計算機実験によるセラミックスの強度分布と寸法効果

(続報: 強度に下限値が存在する場合)[†]

谷 口 佳 文* 北 住 順 一* 山 田 敏 郎**

Study on Strength Distribution and Size Effect of Ceramics by Computer-Simulated Experiments (Continued Report : In the Case that the Lower Limit Exists in Strength)

by

Yoshifumi TANIGUCHI*, Junichi KITAZUMI* and Toshiro YAMADA**

Following the previous report, the strength distribution of ceramics was simulated by the Monte-Carlo method for the case in which the lower limit existed in the strength of ceramics. In this study, the tensile strength, 3-point and 4-point bending strengths of specimens of four different sizes were calculated, by using the model specimens with a number of penny-shaped inner cracks. In order to investigate the change of strength distribution of ceramics due to the size effect, the strength obtained was plotted on the Weibull probability paper. It was found that the shape of strength distribution was convex for the specimens of large effective volume, while it was concave for those of small effective volume. The strength distribution function for this model was also expressed and compared with the simulation results. As a result, both distributions showed good agreement in the range of fracture probability greater than a few percents.

Furthermore, the relation between the mean strength and the effective volume was discussed. As the strength of the specimens varied between the lower and upper limits, its relation was represented by an inverse S-shape curve on the logarithmic graph paper.

Key words : Ceramics, Strength, Monte-Carlo simulation, Inner crack, Size effect

1 緒 言

構造用セラミックスは金属材料に比べ極めてもろく、強度のばらつきが大きいという欠点を有している。そのため、構造用部材として実用化するためには、破壊強度の確率統計的解析が不可欠である。従来、セラミックスの強度のばらつきは、主として2母数ワイブル統計解析による評価がなされてきた。しかし、2母数ワイブル統計は、その形状母数(ワイブル係数)が試験片寸法や負荷方法に依存しない材料定数であることを前提としているが、実験データではその前提が成り立たない結果がいくつか示されている^{1)~3)}。著者らは、前報で強度の下限値が0である場合を対象として計算機によるセラミックスの破壊シミュレーションを行い、ワイブル係数が一定とならない理由について検討し、さらに、2母数ワイブル統計では強度の寸法効果を十分に説明できないことを示した。また、2母数ワイブル統計では極低確率域での許容応力の設定が困難であ

り、設計における強度の評価に不都合が生じるという問題点がある。一方、近年のセラミックスの製造技術の向上によって、強度分布には、最低強度が存在する傾向を示すデータが多くみられるようになり、3母数⁵⁾ワイブル統計による信頼性設計も検討されつつある。

以上のような観点から、セラミックスの強度に下限値が存在する場合、その強度分布が、試験片寸法あるいは負荷方法によってどのように変化するか系統的に調べ把握しておく必要があると思われる。そこで、本研究では、前報に引き続き試験片の強度に下限値が存在する場合についてセラミックスの破壊シミュレーションを行い、各種寸法の試験片の3点曲げ、4点曲げ、引張強度の分布を求め、比較検討を行った。また、本計算モデルに対する強度分布式を導出し、シミュレーション結果との対比を行った。さらに、破壊源となった欠陥寸法の分布、寸法効果による平均強度の変化についても検討を加えた。

[†] 前報は材料, 38巻435号1428頁(1989年)に掲載済である。

原稿受理 平成2年6月7日 Received June 7, 1990

* 正 会 員 新居浜工業高等専門学校 新居浜市八雲町, Niihama National College of Technology, Yagumo-cho, Niihama

** 正 会 員 京都大学名誉教授 京都市左京区吉田本町, Emeritus Professor, Kyoto University, Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto

2 計算モデル

2.1 試験片のモデル

試験片の形状は長方形断面を有する角棒で、引張り方向はその長手方向である。ここでは、引張り方向に垂直な面内の円板状の内部欠陥を考え、その試験片内の位置の分布は一様分布とした。前報では、下限の強度が0である場合について検討するため、欠陥寸法(直径 d)の分布 $F_0(d)$ として次式を用いた。

$$F_0(d) = Pr[\text{欠陥寸法} < d] \\ = 1 - (d_0/d)^k \quad (1)$$

ここで、 d_0 は長さの次元を持つパラメータである。式(1)を用いた場合、 d の範囲は $d_0 \leq d$ であり、破壊源となり得る欠陥寸法は d_0 から無限大となる。しかし、試験片の強度が欠陥寸法によって規定されるとすると、試験片の強度に下限値が存在するためには欠陥寸法の最大値は有限の値となることが必要である。そこで、本報では式(1)を拡張して、欠陥寸法分布 $F_0(d)$ を次式のように与えた。

$$F_0(d) = Pr[\text{欠陥寸法} < d] \\ = 1 - [\sqrt{d_0}(1/\sqrt{d} - 1/\sqrt{d_m})]^k \quad (2)$$

式(2)の分布を仮定すると、 d の範囲は $1/(d_0^{-1/2} + d_m^{-1/2}) \leq d \leq d_m$ となり、破壊源となり得る欠陥寸法の最大値は d_m となる。本計算では、 $d_0 = 8 \mu\text{m}$ 、 $d_m = 200 \mu\text{m}$ 、 $k = 4$ とし、逆関数法により式(2)の分布に従う欠陥を発生させた。なお、後述するように、欠陥の強度が $K = K_{ic}$ (K : 応力拡大係数, K_{ic} : 破壊じん性値)なる破壊のクライテリアに従う場合には、式(2)の欠陥寸法の分布を用いると試験片の強度分布は3母数ワイブル分布となる。

また、試験片内部に発生させた欠陥総数 N は、欠陥密度 μ (単位体積当りの欠陥の個数)と試験片の体積 V より次式で与えられる。

$$N = \mu V \quad (3)$$

2.2 試験片の強度

前節のようにして作成した個々の試験片モデルについて、引張り、3点曲げ、4点曲げ強度を以下のようにして求めた。なお、強度の計算に際して、欠陥相互の干渉はないものとし、また、圧縮応力では破壊は生じないものと仮定した。

(1) 引張強度

試験片の内部に発生させたすべての欠陥について次式により欠陥の強度 σ を求め、その中の最小値を試験片の引張強度 σ_f とした。

$$\sigma = K_{ic}' / \sqrt{a_{eq} + a_{eq0}} \quad (4)$$

ただし、 K_{ic}' は破壊じん性値に関係した定数、 a_{eq0} は欠陥寸法の補正項で、以下の計算では常圧焼結窒化ケイ素に対して得られた値、 $K_{ic}' = 3210 \text{ MPa}\sqrt{\mu\text{m}}$ 、 $a_{eq0} = 10 \mu\text{m}$ を用いた。また、 a_{eq} は次式により与え

られる等価欠陥寸法である。

$$a_{eq} = a(2M_T/\pi)^2 \quad (5)$$

ここで、

$$M_T = 1.283(a/h)^4 - 1.400(a/h)^3 + 0.541(a/h)^2 \\ - 0.066(a/h) + 1.001$$

a : 欠陥の半径

h : 試験片表面から欠陥中心までの距離

である。式(5)の M_T はShah, Kobayashiによる有限体の場合の応力拡大係数の補正係数で、ここでは、上に示した4次の近似式を用いて等価欠陥寸法を算出した。この近似式では、 M_T の値の最小値は $M_T = 1.001$ (欠陥が表面から比較的離れている場合)、最大値は $M_T = 1.359$ (欠陥が表面のごく近傍にある場合)となり、同じ欠陥寸法でもその位置によって等価欠陥寸法は異なってくる。先に設定した欠陥寸法の最大値 $200 \mu\text{m}$ を用いて本計算モデルにおける試験片の強度の最小値 σ_{u0} を式(4)、(5)より算出すると、 $\sigma_{u0} = 349 \text{ MPa}$ となる。

(2) 曲げ強度

引張試験に用いた試験片と同一の試験片にFig. 1に示すような曲げ荷重を与え、3点曲げおよび4点曲げ強度を求めた。図の×印は欠陥の中心位置を表している。4点曲げの内外支点間の距離の比は、ここでは $1:3$ ($L_1 = L_2$)として計算を行った。個々の欠陥について、引張強度を求めた場合と同様にして破壊応力 σ を算出した後、その値と欠陥位置より試験片内に生ずる最大応力を次式により求め、その中の最小値を曲げ強度 σ_f とした。

・3点曲げの場合

$$\sigma_f = \sigma L H / [2\ell \{H - 2(h - a)\}] \\ (0 < \ell < L/2, 0 < h < H/2)$$

・4点曲げの場合

$$\sigma_f = \sigma L_1 H / [\ell \{H - 2(h - a)\}] \\ (0 < \ell < L_1, 0 < h < H/2) \\ \sigma_f = \sigma H / [H - 2(h - a)]$$

Fig. 1. A beam subjected to 3- or 4-point bending load.

$$(L_1 < \ell < L/2, 0 < h < H/2) \quad (6)$$

ℓ の範囲は $0 < \ell < L/2$ で、支点から欠陥位置までの x 方向の距離を表している。試験片の曲げ強度は、最大欠陥が試験片底面のごく近傍にあり、かつ荷重点下（3点曲げの場合）あるいは荷重点間（4点曲げの場合）に存在する時に最小となり、その値は引張りの場合の最小値 σ_{u0} と等しくなる。また、欠陥寸法が非常に小さくなったときの欠陥の強度は、式 (4) より $K_{Ic}'/\sqrt{a_{eq0}}$ ($=1015$ MPa) となる。したがって、この値が試験片の上限の強度となり、試験片の強度は 349 MPa~1015 MPa の間の値をとることになる。

3 強度分布関数の定式化

試験片の強度に上限値と下限値が存在する場合の強度分布関数が Phani¹¹⁾ によって提案されているが、ここでは、2章に示した計算モデルに対する強度分布関数の導出を試みた。

3・1 引張強度の分布

取扱を容易にするため、欠陥位置による応力拡大係数の変動はないものと仮定し $M_T=1$ とおく。その時、等価欠陥寸法は

$$a_{eq} = a(2/\pi)^2 \quad (7)$$

となり、その分布 $F_1(a_{eq})$ は式 (2) より

$$F_1(a_{eq}) = Pr[\text{等価欠陥寸法} < a_{eq}] \\ = 1 - [\sqrt{a_0}(1/\sqrt{a_{eq}} - 1/\sqrt{a_m})]^k \quad (8)$$

となる。ここで、 $a_0 = (d_0/2)(2/\pi)^2$ 、 $a_m = (d_m/2)(2/\pi)^2$ である。各欠陥の破壊応力が式 (4) で表される時、個々の欠陥の強度分布 $F(\sigma)$ は次式となる。

$$F(\sigma) = Pr[\text{欠陥強度} < \sigma] \\ = [(1/\sigma_0)\{\sigma/\sqrt{1-(\sigma/\sigma_{eq0})^2} - \sigma_m\}]^k \quad (9)$$

ここで、 $\sigma_0 = K_{Ic}'/\sqrt{a_0}$ 、 $\sigma_{eq0} = K_{Ic}'/\sqrt{a_{eq0}}$ 、 $\sigma_m = K_{Ic}'/\sqrt{a_m}$ である。内部に $N(=\mu V)$ 個の欠陥を含む試験片が、 σ_f 以下の応力で破壊する確率を $P(\sigma_f)$ とすると

$$P(\sigma_f) = 1 - [1 - F(\sigma_f)]^N \\ \doteq 1 - \exp[-\mu VF(\sigma_f)] \quad (10)$$

であるから、一様引張りに対する強度分布 $P(\sigma_f)$ は次式となる。

$$P(\sigma_f) = 1 - \exp\left[-\mu V \left\{ \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{\sigma_f}{\sqrt{1-(\sigma_f/\sigma_{eq0})^2}} - \sigma_m \right) \right\}^k \right] \quad (11)$$

上式は $M_T=1$ として導出しているの、上式による最低強度を σ_{u0}' とすると $\sigma_{u0}'=452$ MPa となる。また、欠陥寸法を補正しない場合 ($a_{eq0}=0$) には $\sigma_{eq0} \rightarrow \infty$ となり、式 (11) は次の 3 母数ワイブル分布となる。

$$P(\sigma_f) = 1 - \exp[-\mu V (1/\sigma_0)(\sigma_f - \sigma_m)^k] \quad (12)$$

すなわち、2・1 節で述べたように欠陥の強度が $\sigma = K_{Ic}'/\sqrt{a_{eq}}$ で表される場合には、式 (2) で仮定した欠陥寸法分布を用いると試験片の強度分布は 3 母数ワ

イブル分布となることがわかる。

3・2 曲げ強度の分布

Finnie¹²⁾ らによって提案された応力および破壊位置に関する確率論に基づき、前報と同様な操作を行うと、曲げ試験のように応力勾配がある場合の強度分布として次式が得られる。

$$P(\sigma_f) = 1 - \exp\left[-\mu \left(\frac{1}{\sigma_0}\right)^k \times \int_{\xi} \left\{ \frac{\sigma_f g(\xi)}{\sqrt{1-(\sigma_f g(\xi)/\sigma_{eq0})^2}} - \sigma_m \right\}^k d\xi \right] \quad (13)$$

ここで、 ξ は試験片内の位置を表す変数、 $g(\xi)$ は ξ の位置の応力と試験片内の最大応力との比である。式 (13) の積分の範囲は、試験片内の応力が σ_{u0}' より大きくなる領域である。式 (13) において $a_{eq0}=0$ ($\sigma_{eq0} \rightarrow \infty$) とおくと

$$P(\sigma_f) = 1 - \exp\left[-\mu (1/\sigma_0)^k \int_{\xi} \left\{ \sigma_f g(\xi) - \sigma_m \right\}^k d\xi \right] \quad (14)$$

となり、応力勾配がある場合に対する 3 母数ワイブル分布となる。

4 計算結果および考察

4・1 引張りおよび曲げ強度の分布

欠陥密度を $\mu=10$ 個/mm³ として、断面 3×4 mm、長さ 30 mm の試験片寸法を基に、一辺の長さを 2, 3, 4 倍と変化させた試験片の引張強度分布を Fig. 2 に示す。試験片本数は 500 本とし、平均ランク法によりプロットした。図より、試験片寸法が大きくなるにつれ、寸法効果によって強度は小さくなっていることがわかる。また、強度分布は上に凸の曲線となり、下限の強度に漸近する傾向を示している。

Fig. 3 は、高さ 3 mm、幅 4 mm、スパン 30 mm、欠陥密度 $\mu=10$ 個/mm³ として計算した 3 点曲げおよび 4 点曲げ強度の分布を示したものである。試験片本数は 500 本で、図には同一寸法試験片の引張強度の計

Fig. 2. Weibull plots of tensile strength.

Fig. 3. Weibull plots of tensile and bending strength. (Specimen size is $3 \times 4 \times 30$ mm.)

算結果も示してある。図中の破線は、2・2節で述べた試験片の強度の上限値を表している。Fig. 3においても、寸法効果によって、3点曲げ、4点曲げ、引張りの順に強度は小さくなっていることがわかる。また、3点曲げの強度分布は、引張りの場合とは逆に破壊確率が数%以上の領域で下に凸の曲線となっている。この理由は、試験片の強度が高確率域で上限値に漸近してゆくためである。そして、3点曲げと引張りの間にある4点曲げ強度の分布は、ほぼ直線的な分布を示している。このような傾向は、松井¹³⁾による常圧焼結窒化ケイ素を用いた試験結果にも見られる。その結果では、引張試験による強度分布は上に凸の曲線となり下限の強度に漸近する傾向を示しているが、4点曲げ試験では、強度分布はほぼ直線的な分布となっている。

Fig. 2, 3の実線は、先に導出した式(11)および式(13)により引いた強度分布曲線である。破壊確率が数%

Fig. 4. Schematic diagram showing the change of strength distribution due to the size effect.

以上の範囲では、シミュレーション結果とよい一致を示しているが、低確率域では、分布曲線はシミュレーション結果より大きな値となっている。これは、式(11)と式(13)の導出の際に応力拡大係数の補正係数 M_T を1とおいたためである。 M_T は、欠陥の位置によって1.001~1.359の値を採ることを先に述べた。Fig. 3中の一点鎖線は $M_T=1.359$ として、3章に示した手順と同様にして求めた分布曲線である。この図より、本計算モデルによる強度分布は、高確率域では $M_T=1$ の分布曲線に従い、破壊確率が数%程度以下でその分布からはずれ、低確率域では $M_T=1.359$ とした分布曲線に漸近して行くものと考えられる。

Table I. Tensile and bending strength of specimens of different sizes.

Specimen size (mm)	Tests	Fracture stress (MPa)			2-parameter Weibull distribution		3-parameter Weibull distribution			Fracture stress at $P_f=0.1\%$ (MPa)
		$\sigma_{\min}$	$\sigma_{\max}$	$\bar{\sigma}_f$	m	σ_0	m	σ_0	σ_u	
$3 \times 4 \times 30$	3-point	584	1007	906	16.8	935	—	—	—	565
	4-point	546	935	811	14.9	840	—	—	—	535
	Tension	463	713	621	17.8	640	7.2	282	356	455
$6 \times 8 \times 60$	3-point	525	922	814	16.5	840	—	—	—	510
	4-point	499	847	722	16.6	745	—	—	—	490
	Tension	470	639	561	24.5	574	6.0	159	414	465
$9 \times 12 \times 90$	3-point	539	877	752	15.8	778	—	—	—	530
	4-point	487	771	670	17.0	692	14.0	581	110	480
	Tension	467	588	535	29.1	545	4.6	101	442	460
$12 \times 16 \times 120$	3-point	517	828	714	17.6	736	—	—	—	515
	4-point	499	739	640	19.3	657	12.4	437	220	495
	Tension	448	569	520	33.1	528	7.3	129	399	445

Fig. 4 は, Fig. 2, 3 の結果を基に有効体積の相違による強度分布の変化を模式的に示した図である. 図中の破線は強度の上限値と下限値を表し, 一点鎖線は, 数十～百本程度の通常の試験データから得られる破壊確率の範囲を表している. 強度分布は, 有効体積の大きな試験片では上に凸の曲線となり, 下限値に漸近する傾向を示しているのに対し, 有効体積の小さな試験片では下に凸の曲線となっている. 本計算では, 欠陥寸法の最大値として $d_m=200\text{ }\mu\text{m}$ を仮定したが, 最大欠陥寸法を小さくすれば, 下限値は次第に上限値に近づき, その結果, 有効体積の小さな試験片にも下限値に漸近するような傾向が現れるようになると予想される.

Table I は, 引張試験で用いた 4 種の寸法の試験片の 3 点曲げ, 4 点曲げ, 引張強度の最小値 $\sigma_{\min}$, 最大値 $\sigma_{\max}$, 平均値 $\bar{\sigma}$ および, 強度分布を 2 母数あるいは 3 母数ワイブル分布で表したときの各母数の推定値を示したものである. 表の m , σ_0 , σ_u は, 形状母数, 尺度母数, 位置母数の推定値を表している. 2 母数ワイブル分布の母数は最小二乗法により求め, 3 母数ワイブル分布の母数は相関係数法¹⁴⁾により求めた. 位置母数の推定値が負になった場合には, 表中に $-$ を記入している. いずれの試験片も, 欠陥密度は $\mu=10$ 個/ mm^3 , 本数は 500 本である.

2 母数ワイブル分布により表した場合の引張強度のワイブル係数は, 試験片寸法が大きくなるにつれて大きくなっていることがわかる. これは, 試験片寸法が大きくなるに伴ってその強度は下限値に近づき, そのため強度のばらつきが小さくなるからである. また, 本シミュレーション結果では現れていないが, 逆に, 試験片の有効体積が非常に小さくなると, 強度は上限値に近づくためワイブル係数は大きな値となることが予想される.

つぎに, 3 母数ワイブル分布で表示した場合について検討する. 3 母数ワイブル分布では, 下限の強度を知るために位置母数の評価が特に重要である. Table I を見ると, 位置母数の推定値は引張試験では約 400 MPa 前後の値を示しているのに対し, 3 点曲げおよび 4 点曲げ試験では, 破壊確率が 1% 以下の低確率域で上に凸の分布を示しているにもかかわらず位置母数が負になる場合があることがわかる. この理由は, 母数推定の際に全データ点を用いているため, 多数のデータが存在する高確率域の分布形状 (下に凸あるいは直線的な分布) が影響するからである. 3 母数ワイブル分布では強度の上限値は無量大となるため, 本シミュレーション結果のように強度に上限値が存在する分布に適用するには無理があると考えられる. また, 推定された位置母数は下限の強度 (349 MPa) を正

確に表しているとは言えないようである. このように試験データから破壊確率が 0 となる強度を正確に推定することは困難であり, 実用的には, ある破壊確率における強度を基に, 寸法効果を考慮して設計に利用するのが便利であると思われる. 一例として, 破壊確率 0.1% における強度を図から外挿して求めると Table I の右端の欄ようになる. 有効体積の大きな引張試験片では破壊確率 0.1% における強度はほぼ一定であるが, 有効体積が小さくなるとその値は次第に大きくなる傾向を示している. 試験データを設計に反映させる場合, このような寸法効果をどのように考慮するか, 今後検討すべき課題である.

4・2 破壊源の欠陥寸法の分布

破壊源となった欠陥寸法 (直径) の分布の一例として, 試験片寸法 $12\times 16\times 120\text{ mm}$ の 3 点曲げ, 4 点曲げ, 引張試験における結果を Fig. 5 (a), (b), (c) に示す. 図より, 松尾らによる解析結果と同様に, 有効体積の増加と共に破壊源となる欠陥寸法は大きくなっていることがわかる. しかし, 引張試験では, 曲げ試験に比べ破壊源の欠陥寸法のばらつきは小さくなりピーク値は高くなっている. この理由は, 有効体積が大きくなるにつれ, 破壊源となる欠陥寸法が最大値 $200\text{ }\mu\text{m}$ に次第に近づいてゆくためである. 図示していないが, 有効体積が最も小さい $3\times 4\times 30\text{ mm}$ の 3 点曲げ試験ではこれとは逆に左側 (欠陥寸法の小さい側) に片寄った分布となっている. 破壊源の欠陥寸法のばらつきが小さくなれば, 試験片の強度のばらつきが小さくなることは明らかであり, このことから, 有効体積が大きくなった場合に, 2 母数ワイブル分布のワイブル係数が大きくなる理由が説明される.

4・3 寸法効果の検討

試験片の強度が試験片の寸法や負荷方法によって異なることはよく知られており, 本シミュレーションでも, Table I に示すように寸法効果によって強度が変化している. この寸法効果を表す式として, 一般に 2 母数ワイブル統計による次式¹⁶⁾が利用されている.

$$\bar{\sigma}_1/\bar{\sigma}_2 = (Ve_2/Ve_1)^{1/m} \quad (15)$$

上式の $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ は異なる 2 種類の試験片の平均強度, Ve_1 , Ve_2 はその有効体積である. Fig. 6 の一点鎖線は, $3\times 4\times 30\text{ mm}$ の 3 点曲げ試験で得られたワイブル係数 ($m=16.8$) と平均強度 ($\bar{\sigma}=906\text{ MPa}$) を用いて式 (15) により算出した有効体積と平均強度との関係を示している. 図中の $\triangle$ $\square$ $\circ$ 印は, それぞれ Table I に示した 3 点曲げ, 4 点曲げ, 引張りの平均強度を表し, Γ は強度のばらつきの範囲を示している. 番号は, 試験片寸法を表す数字である. 3 点曲げ, 4 点曲げ, 引張り試験片の有効体積は, $m=16.8$ として, 次式により算出した.

Fig. 5. Histograms of flaw diameter at fracture origin in tensile and bending tests. (Specimen size is 12×16×120 mm.)

$$\begin{aligned}
 \text{3点曲げ} \quad & Ve = BHL/2(m+1)^2 \\
 \text{4点曲げ} \quad & Ve = BHL(1+mL_2/L)/2(m+1)^2 \\
 \text{引張り} \quad & Ve = BHL
 \end{aligned} \quad (16)$$

また、破線は試験片の強度の上限値と下限値を表している。図より、3×4×30 mm の3点曲げ試験結果から式(15)により推定した値とシミュレーション結果が

Fig. 6. Relation between fracture stress and effective volume.

ほぼ一致しているのは、有効体積が約 1000 倍程度の範囲までで、有効体積がさらに大きな範囲では推定値は小さめの値となっている。

ここで、先に導出した引張強度の分布関数を用いて試験片寸法と平均強度との関係を求めてみる。Fig. 2 に示したように $M_r=1$ として求めた強度分布式(11)はシミュレーション結果とほぼ一致していることから、平均強度 $\bar{\sigma}_f$ は式(11)を用いて次式により求めることができる。

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_f &= \sigma_{u0} + \int_{\sigma_{u0}}^{\sigma_{eq0}} \exp\left[-\mu V \left\{ \frac{1}{\sigma_0} \right. \right. \\
 &\quad \times \left. \left. \left(\frac{\sigma_f}{\sqrt{1-(\sigma_f/\sigma_{eq0})^2}} - \sigma_m \right) \right\}^k \right] d\sigma_f \quad (17)
 \end{aligned}$$

Fig. 6 の実線は上式による試験片寸法と平均強度との関係を示したもので、 $m=16.8$ としてプロットした曲げ強度の点も含めて、図の有効体積の範囲ではシミュレーション結果とよい一致をしている。また、式(15)による有効体積と平均強度の関係は両対数グラフ上で直線となるのに対し、本計算モデルによる両者の関係は逆 S 字形の傾向を示している。両者の関係が逆 S 字形となる理由は、有効体積が小さくなると平均強度は上限値に漸近し、逆に有効体積が大きくなると下限値に漸近するからである。試験片の強度には、上限値と下限値が存在することは明らかであり、図の実線のような関係は一般に成立するものと考えられる。したがって、ワイブル統計による式(15)を用いて有効体積の大きく異なる試験片の強度を説明するには無理な点があり、今後さらに検討が必要である。

5 結 言

前報に引き続いて、強度に下限値が存在する場合を対象に、計算機によるセラミックスの破壊シミュレーションを行い、引張りおよび曲げ強度の分布、破壊源となった欠陥寸法の分布ならびに寸法効果について検

討した。その結果、以下の結論を得た。

(1) セラミックスの強度に下限値と上限値が存在する場合について、有効体積の相違による強度分布の変化を示した。強度分布のワイブルプロットは、有効体積の大きな試験片では上に凸の曲線となり、逆に、有効体積の小さな試験片では下に凸の曲線となった。

(2) 応力拡大係数が欠陥位置によって変化しないと仮定して、本計算モデルに対する強度分布関数の定式化を行った。そして、シミュレーション結果と比較した結果、破壊確率が数 % 以上の高確率域では両者はよい一致を示すことが確認された。

(3) 破壊源となる欠陥寸法は試験片の有効体積の増加と共に大きくなり、その分布は欠陥の最大値に近づいてゆく。また、破壊源の欠陥寸法のばらつきは、試験片の有効体積が小さくなった場合、あるいは逆に有効体積が大きくなった場合には、次第に小さくなる。

(4) 試験片の強度には上限値と下限値が存在するため、平均強度と有効体積の関係は Fig. 6 に示すような逆 S 字形となる。そのため、小型試験片の実験結果から大型試験片の強度を従来のワイブル統計によって評価することには無理な点があり、さらに検討が必要である。

参 考 文 献

- 1) 山田敏郎, 星出敏彦, 古屋博章, 材料, **33**, 28 (1984).
- 2) 大司達樹, 酒井清介, 伊藤 勝, 山内章彦, 兼松 渉, 伊藤正治, 窯業協会誌, **94**, 1056 (1986).
- 3) 原田昭治, 野田尚昭, 遠藤達雄, 永野光芳, 材料, **37**, 904 (1988).
- 4) 谷口佳文, 北住順一, 山田敏郎, 材料, **38**, 1428 (1989).
- 5) 岡部永年, 平田英之, 村松正光, 第 8 回設計における信頼性工学シンポジウム前刷集, p. 98 (1988).
- 6) 市川昌弘, 日本機械学会論文集, A-51, 2368 (1985).
- 7) 津田孝夫, “モンテカルロ法とシミュレーション”, p. 51 (1977) 培風館
- 8) 北住順一, 谷口佳文, 星出敏彦, 山田敏郎, 材料, **38**, 1254 (1989).
- 9) R. C. Shah and A. S. Kobayashi, ASTM STP 513, 3 (1972).
- 10) 曾我直弘, 塩野剛司, 材料, **33**, 1378 (1984).
- 11) K. K. Phani, J. Mat. Sci., **23**, 2864 (1988).
- 12) H. L. Oh and I. Finnie, Int. J. Fracture Mech., **6**, 287 (1970).
- 13) 松井 實, 第 4 回次世代産業基盤技術シンポジウム予稿集, p. 141 (1986).
- 14) 酒井達雄, 田中道七, 材料, **29**, 17 (1980).
- 15) 松尾陽太郎, 北上浩一, 木村脩七, 窯業協会誌, **94**, 711 (1986).
- 16) “セラミックスの機械的性質”, p. 22 (1979) 窯業協会