得られる P_f の上界は実用的価値が高い。

ところで、式(2)や式(3)を中央安全係数 f_c について解けば、 f_c の上界を与える式が得られる。これは所与の η_R, η_S の下で P_f を許容値以下におさえるために必要な f_c の上界を与える。したがって、連続・単峰性のみを仮定して P_f の上界を f_c の関数として求めれば、この仮定の下で f_c の上界も得られることになる。

2 線形計画法による定式化

式(2)と式(3)はそれぞれ、Bienayme-Chebyshev の不等式と Camp-Meidell の不等式を利用して解析的に導いたものである。本報のように連続・単峰性のみを仮定した場合に、この仮定をうまく活用できる不等式が見当らなかったため、最適化問題として解くことを考えた。すなわち、 P_f の上界を求める問題を、与えられた制約条件の下で確率 $\Pr(R-S \leq 0)$ を最大とするような $R-S$ の分布を求める最適化問題として定式化し、これを解くという方法を考えた。

$Z \equiv R-S$ とし、まず Z の分布に何らの仮定も設けない場合を定式化する。 Z の確率密度関数を $f(Z)$ とすると、 P_f の上界を求める問題は $f(Z)$ に関する次の最適化問題として表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 f(Z) dZ \rightarrow \max \\ \text{制約条件:} & \left. \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(Z) dZ = 1 \\ & \int_{-\infty}^{\infty} Z f(Z) dZ = \mu_Z = \mu_R - \mu_S \\ & \int_{-\infty}^{\infty} Z^2 f(Z) dZ = \mu_Z^2 + \sigma_Z^2 = (\mu_R - \mu_S)^2 + \sigma_R^2 + \sigma_S^2 \end{aligned} \right\} \quad (4) \end{aligned} \right\}$$

ただし、 R と S は統計的に独立とした。式(4)は与えられた平均値と分散を有する $f(Z)$ のうちで、 $\Pr(Z \leq 0)$ が最大の $f(Z)$ を求める問題である。

式(4)の最適化問題を解析的に解くことは困難なので、 Z の変域を有限個の微小区間に分割して積分を和で近似し、線形計画法を適用することを考えた。そのために、 R と S の取り得る最大値を ∞ ではなく、十分大きな有限値 $R_{\max}, S_{\max}$ でおきかえる。 R, S は非負であるから、 $0 \leq R \leq R_{\max}, 0 \leq S \leq S_{\max}$ となり、したがって、 $-S_{\max} \leq Z \leq R_{\max}$ となる。 Z の分

布関数を $F(Z)$ とし、部分積分を用いて式(4)を書き直すと、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & F(0) \rightarrow \max \\ \text{制約条件:} & \left. \begin{aligned} & F(-S_{\max}) = 0, F(R_{\max}) = 1 \\ & \int_{-S_{\max}}^{R_{\max}} F(Z) dZ = R_{\max} - \mu_Z \\ & \int_{-S_{\max}}^{R_{\max}} Z F(Z) dZ = \frac{1}{2} (R_{\max}^2 - \mu_Z^2 - \sigma_Z^2) \end{aligned} \right\} \quad (5) \end{aligned} \right\}$$

さらに、 $X = Z + S_{\max}$ と変数変換し、 X の分布関数を $G(X)$ として、 $G(X)$ を用いて式(5)を書きかえると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & G(S_{\max}) \rightarrow \max \\ \text{制約条件:} & \left. \begin{aligned} & G(0) = 0, G(R_{\max} + S_{\max}) = 1 \\ & \int_0^{R_{\max} + S_{\max}} G(X) dX = R_{\max} - \mu_Z \\ & \int_0^{R_{\max} + S_{\max}} X G(X) dX = \frac{1}{2} (R_{\max}^2 - \mu_Z^2 - \sigma_Z^2) \\ & \quad + S_{\max} (R_{\max} - \mu_Z) \end{aligned} \right\} \quad (6) \end{aligned} \right\}$$

X の変域 $0 \leq X \leq R_{\max} + S_{\max}$ を n 個の区間に等分割し、 $g_i (i=1 \sim n)$ を次式で定義する。

$$g_i = G(id) - G((i-1)d) \quad (7)$$

ここで、 d は区間幅で、 $d = (R_{\max} + S_{\max})/n$ である。

式(7)からわかるように、 g_i は非負である。 $0 \leq X \leq S_{\max}$ 、すなわち、 $-S_{\max} \leq Z \leq 0$ の中に含まれる区間の数を k とする。式(6)の中の積分に対して台形公式を適用すると、式(6)は次の線形計画問題となる。

$$\left. \begin{aligned} & g_1 + g_2 + \cdots + g_k \rightarrow \max \\ \text{制約条件:} & \left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^n g_i = 1 \\ & \sum_{i=1}^n i g_i = k + \frac{1}{2} + \frac{\mu_Z}{d} \\ & \sum_{i=1}^n i^2 g_i = k^2 + k + \frac{1}{2} + \frac{(2k+1)\mu_Z}{d} + \frac{\mu_Z^2 + \sigma_Z^2}{d^2} \end{aligned} \right\} \quad (8) \end{aligned} \right\}$$

次に、 $Z \equiv R-S$ の分布が連続・単峰であるという仮定を制約条件に加える。いま仮に最頻値が i_0 番目の区間にあるとすると、連続・単峰という条件は

$$\left. \begin{aligned} & g_i - g_{i+1} \leq 0 \quad (1 \leq i \leq i_0 - 1 \text{ に対し}) \\ & g_i - g_{i+1} \geq 0 \quad (i_0 \leq i \leq n - 1 \text{ に対し}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

と表すことができる。したがって、連続・単峰の仮定の下で P_f の上界を求める問題は、次のように定式化される。

$$\left. \begin{aligned} & g_1 + g_2 + \cdots + g_k \rightarrow \max \\ \text{制約条件:} & \left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^n g_i = 1 \\ & \sum_{i=1}^n i g_i = k + \frac{1}{2} + \frac{\mu_Z}{d} \end{aligned} \right\} \quad (10) \end{aligned} \right\}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 g_i = k^2 + k + \frac{1}{2} + \frac{(2k+1)\mu_z}{d} + \frac{\mu_z^2 + \sigma_z^2}{d^2}$$

$$g_i - g_{i+1} \leq 0 \quad (1 \leq i \leq i_0 - 1 \text{ に対し})$$

$$g_i - g_{i+1} \geq 0 \quad (i_0 \leq i \leq n - 1 \text{ に対し})$$

i_0 を仮定して式 (10) を解き、そのときの $g_1 + g_2 + \dots + g_k$ の最大値を $P_{Fi}(i_0)$ とする. i_0 を系統的に変えて $P_{Fi}(i_0)$ を求め、 i_0 に関する $P_{Fi}(i_0)$ の最大値を求めれば、これが連続・単峰という仮定の下での P_F の上界を与える.

3 線形計画法の検討

線形計画法により破損確率の上界が正しく求まることを確認するために、まず $Z \equiv R - S$ の分布に何らの仮定も設けない場合の解、すなわち式 (8) の解を求める. 計算には $\mu_R, \mu_S, \sigma_R, \sigma_S, R_{\max}, S_{\max}, n$ を与える必要がある. 以下では、中央安全係数 f_c と変動係数 η_R, η_S を基本入力値とし、これに μ_S を与え、 $\mu_R, \sigma_R, \sigma_S$ は $\mu_R = f_c \mu_S, \sigma_R = \mu_R \eta_R, \sigma_S = \mu_S \eta_S$ より定めた. P_F はこの場合 μ_S の絶対的な大きさには無関係であるから、 μ_S は任意に与えてよい. ここでは $\mu_S = 5$ (単位は任意) とした. $R_{\max}$ と $S_{\max}$ は十分大きくとる必要があるが、本章ではとりあえず $R_{\max} \approx \mu_R + 4\sigma_R, S_{\max} \approx \mu_S + 4\sigma_S$ を目安にして与えた. 本章の計算は予備的性格のものであるので、分割数 n は若干の試行にもとづいて、 $n = 60$ とし、パソコンを用いて解いた. なお、 $R_{\max}$ と $S_{\max}$ の決定に際しては、 $k = S_{\max}/d = nS_{\max}/(R_{\max} + S_{\max})$ が整数値となるように注意する必要がある.

計算は $\eta_R = 0.05, \eta_S = 0.2$ とし、 $f_c = 2, 4, 6, 8, 10$ の 5 個の場合について行った. Fig. 1 に結果を示す. 白丸が式 (8) の解であり、上から 2 つ目の曲線が式 (2) である. 両者はよく一致しており、線形計画法によって P_F の上界が正しく求められることがわかる. なお、

Fig. 1. Solution of Eq. (8) as compared with Eq. (2).

Fig. 1 には参考のため、Thien らによる式 (1) も示した. 式 (1) も $Z \equiv R - S$ の分布に何らの仮定もしない場合の式であるが、式 (2) の方がかなり低い上界を与えることができることが図からわかる. なお、一番下の曲線は式 (3) であり、これは前述のように、連続・単峰でかつ平均値=最頻値という仮定の下に導かれたものである.

4 連続・単峰性のみを仮定した場合の上界

本章では式 (10) の線形計画問題を解いて、連続・単峰性のみを仮定した場合の P_F の上界を求める. 3 章の結果より、 $n, R_{\max}, S_{\max}$ の大きさは $n = 60, R_{\max} \approx \mu_R + 4\sigma_R, S_{\max} \approx \mu_S + 4\sigma_S$ の程度でよいと予想されるが、制約条件が増えているので、念のため、 $n, R_{\max}, S_{\max}$ の値のとり方についてまず検討した.

Fig. 2 は $\eta_R = 0.05, \eta_S = 0.2, f_c = 2, \mu_S = 5, R_{\max} \approx \mu_R + 4\sigma_R, S_{\max} \approx \mu_S + 4\sigma_S$ として、 n を 10~200 の間で変化させ、分割数 n の影響を示したものである. $n \geq 100$ の場合の計算には大型計算機を用いた. Fig. 2 によれば、 $n \geq 60$ では安定した上界が得られている. Fig. 3 は $f_c = 2, \eta_R = 0.05, \eta_S = 0.2, n = 200$ とし、 $R_{\max} = \mu_R + r\sigma_R, S_{\max} = \mu_S + s\sigma_S$ としたときの r と s

Fig. 2. Influence of n on the solution of Eq. (10).

Fig. 3. Influence of $R_{\max} = \mu_R + r\sigma_R$ and $S_{\max} = \mu_S + s\sigma_S$ on the solution of Eq. (10).

を種々変えて計算した結果である。やはり大型計算機を用いて計算した。Fig. 3 によれば、 $r=4$, $s=4$ で既に安定した値が得られている。Fig. 2, Fig. 3 は $f_c=2$, $\eta_R=0.05$, $\eta_S=0.2$ の場合であるが、他の場合にも同様の結果が得られた。そこで、以下の計算では $R_{\max}$ と $S_{\max}$ は $R_{\max} \approx \mu_R + 4\sigma_R$, $S_{\max} \approx \mu_S + 4\sigma_S$ を目安として決めることとした。 n は上述のように 60 程度でもよいが、計算にそれほど時間を要しないので、大き目にとって $n=200$ とした。

以上の検討をもとにして、 f_c , η_R , η_S の種々の組合せについて、連続・単峰の仮定の下で P_f の上界を計算した。計算は $(f_c, \eta_R, \eta_S) = (2, 0.05, 0.05)$, $(2, 0.05, 0.2)$, $(2, 0.05, 0.4)$, $(2, 0.2, 0.05)$, $(2, 0.2, 0.2)$, $(2, 0.2, 0.4)$, $(2, 0.4, 0.05)$, $(2, 0.4, 0.2)$, $(2, 0.4, 0.4)$, $(6, 0.05, 0.2)$, $(6, 0.4, 0.4)$, $(10, 0.05, 0.2)$, $(10, 0.4, 0.4)$ の 13 通りの場合について行った。それぞれの場合について、式(10)の i_0 の値を系統的に変え、所与の i_0 に対する $g_1 + g_2 + \dots + g_k$ の最大値 $P_{fu}(i_0)$ を求め、 i_0 に関する $P_{fu}(i_0)$ の最大値をもって P_f の上界とした。計算には大型計算機を用いた。

はじめに、 $P_{fu}(i_0)$ が i_0 によってどのように変化するかを、いくつかの場合について Fig. 4 に示す。この図は Z の平均値 μ_Z に対する最頻値 Z_{M0} の相対的位置を示す量として $(Z_{M0} - \mu_Z)/\sigma_Z$ を横軸にとって $P_{fu}(i_0)$ をプロットしたもので、破線は計算点(白丸)を滑らかに結んだものである。 $(Z_{M0} - \mu_Z)/\sigma_Z$ のある値のところで $P_{fu}(i_0)$ が最大となることがわかる。この最大値が、連続・単峰性のみを仮定した場合の P_f の上界を

Fig. 4. Variation of the solution of Eq. (10) with i_0 .

Fig. 5. Solution of Eq. (10) as compared with Eq. (3) (Comparison on f_c - P_{fu} coordinates).

与える。

次に、上記の 13 通りの場合の P_{fu} を示す。最初、Fig. 5 のように横軸に中央安全係数 f_c をとって P_{fu} をプロットし、式(3)の曲線と比較した。Fig. 5 は $(\eta_R, \eta_S) = (0.05, 0.2)$ と $(0.4, 0.4)$ の場合であるが、 $(0.05, 0.2)$ の場合は計算点(白丸)は式(3)(実線)とほとんど一致し、 $(0.4, 0.4)$ の場合は計算点は式(3)より低目となっており、Fig. 5 のような整理では全体の様子がとらえにくい。

ところで、 Z の変動係数

$$\eta_Z = \frac{\sigma_Z}{\mu_Z} = \frac{(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)^{1/2}}{\mu_R - \mu_S} = \frac{(f_c^2 \eta_R^2 + \eta_S^2)^{1/2}}{f_c - 1} \quad (11)$$

を用いると、式(3)は $P_{fu} = (4/9)\eta_Z^2$ と表されるから、横軸に η_Z をとると、式(3)は η_R , η_S によらず 1 本の曲線で表される。そこで、上記の 13 通りの場合の計算結果を、Fig. 6 のように横軸に η_Z をとってプロットし、式(3)と比較した。Fig. 6 より、 η_Z が小さいときは計算点(白丸)は式(3)(実線)とほとんど一致し、 η_Z が大きいときは計算点は式(3)より低目となることがわかる。このことは全体として式(3)は、連続・単峰性のみを仮定した場合の P_f の上界にきわめて近いが、またはそれより若干高目の値を与えることを意味している。したがって、式(3)は連続・単峰性のみを仮定した場合の P_f の上界式としても有効である。

式(3)を f_c について解き、 P_{fu} に P_f の許容値 P_{fa} を代入すると

$$f_c = \frac{2.25P_{fa} + [2.25P_{fa}(\eta_R^2 + \eta_S^2) - \eta_R^2 \eta_S^2]^{1/2}}{2.25P_{fa} - \eta_R^2} \quad (12)$$

が得られる。この式は、与えられた η_R , η_S の下で $P_f \leq P_{fa}$ とするために必要な中央安全係数の上界を与える。式(12)は前報の段階では連続・単峰性の仮定のほか

Fig. 6. Solution of Eq.(10) as compared with Eq.(3)
(Comparison on η_z - P_{fu} coordinates).

に平均値＝最頻値という仮定を必要としていたが、本報の研究により、式(12)は連続・単峰性のみを仮定すれば成立することが明らかとなったわけである。

5 考 察

Fig. 6 の計算点と式 (3) の大小関係について考察する。前述のように、式 (3) は (a) $Z \equiv R - S$ の分布が連続・単峰であり、かつ、(b) Z の最頻値は平均値と等しい、という 2 つの仮定の下で導かれたものである。一方、計算点は (a) のみを仮定して得られたものである。式 (3) を導く場合に用いた情報の方が仮定 (b) の分だけ多いので、式 (3) の方が計算点より低くなるのではないかと最初予想されたが、実際の結果は Fig. 6 のようにその逆となった。これは、式 (3) の P_{fu} は Camp-Meidell の不等式を用いて間接的に得られたものであるのに対し、計算点の P_{fu} は最適化問題の解として直接得られたものであるという相違によるものと考えられる。すなわち、Camp-Meidell の不等式はその導出過程から理解されるようにそれ程鋭い（無駄の少ない）不等関係ではないので、これを利用して求めた P_f の上界の方が本報の計算点よりやや高くなったものと考えられる。

なお、Fig. 6 の破線の曲線は試みに $P_{fu} = (4/9)\eta_z^2 / (1 + \eta_z^2)$ という式をえがいたもので、計算点はこの曲線

とよく一致している。しかし、この式の妥当性については今後さらに検討が必要である。

6 結 論

強度 R と荷重 S の平均値と分散のみを用いて破損確率 $P_f = \Pr(R \leq S)$ の上界を求める研究の一環として、 $Z \equiv R - S$ の分布が連続・単峰であるという仮定のみを設けた場合の P_f の上界を、線形計画法を用いて求めた。これより次の結論が得られた。

(1) 連続・単峰性のみを仮定した場合にも、 P_f の上界の評価に式 (3) が使えることがわかった。すなわち、 Z の変動係数 η_z が小さいときは式 (3) は連続・単峰性のみを仮定した場合の P_f の上界をほぼ正確に与え、 η_z の大きいときはやや大き目の上界を与える。

(2) したがって、連続・単峰性のみを仮定するだけで式 (3) によって P_f の上界を評価することができ、何らの仮定もしない場合の式 (2) よりもかなり低い上界を得ることができる。連続・単峰という仮定は多くの場合満足されると思われるので、式 (3) は実用的となった。

(3) 式 (3) を f_c について解いた式（すなわち式 (12)）によって、連続・単峰性のみを仮定した場合の中央安全係数の上界が得られる。

(4) 線形計画法により、破損確率および安全係数の上界を計算することができる。

計算機による数値計算には本学学生（当時）野川潤、村川和彦、杉山剛夫の諸君の協力をいただいた。また本研究の一部は文部省科学研究費補助金によった。以上記して謝意を表します。

（昭和 62 年 12 月 3 日 第 1 回構造物の安全性および信頼性に関する国内シンポジウムにて一部講演）

参 考 文 献

- 1) C. A. Cornell, ACI Journal, **66**, 974 (1969).
- 2) M. A. Hasofar and N. C. Lind, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, **100**, 111 (1974).
- 3) C. Mischke, J. Eng. Ind., Trans. ASME, **92**, 537 (1970).
- 4) M. D. Thien and M. Massoud, J. Eng. Ind., Trans. ASME, **96**, 853 (1974).
- 5) M. Ichikawa, Reliability Eng., **5**, 173 (1983).