講座 LECTURE

材料の高速変形と破壊

5. 計算衝撃力学[†]

松本 浩之*

1 はじめに

現在、スーパーコンピュータの利用を前提とした計算力学という分野が定着しつつあり、先端的課題として固体中の分子1つ1つの動きを調べて、固体の物性を明らかにしようとする分子動力学的手法などが注目

図1 固体力学の理論解析法の流れ

されているようであるが、ここでは、連続体モデルを用いて衝撃現象を解明するための固体力学、計算力学等の基盤となる理論解析の基礎を主眼に解説する。

固体力学の理論解析法の概略の流れを示せば、図1のようになる。

図2に固体の衝撃問題に利用される汎用プログラム(汎用計算コード)のいくつかの例が示してある。MSC NASTRAN, ABAQUS, MARCはワークステーションレベルで、DYNAやPAMCRASHはスーパーコンピュータレベルで用

図2 理論解析の実行法

いられる。これらを利用する場合、マニュアルの内容を十分に理解することは必ずしも容易なことではない。

したがって、衝撃問題に利用される計算コードについて概説することは重要であるが、本誌昭和60年10月号の講座「材料の衝撃問題の基礎と応用・3. 衝撃問題に利用される計算コード」などがあるので、ここでは、小規模の専用プログラムを開発する立場も含めて、より一般的に衝撃問題の基本事項について概説する。また、図1の⑥の数値計算法および解の安定性^{13), 15), 18)}については、ここではふれていない。

2 固体力学の原理と理論構成

2.1 基礎理論の構成^{2), 19)}

固体の衝撃問題の理論は、原理的には、固体の静的問題の理論に、慣性力を付加したものであるが、材料の性質が荷重の加わる速さに依存する点も考慮する必要がある。

静的問題、動的問題いずれの場合においても、図1

図3 基礎理論の構成

[†] 原稿受理 平成3年2月12日

* 正会員 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山

の③の部分に相当する基礎理論の構成は図3のようになる。

2・2 定式化の基本原則

図3において、力学的平衡原理は、物体の形状・材質・変形の大小によらない。その表現形式は図4のように基本的には微分、積分、変分を用いた3通りに分類できる。これらを統一的に説明する方法として、誤差論の立場に立つ重み付き残差法がある。

図4 力学的平衡条件の定式化の原理

(a) 微分原理

微分原理に基づく方法は「ニュートンの運動の第二法則： $F=ma$ 」を連続体に適用して、微小要素の力の釣り合いから平衡状態を表す方法である。加速度 $a=0$ の場合は、 $F=0$ すなわち静力学的平衡原理となる。

(b) 積分原理

$F=ma$ を時間について t_1 から t_2 まで積分すれば、

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = (mv)_{t_1} - (mv)_{t_2}$$

となり、運動量 mv の変化(右辺)は力積(左辺)に等しいとする運動量に関する法則が得られる。また線形現象では基礎式が線形となるため「重ね合せの原理」が成り立つ。

(c) 変分原理と重み付き残差法

「静的平衡状態ではポテンシャルエネルギー Π が極小」になり、

$$\delta \Pi = \delta(U - W) = 0$$

と表される。ここで $\Pi = U - W$ であり、 U はひずみエネルギー、 W は外力の仮想仕事である。 $-W$ は外力のポテンシャルと呼ばれる。ここで δ は変分記号である。 Π は系のもつ仕事をしうる能力(ポテンシャル)を表している。

動的平衡状態は、

$$\sigma \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad L = \Pi - T = U - W - T$$

と表され、「ハミルトンの原理」と呼ばれる。ここで、 T は運動エネルギー、 L はラグランジュ関数である。

連続体モデルでは

$$U = \iiint \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz$$

$$T = \iiint \frac{\rho}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dy dz$$

と表せる。

3 解法の種類

3・1 基本的な解法とその原理

固体力学において、応力・変位の解法の種類を図5に示す。

図5の解析解法は基礎の偏微分方程式の解析解を用いる方法であり、基本的な問題の厳密解、き裂先端や異種材料接合縁での特異応力場¹⁶⁾、境界要素法の基本解に用いられる集中荷重問題の解の導出などに利用される。数値解法の差分法、境界要素法、有限要素法は図4の微分原理、積分原理、変分原理を解法に適用したものである。

微分原理、積分原理、変分原理が基礎式の定式化のみならず、解法にも重要な役割りを果たし、固体力学の体系を理解する上での基盤となっている。

(a) 境界要素法の考え方

図6(a)に示される円孔面に圧力 p 、せん断応力 q を受ける無限板の P 点の応力を Green 関数の重ね合わせで求めることを考える。Green 関数として、図(b)の孔のない無限板の点 P に、 x 方向に単位集中荷重が作用する場合の任意点 Q の応力解を用いる。これを用いて y 方向に単位集中荷重が作用する場合の応力も容易に求まる。これらの解 (Green 関数) を境界要素法では基本解という。

図(a)の点 A の応力を求めるために、図(c)のように孔のない無限板上に図(a)の円孔に相当する円 Γ とこれより少し内側に仮想境界 Γ' を考える。仮想境界 Γ' 上の N 個の点 ($i=1 \sim N$) に大きさ f_i 、 g_i ($i=1 \sim N$) の集中荷重を加える。これらによる Γ 上の N

図5 解法の種類

図6 境界要素法概念図(板の平面応力問題)

個の選点の応力が図(a)のその選点の外力 p , q と釣合いを保つようにすれば, $2N$ 個の集中荷重の大きさ $(f_i, g_i) (i=1 \sim N)$ が連立一次方程式を解いて求まる。

図(c)の Γ 上の応力が図(a)の円孔上の外力と一致すれば, 図(a)と(c)の A 点の応力は等しい。このような重ね合わせ法を用いれば, 境界上での値のみから物体内部の応力を知ることができる。

この方法は, 境界要素法あるいは体積法と呼ばれる。閉じた形の基本解が得られていない問題も少なくない。動的問題への拡張については別項に示す。単一集中力に対する基本解と対向二重力(ダブルレット)などに対する基本解を組み合わせれば, 弾性領域内に微小な塑性領域が生じる場合の応力場を表現でき, 非線形場を重ね合わせの原理を用いて解明しようとする西谷らの体積法²¹⁾の発想は注目値する。

(b) 有限要素法の考え方¹⁾

ここでは静的二次元平面応力問題の有限要素法による定式化の過程を概観し, 有限要素法と変分法とのかわりについて整理する。有限要素法では, 物体を有限個の要素に分割する。

分割された1つの三角形要素について, 力は頂点の節点 i, j, k を通してのみ他の要素に伝達されるとする(図7)。

有限要素法で変分法が用いられるのは, 要素の節点の節点力ベクトル $[f_e] = [f_i, g_i, f_j, g_j, f_k, g_k]^T$ と節点変位ベクトル $[x_e] = [u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k]^T$ の関係を導く過程である。ここで肩付きの添え字 T は転置マトリクスを示す。

まず, 図7(b)の要素内の任意点 $P(x, y)$ の x, y 方向変位 u, v を次のように表す。

$$\begin{cases} u = a_{10} + a_{11}x + a_{12}y \\ v = a_{20} + a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad (1)$$

上式に節点座標を代入すると, 係数は節点変位 $[x_e]$ で表わせる。

式(1)からひずみを求めると, ひずみは座標によらず要素内で一定となる。応力も同様である。このような, 定ひずみ三角形要素のポテンシャルエネルギー Π は,

$$\Pi = U - W, \quad U = 1/2 \cdot [\sigma]^T [\epsilon] t s, \quad W = [f_e]^T [x_e]$$

となる。ここで t は板厚, s は三角形要素の面積である。応力 $[\sigma]$, ひずみ $[\epsilon]$ を節点変位 $[x_e]$ で表すと

$$U = 1/2 \cdot [x_e]^T [k] [x_e]$$

とおけるから,

$$\Pi = 1/2 \cdot [x_e]^T [k] [x_e] - [f_e]^T [x_e]$$

と表せる。ここで, $[k]$ は対称マトリクスである。外力 $[f_e]$ を一定のまま u_i を $u_i + \delta u_i$ 等に仮想変位させると $[x_e]$ は $[x_e] + [\delta x_e]$ と表せる。

変分 δ を微分演算子と考えれば,

$$\delta \Pi = 1/2 \cdot [\delta x_e]^T [k] [x_e] + 1/2 \cdot [x_e]^T [k] [\delta x_e] - [f_e]^T [\delta x_e]$$

である。さて, ひずみエネルギー, 外力の仮想仕事はスカラー量であるから,

$$\delta \Pi = [\delta x_e]^T [k] [x_e] - [f_e]$$

と変形できる。

$$\delta \Pi = 0 \text{ とおけば}$$

$$[f_e] = [k] [x_e]$$

この式を要素の剛性方程式, $[k]$ を要素の剛性マトリ

図7 定ひずみ三角形要素の節点力と節点変位

表 I 衝撃問題の数値解法の種類

	空間積分法	時間積分法
解析解法	積分変換法	積分変換法
図式解法	ホドグラフ法 特性曲線法	
数値解法	差分法	差分法
	境界要素法	実時間法—差分法 時空解法—積分変換法
		有限要素法—差分法 積分変換法

クスという。

構造全体の剛性方程式を作るために、要素の各節点を滑節とみなす。複数の要素が集まる節点については、要素の節点力（内力）の和は、その節点の外力と釣り合うから、これ以降の解析手順はトラス構造のマトリクス解析法と同じになる。式(1)以外の変形の仮定も可能であり、多数の要素モデルが考えられている。

有限要素法を非線形問題に拡張する過程は、重要である。応力は表面力であり、塑性変形領域には見掛け上物体力が分布してこれが線形の表面力場に重ね合わされて非線形効果を表すと考えれば、西谷らの体積力法と有限要素法を統一的に理解することが容易になると思われる。

3・2 衝撃問題の解析

衝撃問題^{1), 4), 5), 26)}の解法のほとんどは、静的問題の解法を拡張したものである。表 I には、衝撃問題の数値解法を種類別に分類してある。時間積分法のうちの積分変換法の使用は動的問題に特有の方法であるが、線形動弾性問題、線形動粘弾性問題に限定される。

3・2・1 積分変換による時間積分法 線形動弾性・線形動粘弾性の基礎式を時間についてラプラス変換して、像空間で解析し、数値的に逆変換する方法を採用すれば、対応する静的な線形問題とほぼ同様に解析できる。数値逆変換法には多くの方法があるが、特定な点の時間応答（時系列応答）を求めるには FFT 法（高速フーリエ変換法）がよく、特定時間のある面内の応力分布をグラフィック表示する場合には、細野の方法が有力である。

系のポテンシャルエネルギー、ラグランジュ関数、重み付き残差などは、関数と関数の積として非線形表示され、そのまま積分変換できない。したがって積分変換法を用いる場合には、定式化の手順に注意を要する。ここでは動的問題にラプラス変換法と境界要素法を併用する解法を示す^{25), 28), 37), 39)}。要点は、像空間において重み付き残差法を適用するところにある。

動的問題では、像空間において、重みを $\bar{u}_i^*$ 、 $\bar{p}_i^*$ として重み付き残差表示を適用する。

$$\int_0^{\infty} (\bar{\sigma}_{ij,j} + \rho \bar{X}_i - \rho p^* \bar{u}_i) \bar{u}_i^* d\Omega \\ + \int_{s_1} (\bar{u}_i - \hat{u}_i) \bar{p}_i^* ds - \int_{s_2} (\bar{p}_i - \hat{p}_i) \bar{u}_i^* ds = 0$$

$\bar{u}_i^*$ 、 $\bar{p}_i^*$ を変位および応力の合力の i 方向成分とすれば、部分積分とガウスの発散定理を用いて変形すると

$$\int_0^{\infty} (\bar{\sigma}_{ij,j} - \rho p^2 \bar{u}_i^*) \bar{u}_i d\Omega \\ = - \int_{s_1} \bar{p}_i \bar{u}_i^* ds - \int_{s_2} \hat{p}_i \bar{u}_i^* ds \\ + \int_{s_1} \hat{u}_i \bar{p}_i^* ds + \int_{s_2} \bar{u}_i \bar{p}_i^* ds \\ - \rho \int \bar{X}_i \bar{u}_i^* d\Omega \quad (2)$$

重み u_i^* 、 p_i^* として物体のある点 k 方向に単位集中荷重がインパルス状（デルタ関数状）に作用したときの任意点の変位 u_{ki}^* と合力の分力 p_{ki}^* を表す関数を用いる。すなわち、これらは Green 関数、境界要素法では基本解とよばれるものである。すなわち、クロネッカのデルタ δ_{ki} を用いれば、

$$\bar{\sigma}_{ij,j} - \rho p^2 \bar{u}_{ki}^* + \delta_{ki} = 0 \quad (3)$$

になる。

式(3)を式(2)に代入すれば、デルタ関数の性質により式(2)の体積積分はとれて、

$$\bar{u}_k = - \int_s \bar{u}_i \bar{p}_{ki}^* ds + \int_s \bar{p}_i \bar{u}_{ki}^* ds \\ + \rho \int_0^{\infty} \bar{X}_i \bar{u}_{ki}^* d\Omega$$

となる。 $\rho \bar{X}_i$ が 0 ならば、境界 s を要素分割して、各節点の変位、応力の合力成分が連立一次方程式を解いて求まる。

実時間解を得るのに、数値ラプラス逆変換法を適用できる。

線形問題では時間差分法を用いるよりも上述の積分変換法を用いる方が汎用性があると思われる。

3・2・2 非線形衝撃問題の数値解法 基礎式が双曲型偏微分方程式であれば、特性曲線法を用いることができる。棒の一次元縦衝撃の図式解法、一次元塑性波の特性曲線法は簡便であり、前者は衝撃試験法の簡易計測理論としてしばしば用いられ、後者は数値解法のチェックとして活用される。

一般には、時間については差分法、空間については有限要素法を組み合わせる方法が有力である。

4 最近の衝撃問題へのアプローチ例

比強度、比剛性が著しく高いため、一方向炭素繊維

ブリプレグを素材とする積層板・殻構造が航空機の強度部材として採用されつつある。胴体、尾翼などに用いられる場合には、修理点検中の工具の落下衝突、離着陸時の小石やタイヤの破片などの衝突、飛行中のひょうや雨滴の衝突など、比較的到低エネルギーの衝突が大きな問題となっている。その理由は衝突部の積層部の積層界面にはく離が生じたり、繊維と平行に樹脂層にき裂が生じ、特に圧縮の残留強度を著しく低下させる危険性があるためである。ジェットエンジンの低圧側のコンプレッサの動翼に適用することも従来から試みられているが、着陸時に小鳥が空気取り入れ口から飛び込み、動翼をばらばらに破壊するバードショック対策が未解決となっている。この場合、高エネルギー衝突であり、もちろん胴体、尾翼などでも貫通抵抗も含めて十分に検討される必要がある。実機は複雑かつ高価であるため、積層平板試験片の衝撃曲げ試験で基本的衝撃特性を把握できれば都合がよい。

最も単純化された試験として図8(a)のように、鋼やゴムなどの球あるいは円柱の衝撃体を中央部に衝突させる方法、図(b), (c)のように棒状ロードセルを衝突させて、衝撃荷重と衝撃部のたわみを計測する計装化落下衝撃試験法などがある。図(a)の方法では、衝突体の材質・形状の組み合わせは多様である。しかし、衝撃荷重が評価できるのは、衝撃体も積層板も弾性応答する場合に限られる。それ以外の場合は衝突直前の運動エネルギーが衝撃条件とされる。

計算力学的観点から次の3段階のアプローチが考えられる。

- 第1段階 弾性応答解析
- 第2段階 低速衝撃損傷のシミュレーション
- 第3段階 高速衝撃損傷のシミュレーション

現在、DYNA2D, DYNA3Dなどの汎用コードを用いて第2段階の研究が行われているようであるが、実験結果を説明しうる満足すべき結果はまだ報告されていないようである。汎用コードの改良およびこれと並行して、衝撃損傷のクライテリアと標準的な衝撃試験法の開発が熱望されている。

4・1 動的荷重-変位曲線の計測原理^{12), 40)}

図8(b), (c)においてロードセルの棒が降伏しなければ、棒先端が積層板に接触している間の荷重-変位曲線をひずみゲージの出力データから求めることができる。一次元波動伝ば理論から、図(c)の場合、荷重 F および荷重点のたわみ w のラプラス変換 $\bar{F}$, $\bar{w}$ は次のようになる。

$$\bar{F} = AE[-\bar{\epsilon}_1 \sinh(p\ell_2/c) + \bar{\epsilon}_2 \sinh(p\ell_2/c)]$$

$$/\sinh(p(\ell_2 - \ell_1)/c)$$

$$\bar{w} = c/p \cdot \{\bar{\epsilon}_1 \cosh(p\ell_2/c) - \bar{\epsilon}_2 \cosh(p\ell_2/c)\}$$

$$/\sinh(p(\ell_2 - \ell_1)/c) + V_0/p^2$$

ここで、ひずみゲージの位置を衝撃端から ℓ_1 , ℓ_2 そのひずみを ϵ_1 , ϵ_2 , A は棒の断面積, E はヤング率, $c = \sqrt{E/\rho}$, ρ : 棒の密度, V_0 : 衝撃体の衝撃速度, p : ラプラス変換のパラメータである。

測定データ $\epsilon_1(t)$, $\epsilon_2(t)$ を FFT (高速フーリエ変換) 法のプログラムによって数値ラプラス変換すれば、 $\bar{F}$, $\bar{w}$ が求まる。これらをさらに FFT 法によって数値逆変換すれば荷重-時間曲線、たわみ-時間曲線が得られ、時間を消去すれば荷重-たわみ曲線が得られる。^{7), 17), 24), 29), 35)}

4・2 Hertz の衝撃理論

図8(a)において、球が直交異方性積層板に弾性衝突する場合、衝突荷重 F は次の非線形積分方程式から得られる。

$$\{F(t)/K\}^{2/3} = V_0 t - (1/m_0) \int_0^t \int_0^\xi F(\eta) d\eta d\xi \\ - \int_0^t F(\eta) [d/d\eta \{w(t-\eta)\}] d\eta$$

ここで

$$K = 4/3 \cdot E_0 E \sqrt{r_0} / [E_0(1-\nu^2) + E(1-\nu_0^2)]$$

$$E = \sqrt{E_1 E_2}, \quad \nu = \sqrt{\nu_1 \nu_2}$$

そして、 E_0 , ν_0 , r_0 は球のヤング率, ポアソン比, 半径であり, E , ν は衝撃を受ける積層板の最上層の異方性弾性定数を用いる。式中 w は積層板が単位ステップ集中荷重を受けた場合の荷重点のたわみである。たわみの単位ステップ応答 w は実験, 理論いずれからも求まる。実験においては、図8(b)あるいは(c)の

図8 積層平板の曲げ衝撃

ようにロードセルを用いた予備実験を行う。荷重 F_e とたわみ w_e の予備実験結果を数値ラプラス変換すれば、ラプラス変換領域における伝達関数 $R(p)$ が次のように求まる。

$$\bar{w}_e = R(p) \bar{F}_e$$

単位ステップ荷重の場合にも伝達関数は等しいから

$$\bar{w} = R(p) / p$$

したがって、

$$\bar{w} = \bar{w}_e / (p \bar{F}_e)$$

となり、これを数値逆変換すれば $w(t)$ が求まる。この場合、測定値にまざる雑音の処理については十分に検討する必要がある。

Hertz の理論から接触領域は

$$a_0 = \sqrt{\pi \tau_0} (F(t) / K)^{1/3}$$

として求まる。ここで a_0 は接触領域を円と仮定したときの半径である。理論的にたわみ w を求める方法は次項に示す。

4・3 積層板の弾性衝撃応答

積層板に作用する衝撃荷重 $F(t)$ が測定されていれば、これを積層板の応力・ひずみ解析に利用できる。前項のように、Hertz の理論によって衝撃荷重を求める場合には、単位ステップ荷重が作用する積層板のたわみ解析も行う必要がある。異方性弾性板理論には Kirchhoff-Love の仮定を用いる近似理論（古典理論、Mindlin または Reissner 理論など）のほかに、高次近似理論^{9), 34)}、三次元理論³⁾などがある。たわみ解析には古典理論が簡便であり、面内応力は Mindlin 理論^{10), 20)}が高次近似理論の適用が推奨される。面外応力成分の解析には、高次近似理論でも精度が期待できない。このような場合、次のような近似三次元解析が試みられる。まず、Mindlin 理論あるいは高次近似理論によって面内応力を求める。つぎにこれを三次元の応力の平衡式に代入する。面外応力は応力の平衡式を数値積分して求めることができる。三次元解析については静的な場合には Elliot の変位ポテンシャル²²⁾を用いて直交異方性板の面外応力が解析されている。動的な場合には、変位ポテンシャルが明らかにされていないが、変位成分を面内方向に二重級数展開して解析できる。これらの二重級数計算は FFT 法によって高速化できる³¹⁾。時間についても数値ラプラス逆変換に FFT 法あるいは細野の方法を用いて精度よく計算できる。今後、積層板の縁の応力、界面はく離後の特異応力場の解析、界面はく離やき裂のシミュレーションなどが重要な課題である。

5 む す び

本講では、多様な衝撃問題について、それらの理論の定式化および基礎式の解析法の種類を概観した。これらを一元的に結び付けるのに力学の平衡条件を表現

する微分原理、積分原理、変分原理が重要な役割をはたしていることを改めて強調した。また、線形衝撃問題に数値ラプラス逆変換法や FFT 法を適用すれば、静的線形問題と同程度の理論的準備で、解析できることを指摘した。

ここで、計算衝撃力学の将来の方向をまとめてみると 3 つの視点が浮かび上がってくる。

その 1 つは、汎用解析コードの改良への努力。その 2 つは、AI 化のコンピュータシステムの構築のため一次元の縦波の伝ば理論に基づく応力波の伝ばのような材料力学の公式レベルから、小・中規模の解析コード、汎用解析コードなどを用途に応じて利用できるシステムの開発の可能性の検討。その 3 つは、連続体モデルから脱皮して分子動力学のようなミクロな離散化モデルを用いた動的材料物性解明へのアプローチである。

著者は、材料力学の新しい発展・展開を願い、2 番目のアプローチにも少なからず期待をかけている。院生や研究開発・設計にたずさわる若い技術者の方々にとって少しでも衝撃問題の理解と活用の助けとなれば幸いである。

参 考 文 献

- 1) W. Goldsmith, "Impact" (1960) Edward Arnold Publishers LTD
- 2) Y. C. ファン著 (大橋・村上・神谷訳), "固体の力学/理論" (1970) 培風館
- 3) N. J. Pagano, J. Composite Mat., **4**, 20 (1970).
- 4) W. Johnson, "Impact Strength of Materials", (1972) Edward Arnold
- 5) K. F. Graff, "Wave motion in elastic solids" (1975) Clarendon Press
- 6) R. M. Jones, "Mechanics of Composite Materials" (1975) McGraw-Hill Book Co.
- 7) C. T. Sun and S. Chattopadhyay, J. Appl. Mech., **42**, 693 (1975).
- 8) K. H. Lo, R. M. Christensen and E. M. Wu, J. Appl. Mech., **44**, 669 (1977).
- 9) 細野敏夫, 電気学会論文集 A, **99**, 44 (1979).
- 10) A. L. Dobyns, AIAA J., **19**, 642 (1981).
- 11) 鷲津久一郎, 他 4 名共編, "有限要素法ハンドブック: I 基礎編" (1981), II 応用編" (1983) 培風館
- 12) 松本浩之, 中原一郎, 木村正則, 非破壊検査, **31**, 433 (1982).
- 13) J. A. Zukas et al., "Impact Dynamics" (1982) John Wiley & Sons
- 14) プレビア/編 (田中訳) "境界要素法の応用・1" (1983), "同・2" (1983) 樹企画センター
- 15) 吉田 裕, 数理科学, **77** (1984).
- 16) 笠野英秋, 松本浩之, 日本接着協会誌, **21**, 10 (1985).

- 17) T. M. Tan and C. T. Sun, *J. Appl. Mech.*, **52**, 6 (1985).
- 18) 矢川元基, 関東康裕, 数理科学, **6** (1986).
- 19) 日本機械学会編, “固体力学におけるコンピュータアナリシス” (1986) コロナ社
- 20) V. Birman and C. W. Bert, *Int. J. Impact Eng.*, **6**, 145 (1987).
- 21) 西谷弘信, 陳 玳珩, “体積力法 (重ね合せの原理による数値解析法)” (1987) 培風館
- 22) 奥村 勇, 道端久紀, 日本機械学会論文集, A-54, 1512 (1988).
- 23) T. Kant and B. N. Pandya, *J. Composite Structures*, **9**, 215 (1988).
- 24) 松本浩之, 笠野英秋, 鈴木正之, 非破壊検査, **3**, 395 (1988).
- 25) 松本浩之, 足立忠晴, 角浜義隆, 福沢敬一, 日本機械学会論文集, A-54, 1024 (1988).
- 26) 林 卓夫, 田中吉之助編著, “衝撃工学” (1988) 日刊工業新聞社
- 27) 井上裕嗣, 渡辺隆一, 渋谷寿一, 小泉 堯, 非破壊検査, **37**, 337 (1988).
- 28) 松本浩之, 足立忠晴, 吉田節男, 宇治橋貞幸, 日本機械学会論文集, A-55, 1400 (1989).
- 29) A. P. Christoforou and S. R. Swanson, *Int. J. Solids Structures*, **27**, 161 (1989).
- 30) A. K. Noor and W. S. Burton, *J. Composite Structures*, **11**, 183 (1989).
- 31) 足立忠晴, 松本浩之, 宇治橋貞幸, 日本機械学会論文集, A-55, 2271 (1989).
- 32) 足立忠晴, 波多野啓二, 宇治橋貞幸, 松本浩之, 日本機械学会論文集, A-56, 917 (1990).
- 33) H. Matsumoto, T. Adachi and S. Ujihashi, *Proceedings of the Oji International Seminar on Dynamic Fracture*, p. 174 (1990).
- 34) 鞠 重錫, 鈴木正之, 足立忠晴, 宇治橋貞幸, 松本浩之, 日本機械学会論文集, A-56, 2520 (1990).
- 35) Y. Qian and S. R. Swanson, *J. Composite Structures*, **14**, 177 (1990).
- 36) A. K. Noor and W. S. Burton, *J. Composite Structures*, **14**, 233 (1990).
- 37) T. Adachi, K. Satoh, S. Ujihashi, H. Matsumoto, K. Kitagawa, *Topics in Engineering Vol. 7: Advances in Boundary Elements Method in Japan and USA*, Computational Mechanics Pub., p. 153 (1990).
- 38) 松本浩之, 小川義英, 足立忠晴, 日本機械学会論文集, A-57, 1418 (1991).
- 39) 足立忠晴, 河村正孝, 宇治橋貞幸, 松本浩之, 日本機械学会論文集, A-57, 946 (1991).
- 40) 足立忠晴, 坂上 啓, 宇治橋貞幸, 松本浩之, 日本機械学会論文集, A-57, 569 (1991).