DEM 解析における要素定数の検討†

藤 村 尚* 西 村 強* 木 山 英 郎**

Study on Element Constants of Distinct Element Method

by

Hisashi FUJIMURA*, Tsuyoshi NISHIMURA* and Hideo KIYAMA**

The distinct element method (DEM) have the potential applicability for analysis of fissured rock structures and granular materials. Before its practical application, a suitable procedure for determining element constants should be developed.

Simple evaluations of element constants K and η by elastic contact theory and inelastic attenuation of rebounding, respectively, are proposed, and the results of laboratory tests, such as a free-fall rebounding test and Schmidt hammer test are described in detail.

Finally a slope stability of blocks are submitted to the DEM analysis and the relationships among the element constants K , η , ϕ_μ , the angle of inclination and the block dimensions are discussed.

Key words : DEM, Element constants, Cylinder element, Block element, Fissured rock

1 緒 言

離散剛要素法（以下、DEM と略記する）はき裂性岩盤の解析法として、Cundall (1971)¹⁾ によって提案された。DEM は、不連続な要素の集合体に対し、個々の要素が運動方程式を満足し、要素間の力の伝達が作用・反作用の法則に従うことを条件として、集合体の動力学的挙動を数値解析するものである。DEM がき裂性岩盤のみならず土構造物や一般粒状体の実用的な数値解析法となるために、最も重要な課題は必要な要素定数をいかに合理的に決定するかである。要素定数の算出方法に関する試みは数少なく、詳細な検討がなされていない。

DEM 解析においては、要素と要素の接触時の接触力～変位関係を表すのにフォークトモデルが仮定される。したがって、材料の力学特性を反映する要素材料として法線方向のばね定数 K_n と粘性定数 η_n 、同様に接線方向の定数 K_s と η_s 、および粒子間（要素間）摩擦角 ϕ_μ を決める必要がある。

これら要素定数の決定法として、本報告で採り挙げるものをまとめると Table I のようになる。まず Hertz の弾性接触論を用いた理論的方法によって、要素定数 E , ν から要素定数 K を算定し、減衰振動によって η を決定する方法をまとめる。ついで、粒子径が十分大きく、個々の粒子を供試体として実験できる場合の自由落下反発試験による方法、および原位置ブロックに対してシュミットハンマーを用いる方法を検討する。これら 2 つの方法は主として η の決定に役立つものと考えている。

一方、砂のような粒状体の場合には、単純な集合体特性（例えば、 c , ϕ など）から要素特性としての定数 K , η をせん断試験モデルの解析によって検討し報告した。⁵⁾

ついで、き裂性岩盤のような多角形積層体の場合には、基本的な矩形ブロックの限界平衡状態から要素定数を推定するのが有効と考え、この点を、斜面安定の DEM 解析によって検討する。これら 2 つの方法は現

Table I. Determination procedures of material constants of DEM.

Theoretical	Elastic contact theory	Cylinder element	$E, \nu \rightarrow K$
		Block element	$E, \nu \rightarrow K$
Block	Damping vibration		$\rightarrow \eta, \delta t$
			$e \rightarrow \eta$
	Schmidt test (In-situ block)		$R_t \rightarrow e (\rightarrow \eta)$
Granular material	Simple shear test model		$c, \phi \rightarrow K, \eta, \phi_\mu$
Fissured rock structure	Slope stability model		$b/h, \alpha \leftrightarrow K, \eta, \phi_\mu$

† 原稿受理 平成 2 年 1 月 5 日 Received Jan. 5, 1990

* 鳥取大学工学部 鳥取市湖山町南, Faculty of Engineering, Tottori University, Koyama-cho, Tottori

** 正 会 員 鳥取大学工学部 鳥取市湖山町南, Faculty of Engineering, Tottori University, Koyama-cho, Tottori

在のところで、直接的な K , η の決定法としてよりは、むしろ仮定した K , η および、 Δt の妥当性の評価に用いられるものと考えている。

なお、これまでの DEM 解析の経験からすれば、静的な平衡状態における接触力や変位状態を支配する因子は K であり、斜面安定やせん断強度のような極限平衡状態を支配する因子も主に K で、ときに ϕ_u が関与し、他方、砂の流動や振動など動的な現象を支配する因子は η であると推論される。この実用上有効な知見を検証することも本研究の目的の一つである。

2 考え方の基礎

K , η および Δt の決定に際し、筆者らは弾性スプリング K を本来弾性的性質を有する粒状体の変形係数に相当するものと解釈し、その算定法として対象とする粒子の弾性接触における荷重-変位曲線の勾配を用いることを提案した。円形要素の場合には Fig. 1 に示すような弾性円柱の接触の理論解が利用できる。それらを要約して示すと以下ようになる。

Fig. 1. Elastic contact of two cylinders.

Fig. 2. Elastic contact of two blocks.

ヤング率 E , ポアソン比 ν の等しい 2 つの円柱 (半径 r_1 , r_2) が上下から単位厚さ当り荷重 q で圧縮された場合の両中心の接近量 δ と接触幅 b を用いて、法線方向の剛性定数 K_n は次式ようになる (ただし、 $r_1 = r_2 = r$ とする)。

$$K_n = \frac{q}{\delta} = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)(1.5+2\ln(4r/b))} \quad (1)$$

一方、矩形要素の場合には、最も普通に見られる例として Fig. 2 に示すように 2 つの矩形要素 ($l \times l$)

の重なりが荷重 q で圧縮されたとき、 $q/\delta = E/2$ であるから各接点では

$$K = \frac{E}{4} \quad (2)$$

とすれば良い。

つぎに、粘性定数 η_n については、 K , η を有する質量 m の一自由度の振動方程式において最も減衰が速い条件式に適用して次式のように定まる。¹⁾

$$\eta_n = 2\sqrt{mK_n} \quad (3)$$

上式の η_n は無振動状態 $\eta_0 = \eta$ を与える。

時間増分 Δt は次式のように定めるのが便利である。

$$\Delta t < \frac{\eta_n}{K_n} \quad (4)$$

このようにして求まった K , η , Δt を本論文では理論的推奨値と呼ぶことにする。

3 自由落下反発試験

3・1 1 球の自由落下反発運動の DEM 解析

差分法を適用する場合、解の収束性、安定性を明確にしておくことは解析上極めて重要である。ここでは、基本となる 1 球の自由落下反発運動解析における K , η および Δt について検討する。

解析における標準的な要素モデルとしては、要素半径 $R = 1.0 \text{ cm}$ と仮定し、密度 $\rho = 2.65 \text{ g/cm}^3$, $\nu = 0.3$ および線荷重 $q = 30 \text{ gf/cm}$ を採用し、これらの数値を式 (1), (3), (4) に用いて、種々のヤング率 E に対する法線方向の材料定数 K_n , η_n および Δt の理論的な推奨値を Table II に示す。

ここでは、この推奨値が実際 DEM 解析でうまく適合するかどうかを最も簡単なモデルで検討する。すなわち、1 つの要素がある高さ H から、床面に向かって自由落下させ、静止状態に至るまでの挙動を取り上げる。

まず、Fig. 3 は要素の剛性定数 K_n を仮定し、粘性定数 η を推奨値 $\eta_n = \eta_0 = 2\sqrt{mK_n}$ を基本に種々変化した場合について、DEM 解析によって得られた要素の挙動を示している。ここに、縦軸には要素の中心をゼロとして鉛直変位 u を、横軸には、繰返し回数 T である。 $\eta = \eta_0$ の時最も収束が速く、 $\eta < \eta_0$ にとることによって収束までの振幅が大きくなること、および収束までの繰返し回数も多少変化することがわかる。

Table II. Theoretically recommended values of K_n , η_n and Δt dependent on E .

E (kgf/cm ²)	7.5×10^3	1×10^4	1×10^4	1×10^4	1×10^4
(kPa)	(7.35×10^4)	(9.80×10^4)	(9.80×10^4)	(9.80×10^4)	(9.80×10^4)
$K_n/\rho g$ (cm)	3.64×10^4	4.75×10^4	4.06×10^5	3.55×10^5	3.16×10^5
$\eta_n/\rho g$ (cm · s)	2.16×10	2.47×10	7.22×10	2.13×10^2	6.36×10^2
Δt (s) <	5.94×10^{-4}	5.20×10^{-4}	1.78×10^{-4}	6.01×10^{-5}	2.02×10^{-5}

* Two discs contact.

Disc-rigid wall contact ($2K_n, \sqrt{2}\eta_n, 1/\sqrt{2}\Delta t$).

Fig. 3. Damping effect of η of DEM.

つぎに、粒子の運動状態を考慮する必要がある場合には、振動過程も検討しておく必要がある。幸い、一自由度の運動は理論解を用いて刻々の要素変位を計算できるので、設定した K , η について上述の DEM 解析結果の近似度が考察できる。例えば、Fig. 4 は DEM 解析と理論解それぞれによって求めた要素の挙動の比較の一例を示している。両曲線から、鉛直変位にわずかの差異がみられるものの、全体的に良い対応を示し、収束性もほぼ一致している。

以上のことより、DEM 解析は与えられた K 値に対し、式 (3), (4) より計算される η_n , Δt を用いて十

Fig. 4. Comparison between a result of DEM and the theoretical value.

Fig. 5. An equipment for a free-fall rebounding test of rock pieces.

分な収束性、安定性を得られること、および理論解との対応も良好なことが確認される。

3・2 自由落下反発試験

上述の結果から、静止状態を求めるための粒子の要素定数 K , η は粒子の径が十分大きければ、一軸圧縮試験によって計測したヤング率、ポアソン比と弾性接触理論から、まず K 値を求め、ついで収束性を考慮して η を決定できる。しかし、はたしてこの方法で実際の粒子の運動をうまくシミュレートできるかは別途検証する必要がある。この点の検証を兼ねた要素定数の実用的な試験法として、自由落下反発試験を考えた。

(1) 試験装置と試料

実験には Fig. 5 に示すような自由落下試験装置を用いている。試料が衝突する床材は、S45C の構造用硬鋼を用いているので、試料の硬度と等しいか、それ以上の硬度を有する（岩石-床接触において、床材は解析上剛体として取り扱うので、試料に比してヤング率が十分大きいことはもちろん、衝突による塑性変形の生じないだけの硬度を要する）。

実験に用いた試料は、Table III に示すような鳥取県産の花崗岩であり、供試体を $\phi_d=5$ cm と 3.5 cm、厚さ 0.6 cm の円盤状に整形している。表中には、岩石試料の実測ヤング率 E により、式 (1) を用いて得ら

Table III. The properties of a test piece of rock, and theoretically recommended values of K_n , η_n and Δt dependent on observed E .

				Granite
Density ρ		(gf/cm ³)		2.09
Young's modulus E		(kgf/cm ²)		6.6×10^4
Poisson's ratio ν				0.24
Compression strength σ_c		(kgf/cm ²)		2.45×10^3
Values* of K_n , η_n and Δt dependent on E	$R=1.0$ (cm)	$K_n/\rho g$ (cm)		2.59×10^7
		$\eta_n/\rho g$ (cm · s)		5.77×10^3
		Δt (s) <		2.22×10^{-5}
	$R=2.5$ (cm)	$K_n/\rho g$ (cm)		2.72×10^7
		$\eta_n/\rho g$ (cm · s)		1.48×10^3
		Δt (s) <		5.43×10^{-5}

* Two discs contact.

Disc-rigid wall contact ($2K_n/\sqrt{2}\eta_n, 1/\sqrt{2}\Delta t$).

Fig. 6. Free-fall and rebounding motions of a rock.

れた K_n ならびに式 (3), (4) より計算される η_n , および Δt の推奨値も併記した.

(2) 結果と考察

自由落下反発試験における岩石の挙動を開放写真と高速カメラで撮影した結果を Fig. 6 に示す.

これらの図から, 初期高さ H_0 と反発に続く跳ね返り最高点の高さ H_1 を読み取り, この値を用いて反発係数 $e = \sqrt{H_1/H_0}$ を求めた. このようにして得られた反発係数 e の結果を Fig. 7 に示す. 反発係数 e は 0.9 付近に分布しているが, 初期高さや直径が大きくなるとわずかに小さくなる. これは, 衝撃力の増加とともに

に, 接触部の塑性変形や破壊など非弾性反発の要素が増大することによる.

このように実際の岩質材料では, とくに大きな接触圧を生じる場合には, 要素定数 K をヤング率 E のみの関数とした式 (1) (もちろん, 式 (1) では接触圧 q の効果は接触幅 b の中に弾性成分としては見込まれている) が不完全であることを示す.

3・3 反発係数と K , η

実験で得られた $e=0.9$ 前後の反発係数を考慮して, 要素定数 K , η ならびに Δt の運動状態の解析への適合性を検討する.

1 球の自由落下反発運動の解析例として, Table II に示した花崗岩試料の実測ヤング率 E により算定した $R=1.0$ cm の場合における推奨値 $K_n/\rho g=5.19 \times 10^7$ cm と $\eta_n/\rho g=81.6$ cm $\cdot$ s ($=\eta_n/\rho g$), $\Delta t=1.0^{-6}$ sec (推奨値 $\Delta t < 2.22 \times 10^{-5}$ sec であるが 10^{-5} sec では収束性が悪い) を設定した. この要素を高さ $H_0=9.8 \times 10^{-6}$ cm から床面に向かって自由落下させたときの挙動を横軸に繰返し回数 T にとって Fig. 8 に示す. ここでは $e=0.9$ を考慮して要素の粘性定数 η_n として推奨値 η_n を基準にそれよりも小さい $\eta_n \times 1/10$ と $\eta_n \times 1/100$ の場合について解析した. つぎに, 同じく $R=1.0$ cm の場合についてヤング率 E を 750 kgf/cm² と極端に小さく仮定した場合, 推奨値 $K_n/\rho g=7.28 \times 10^4$ cm, $\eta_n/\rho g=3.06$ cm $\cdot$ s ($=\eta_n/\rho g$), $\Delta t=10^{-4}$ sec となり, このときの解析結果を Fig. 9 に示す.

この結果, E (したがって K) の設定値のいかんにかかわらず, いずれも η_n を小さく ($\eta_n < \eta_0$) 取るこ

Fig. 7. Restitution coefficients (e) due to the number of free-fall test (N) (Granite).

Fig. 8. Results of DEM analysis on rebounding motion (or damping vibration) of a free-fall rock for the observed of E .

とによって、要素は大きい振動を示し、 $\eta_n \geq \eta_o/100$ で e は 1.0 に近づくことがわかる。ただし、 E が大きい場合と小さい場合では Δt が 10^{-6} sec と 10^{-4} sec のように大差があるので、実用上許される限り E (したがって K) を小さく設定するのが良い。

4 シュミットハンマーの応用

原位置ブロックの物性と DEM の要素定数を検討するためにコンクリートの圧縮強度の測定や岩盤の固密性の判定に利用されるシュミットハンマーを採り上げた。実験は、前節の自由落下反発試験において床板材と落下試料の組み合わせを種々にかえて反発係数 e を求める。一方、床板材のシュミットハンマー反発度 R_t を計測した。ここに床板材として、強度の異なる花崗岩、軟鋼およびモルタルの 3 種類を、落下試料は花崗岩、石英閃緑岩、凝灰岩、玢岩、閃緑岩、頁岩の 6 種類を採用した。結果の一例として、上記の e を床板材の R_t に対してプロットすると Fig. 10 に示すようになる。落下試料は、図中に示すように岩種により R_t の値が多少異なるものの、総じて健全な岩といえる。落下試料ならびに床板材両者の R_t の値が大きくかつ等しい場合には反発係数 $e \approx 0.94$ と大きい軟鋼やモルタルのように床板材の R_t が落下試料のものより小さくなる場合には、反発係数 e が $0.92 \sim 0.8$

Fig. 9. Results of DEM analysis on rebounding motion of a free-fall rock for an extremely small value of E .

Fig. 10. Relationships between restitution (e) and Schmidt (NR) hardness (R_t) of various rocks.

に減少する。

以上の結果より、岩塊の R_t を計測し、例えば Fig. 10 に用いて反発係数 e を求め、この e 値を考慮して 3・3 節と同様に要素定数 K , η を推定することができる。この場合、 η の決定が主となるので、 K については直接 R_t - K 関係から概略値を求める方法を検討中である。

5 斜面安定モデル (矩形ブロック)

多角形要素間の接触では、頂点-頂点、頂点-辺およ

Fig. 11. A block model on an inclined plane.

Table IV. Data of the analytical model of slope.

$K_n/\rho g$	(cm)	3.85×10^4
$\eta_n/\rho g$	(cm · s)	1.20×10
Δt	(s)	1.0×10^{-5}
$\tan \phi_\mu$		0.48

び辺-辺接触を生じ、いずれの場合も円形要素に比べて、接触力、接触判定が極めて複雑になり、要素定数も K , η 以外に ϕ_μ および $s (=K_s/K_n)$ の影響が大きくなると予想される。

そこで、Fig. 11 に示すように斜面上に置かれた単純な矩形ブロックの挙動を DEM 解析によって追跡し、多角形要素に用いるこれら要素定数とのかかり合いについて検討した。モデルは斜面の傾斜角 α およびブロックの細長比 b/h をパラメータとした。

ここで用いた要素定数 $K_n/\rho g$, $\eta_n/\rho g$ および Δt , ϕ_μ を Table IV に示す。これらの値は、斜面に対し幅 1 cm、高さ 2 cm、 $b/h=1/2$ のブロックを仮定し、先に実施された斜面の模型実験のブロックの物性を参考にし、木質材料の $\rho=0.4 \text{ g/cm}^3$, $\nu=0.3$, $q=30 \text{ gf/cm}$ および $E=100 \text{ kgf/cm}^2$ を仮定し、これらの数値を式 (1), (3), (4) に用いて要素定数を決定した。木質材料のヤング率 E は通常 $8.5 \times 10^4 \text{ kgf/cm}^2$ 程度であり、この値を式 (2) に用いて $K=2.1 \times 10^4 \text{ kgf/cm}^2$ となるが、最終の解析目標が、500 個以上の要素の集合体であること、ならびに実用的なステップ数を考慮して、 $E=100 \text{ kgf/cm}^2$ といった小さい値を採用している。

解析は、まずブロックの斜面下側に壁を仮定して静止状態を求める。その後、壁を取り去りブロックの挙動を追跡する。本解析においては、すべりとは接触点において $T/N > \tan \phi_\mu$ の条件が満たされること、また転落 (Toppling) とは A 点の周りに回転し、B 点が斜面から離れることとする。領域の境界付近では、すべりが先行し、続いて転落が生じる場合あるいは、その逆の場合が考えられるが、これらはすべりと転落が同時に生じていると判定する。傾斜角 α は、各要素の重力の作用方向を反時計方向に回転することにより表現する。

Fig. 12 は解析結果の一例を示したものである。こ

(a) $K_n=K_s$, $\eta_n=\eta_s$. (b) $0.5K_n=K_s$, $\eta_n=\eta_s$.

Fig. 12. A stability chart by DEM.

の図ではブロックの面積 S を 2 cm^2 に、 $\tan \phi_\mu=0.48$ に固定している。図中の実線は、Sagaseta⁷⁾の理論解を描いたものであるが、本解析結果とはほぼ一致している。Fig. 12(a)では、 $K_n=K_s$, $\eta_n=\eta_s$ として解析を進めたが、Fig. 12(b)では、 $0.5K_n=K_s$, $\eta_n=\eta_s$ として解析を進めた場合を示している。同じく実線は Sagaseta の解を示しているが、Fig. 12(a)と異なり、両者が食い違う部分がみられる。これは、斜面法線方向と接線方向の反力の大小がブロックの初期運動算定において、係数が異なるためであり、 K_s と K_n の比 s の設定には注意を要することを示している。

つぎに、単一ブロック内に複数の不連続面を考慮し

Fig. 13. The comparison of DEM results with the results of the simple limit equilibrium method (solid line).

たモデルの解析を行う。そして、この不連続面がブロック挙動にどのように影響を与えるかを限界平衡法と比較して検討する。

Fig. 13は、限界平衡法とDEM解析結果を比較したものである。摩擦角 $\phi_\mu=25.6^\circ$ として限界平衡法を用いた結果が図中の実線であり、プロット点はDEM解析結果である。●は静止したことを、■はすべりを生じたことを、また、▲は転倒したことを示している。○、□、△は数個のブロックを重ねたものを同一サイズの単一ブロックとして解析したものである。

限界平衡法においては、 $n \geq 3$ のときの $\alpha > \text{Arctan}(1/n)$ となることから、岩柱は一体となって転倒することになる。一方、DEM解析結果をみると、限界平衡法に比べ、転倒がわずかに、小さい角度で生じる傾向が認められるが、両者はかなりよく一致する。両解析とも、すべりと安定領域の境界が $\alpha = \phi_\mu$ の値に依存することがわかる。したがって、要素定数 ϕ_μ の設定に際してはこの点に充分注意する必要がある。

6 結 語

Cundallの提案した離散剛要素法(DEM)の実用解析法としての確立のための基礎的検討を行っており、要素定数の決定に際し、以下のようにまとめられる。

(1) 弾性スプリングの剛性定数 K の決定に関する考え方の基礎として、弾性接触理論を用いることを提案した。これによれば、材料の圧縮試験のヤング率 E や原位置変形試験の弾性係数や変形係数から K を決定できる。

(2) ブロック状の円形要素を用いたDEM解析結果から、与えられた要素定数 K 値に対し、式(3)、(4)より計算される要素定数 η および時間増分 Δt を用いて十分な収束性、安定性を得られること、および理論解との対応も良好であった。

(3) 岩石試料における落下反発係数 e の実測値を媒介として要素定数 η を決定し、実測ヤング率と極端に小さいヤング率より算定した要素定数 K で解析

を行い、いずれも実測値への良好な適合性が認められた。

(4) 原位置ブロックに対しては、シュミットハンマーを応用することによって、反発度 R_t とヤング率 E や反発係数 e との関連性を知れば、(3)と同様に要素定数 K 、 η が推定される。

(5) 矩形ブロックの積層体の安定性や破壊挙動のDEM解析に際し、斜面の傾斜角 α 、ブロックの細長比 b/h で要素定数決定のためのモデル化を行う場合、要素の定数 K 、 η 等の設定は比較的自由であり、摩擦角 ϕ_μ および K_s/K_n の評価を優先すべきである。

最後に、DEMを用いて静的な問題を解析する場合には、 $\eta \approx \eta_0/10 \sim \eta_0/100$ と $E/100$ に対応する K を探るのが目安であり、これらの値は、衝撃・反発等の少ない砂の重力流動のような動的な問題にも適用可能であることが、降下床の開口流動解析で実証済みである。

なお、本解析は、計算に京都大学大型計算機センター、また、入出力処理に鳥取大学情報処理センターを利用した。

(昭和61年11月 土木学会第41回年次学術講演会にて講演)

参 考 文 献

- 1) P. A. Cundall, Symp. ISRM, 2, 129 (1971).
- 2) 木山英郎, 藤村 尚, 土木学会論文報告集, 333, 137 (1983).
- 3) 大町達夫, 荒井清博, 構造工学論文集, 32, 715 (1986).
- 4) 石田 毅, 日比野敏, 北原義浩, 伊藤 洋, 電力中央研究所・研究報告, 383014, 1 (1983).
- 5) 木山英郎, 藤村 尚, 西村 強, 土木学会論文集, 382, 167 (1987).
- 6) 清水泰弘, Omer Aydan, 市川康明, 川本眺万, 土木学会論文集, 400, 189 (1988).
- 7) C. Sagaseta, Rock Mech. & Rock Eng., 19, 261 (1986).
- 8) E. フック, J. W. ブレイ (小野寺透, 吉中龍之進共訳), “岩盤斜面工学”, p. 187 (1977) 朝倉書店