遠心鑄造における凝固と応力の連成解析†

巨 東 英* 武 村 伸 介** 井 上 達 雄***

Coupled Analysis of Solidification and Stresses in Centrifugal Casting Process

by

Dong-Ying JU*, Shinsuke TAKEMURA** and Tatsuo INOUE***

In this paper, equations describing the changes in temperature and stresses accompanied with solidification was developed based on thermomechanics. The finite element scheme for stress analysis as well as the temperature distribution were formulated, where a unified inelastic constitutive relationship capable of describing both elastic-viscoplastic solid and viscous liquid was employed. Examples of numerical calculation of temperature affected by solidification and stresses were presented for some practical cases of centrifugal casting process.

Key words: Solidification, Elastic-viscoplastic constitutive equation, Residual stresses, Centrifugal casting process

1 緒 言

遠心鑄造プロセスは、物質境界と相境界が共に移動することなど、その物理現象は熱的にも力学的にも非常に複雑である。しかし、鑄造物の温度分布や応力分布などを推定する方法を確立することは、最適な鑄造条件を設定するために極めて重要である。¹⁾ 前報では、まず温度と相変態の相互作用を考慮して、凝固過程における温度場の有限要素シミュレーションを行った。本研究では、その成果に基づいて、遠心鑄造プロセスの応力解析を試みる。

一般に、このような相変態を伴うプロセスでは、温度場、材料の組織および応力場の間には、複雑な連成関係がある。ここでは、相変態すなわち凝固時の潜熱の発生と応力仕事による発熱を考慮した熱伝導方程式と、温度と相変態を考慮した弾粘塑性構成式を用いて、遠心鑄造過程における凝固と応力の解析方法を提示し、いくつかのモデルについての有限要素シミュレーションを行った。

2 凝固を考慮した基礎方程式

2・1 熱-力学的支配方程式

本研究では、凝固によって組織の変化を伴う物体の熱的、力学的挙動を、温度、応力および組織の連成問題としてとらえることにする。組織の変化すなわち相変態の場を巨視的に表現するため、ここでは前報で述べたように、各組織の割合を表す体積分率 ξ_i ($i=1, 2, \dots, N$) を導入する。また、物体の物性値は体積分率

ξ_i で表される N 種の相の物性値の混合則で表されるとする。³⁾ ここで、固相体積分率 ξ_s は、材料の平衡状態図からこの法則によって求めるものとする。

ところで、領域 V での運動方程式および熱エネルギー保存則は、

$$\text{div } \sigma + \rho b = \rho \ddot{u} \quad \text{in } V \quad (1)$$

$$\rho \dot{e} = \rho \gamma - \text{div } h + \text{tr}(\sigma \dot{\epsilon}) \quad \text{in } V \quad (2)$$

と表される。ここで、 ρ は密度、 b は単位質量あたりの物体力、 u は変位である。また、 e は内部エネルギー密度、 σ および ϵ はそれぞれ応力とひずみである。また、 γ は単位質量当りの熱供給量であり、 h は境界 S 上における熱流束である。ところで、エントロピー密度 η については、任意の熱力学過程において、次の Clausius-Duhem 不等式を満足しなければならない。

$$\rho T \dot{\eta} - \rho \dot{e} - \frac{1}{T} \text{grad } T \cdot h + \text{tr}(\sigma \dot{\epsilon}) \geq 0 \quad (3)$$

いま、内部変数として、非弾性ひずみ ϵ^i と各組織の体積分率 ξ_i を選ぶと、自由エンタルピー (Gibbs) の自由エネルギー関数 $g = e - T\eta - \text{tr}(\sigma \epsilon^e)/\rho$ 、エントロピー η および可逆 (弾性) ひずみ ϵ^e についての構成式の一般形は次のようになる。

$$\begin{aligned} g &= g(\sigma, T, \text{grad } T, \epsilon^i, \xi_i) \\ \eta &= \eta(\sigma, T, \text{grad } T, \epsilon^i, \xi_i) \\ \epsilon^e &= \epsilon^e(\sigma, T, \text{grad } T, \epsilon^i, \xi_i) \end{aligned} \quad (4)$$

これらの関数の導関数を式 (2) および式 (3) に代入する

† 原稿受理 平成 3 年 5 月 13 日 Received May 13, 1991

* 学生会員 京都大学大学院 〒606-01 京都市左京区吉田本町, Graduate Student, Kyoto Univ., Sakyo-ku, Kyoto, 606-01

** 京都大学工学部機械工学教室 〒606-01 京都市左京区吉田本町, Dept. of Mech. Eng., Kyoto Univ., Sakyo-ku, Kyoto, 606-01

*** 正 会 員 京都大学工学部機械工学教室 〒606-01 京都市左京区吉田本町, Dept. of Mech. Eng., Kyoto Univ., Sakyo-ku, Kyoto, 606-01

と, 相変態および応力仕事を考慮した連成熱伝導方程式は

$$\rho c \dot{T} + \text{div } \mathbf{h} + \rho \Sigma \ell_i \dot{\xi}_i - \text{tr}(\sigma \dot{\epsilon}^i) = \rho \gamma \quad (5)$$

となる。この式における比熱 c , 潜熱 ℓ_i は次のように定義されている。

$$c = T \frac{\partial \eta}{\partial T} \quad (6)$$

$$\ell_i = \frac{\partial g}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \eta}{\partial \xi_i} T \quad (7)$$

つぎに, 熱流束ベクトル $\mathbf{h}$ は, 熱伝導率 k , 体積分率 ξ_i を用いると, Fourier の法則によって,

$$\mathbf{h} = -k \text{grad } T = -\Sigma k_i \xi_i \text{grad } T \quad (8)$$

と表される。本研究では固相と液相の2種の相から構成されている凝固過程の問題を取り扱うので, 液相から固相に変態する時に発生する潜熱は固相の増加速度 $\dot{\xi}_s$ に比例すると考えると, 上式は次のように書き換えられる。

$$\rho c \dot{T} - \text{div}(k \text{grad } T) - \rho_s \ell_s \dot{\xi}_s - \text{tr}(\sigma \dot{\epsilon}^i) = \rho \gamma \quad (9)$$

2・2 熱弾-粘塑性体の構成式

遠心鋳造における凝固領域の近傍では, 相対的に極めて高温であるため, 材料の非弾性挙動としては, 塑性変形のみでなく, 粘性的性質を考慮する必要がある。^{4), 5)}

一般的に全ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ は, 弾性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^e$, 熱ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^T$, 変態ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^m$ および非弾性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^i$ を用いて,

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^T + \dot{\epsilon}^m + \dot{\epsilon}^i \quad (10)$$

と表すことができる。まず弾性ひずみ ϵ^e は,

$$\epsilon^e = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \sigma) \mathbf{1} \quad (11)$$

となる。ここに, E , ν はそれぞれヤング率とポアソン比である。熱ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^T$ と相変態ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^m$ はそれぞれ次のように表される。

$$\dot{\epsilon}^T = \alpha \dot{T} \mathbf{1} \quad (12)$$

$$\dot{\epsilon}^m = \beta \dot{\xi}_s \mathbf{1} \quad (13)$$

つぎに非弾性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^i$ について考える。本研究では凝固過程の解析を目的としているので, 材料の温度は極めて高いことが前提である。すなわち, 温度がその材料の融点よりも高いときには, 熔融状態にあるので, 粘性流体と考える必要がある。また, 融点以下の固体状態でも, その非弾性特性は粘性と塑性を合せもつ粘塑性とみなすべきである。したがって, 固体と流体の両方に適用できるような非弾性構成式として, Perzyna⁶⁾ が提案した粘塑性構成式を修正したものを用いることにする。⁷⁾

すなわち, 非弾性ひずみ速度は, 降伏関数 F によって

$$\dot{\epsilon}^i = \frac{1}{3\mu} \langle \Psi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (14)$$

で与えられるとする。ここで, $\Psi(F)$ は F の関数で, $\langle \rangle$ は Macauley 記号である。粘性係数 μ は, 各種の速度での引張りにおける応力-ひずみ曲線によって決定できる。

いま, 簡単な場合として, 物質関数 $\Psi(F)$ を降伏関数 F とおき, F として, Mises 型のもの

$$F = 1 - K(T, \kappa, \xi_i) / 3J_2^{*1/2} \quad (15)$$

を採用する。ここで, J_2^* は偏差応力 $\mathbf{s}$ の2次不変量, K は降伏応力, κ は硬化パラメータである。このとき, 非弾性ひずみ速度は

$$\dot{\epsilon}^i = \frac{1}{3\mu} \langle F \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \langle \Lambda \rangle \mathbf{s} \quad (16)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2\mu} [1 - K / (3J_2^*)^{1/2}] \quad (17)$$

と表すことができる。一方, 温度が固相温度より高い場合, 式(17)の降伏応力 K はほとんど0に近くなるが, このとき, 非弾性ひずみ速度は

$$\dot{\epsilon}^i = \frac{1}{2\mu} \mathbf{s} = \frac{1}{2\mu} (\sigma - p) \mathbf{1}, \quad p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \mathbf{1} \quad (18)$$

となるから, 式(18)は Newton 流体の構成式に帰着するので, 式(16)の構成式は液相と固相の状態を同時に記述することが可能であることがわかる。

3 数値解析の方法

遠心鋳造の問題は, 基本的に非定常, 非線形であり, また, 相変態, 温度および応力が連成する解析を行う必要がある。本研究では, 有限要素法を用いた離散化を行い, 増分法によって遠心鋳造過程における温度, 相変態および応力のシミュレーションを試みる。

3・1 非弾性構成式の増分形

一般に, 弾粘塑性構成式はひずみ速度形で表示されているので, 弾粘塑性の構成式を有限要素法を用いて定式化するとき, 時間に関する増分形を導くことが必要である。^{8), 9)} すなわち, 粘塑性ひずみの増分は次のように表される。

$$\Delta \epsilon_k^i = \dot{\epsilon}_{k+\theta}^i \Delta t_k \quad (19)$$

さらに, テーラー展開を施すと, 粘塑性ひずみ速度は

$$\dot{\epsilon}_{k+\theta}^i = \dot{\epsilon}_k^i + \theta H_k \Delta \sigma_k \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (20)$$

で与えられる。ここで,

$$H_k = \left(\frac{\partial \dot{\epsilon}^i}{\partial \sigma} \right)_k = \langle \Lambda \rangle_k + \frac{\partial \langle \Lambda \rangle_k}{\partial \sigma} s_k \quad (21)$$

である。そして, 上式を式(19)に代入すると, 粘塑性ひずみ増分は次のように表される。

$$\Delta \epsilon_k^i = \dot{\epsilon}_k^i \Delta t + \theta \Delta t_k H_k \Delta \sigma_k \quad (22)$$

一方, 応力の増分は

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_k &= D \Delta \epsilon_k^e \\ &= D(\Delta \epsilon_k - \Delta \epsilon_k^i - \Delta \epsilon_k^m - \Delta \epsilon_k^T) \end{aligned} \quad (23)$$

で与えられるが、粘塑性ひずみ増分を式(23)に代入すると次式を得る。

$$\Delta \sigma_k = D(\Delta \varepsilon_k - \dot{\varepsilon}_k^p \Delta t_k - \theta \Delta t_k H_k \Delta \sigma_k - \Delta \varepsilon_k^m - \Delta \varepsilon_k^i)$$

以上の式をまとめると、次の結果が得られる。

$$\Delta \sigma_k = D^*(\Delta \varepsilon_k - \dot{\varepsilon}_k^p \Delta t_k - \Delta \varepsilon_k^m - \Delta \varepsilon_k^i) \quad (24)$$

ここで

$$D^* = (1 + D\theta \Delta t_k H_k)^{-1} D \quad (25)$$

である。以上の方法は接線係数法と呼ばれるが、本研究では安定な数値解を解くために、パラメータ θ を 1 とおいた。⁹⁾

3・2 有限要素法の定式化

熱伝導方程式(9)に対する有限要素法の離散化は前報で述べたので、ここでは省略することにする。遠心鑄造過程における応力解析の問題に対して、仮想仕事の原理の増分形は、

$$\int_V \Delta \sigma \Delta \varepsilon dV - \int_V \Delta f \Delta u dV - \int_{S_t} \Delta \bar{t} \Delta u dV = 0 \quad (26)$$

で表される。ここで、変位の増分は

$$\Delta u_k = u_{k+1} - u_k, \text{ for } \theta = 1 \quad (27)$$

である。一方、遠心力 $f = \rho r \omega^2$ の増分(回転角速度 ω は一定とする)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta f_k &= \Delta(\rho r_k \omega^2) \\ &= \Delta \rho r_k \omega^2 + \rho \Delta r_k \omega^2 \end{aligned} \quad (28)$$

3・1節で述べた応力増分およびひずみ増分、さらに式(28)を式(26)に代入すると、離散化した有限要素方程式は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} K \Delta u_k &= \Delta F_k \\ &= \Delta F_k^T + \Delta F_k^m + \Delta F_k^i + \Delta F_k^c \end{aligned} \quad (29)$$

ここで、剛性マトリックスを K 、熱膨張、変態膨張、非弾性および遠心力による荷重ベクトルをそれぞれ、 ΔF_k^T 、 ΔF_k^m 、 ΔF_k^i 、 ΔF_k^c と表すことにする。

4 遠心鑄造過程のモデル化および計算結果

本節では、これまでに導入した関係式を用いて行った遠心鑄造過程における温度場と応力場のシミュレーション結果について述べる。

4・1 遠心鑄造過程のモデル化

ここでは前報で与えられた2種類のモデルを設定し、解析することにする。

(a) 軸方向の長さが十分長い場合 [モデル1]

このモデルは軸方向の長さが半径に比べて十分長いもので、軸方向への熱の流れは無視することができる。つまり、温度分布や応力分布は軸方向に変化しないので、Fig. 1(a)に示すように、解析対象は軸方向にわたって一部の要素のみを考える。モデルの鑄造条件と温度の境界条件については、ほとんど前報と同じ

Fig. 1. Finite element division of models.

であるが、モールドと鑄造管の境界は次のような接触熱抵抗境界条件とする。

$$-k \text{ grad } T \cdot n = \frac{T_1 - T_2}{R} \quad (30)$$

ここで、 R は接触熱抵抗、 T_1 、 T_2 は接触面での鑄造管とモールドの温度である。応力の境界条件は、モールドおよび鑄造管の表面が拘束をうけない自由表面とした。また、実際の作業条件でも両端が機械的に拘束されているので、Fig. 1(a)のように平面ひずみの条件を設定した。

Fig. 2. Mechanical and thermo-physical properties of the material.

(b) 軸方向の長さが有限の場合 [モデル 2]

モデル 2 (Fig. 1(b)) は前報に示す通りであり, 軸方向に温度と応力の分布を有するものである. 応力の境界条件はモデル 1 と同様に, 鑄造管の半径を含む境界では軸方向の変位が拘束されるものとする. 鑄造管の内表面は自由であるが, 外表面, つまりモールドと鑄造管が接している境界は鑄造管がモールドによって半径方向の変位を拘束されていると考える.

4・2 材料定数

モデル 1 およびモデル 2 に対する凝固解析に用いる材料定数は前報に示したが, 応力解析で用いる材料定数のほとんどが温度の関数なので, 種々の温度における引張試験によって求める必要がある. モデル 1 の解析に使用したのは高クロム鋼であり, ヤング率 E および粘性係数 μ の温度依存性は Fig. 2 に示す通りである. また, ポアソン比 $\nu=0.35$, 変態膨張係数 $\beta=-7.5$ (%), 固相と液相の熱膨張係数はそれぞれ $\alpha_s=5.2857 \times 10^{-6}$ ($1/^{\circ}\text{C}$), $\alpha_l=33.0 \times 10^{-6}$ ($1/^{\circ}\text{C}$) とした. また, モールドの材料は炭素鋼 SNC815 である. その材料定数は文献¹⁰⁾を参照した.

モデル 2 の解析で用いた材料は 7075 アルミニウム合金であり, その材料定数は文献¹¹⁾のものを採用した.

4・3 解析結果

(a) 軸方向に十分に長いモデル 1 での, 前報の解析方法と今回の解析方法の相違点は, 今回の解析では, 新たに温度と応力の連成効果および接触熱抵抗境界条件を考慮したことであり, とくに接触熱抵抗の影響が大きいと認められる. Fig. 3 に示す温度の解析結果からわかるように, 解析の結果は計測した結果によく一致している. 凝固の段階では, 固液共存域でかなり大きい変形を生じるので, 応力仕事による発熱によって内表面の温度分布は非連成の結果と比べてあまり大きな違いがみられないが, 一方, 凝固終了から内・外表面では全域にわたって違いが表れている. また, 密度は, 混合則

Fig. 3. Temperature variation on inner and outer surfaces—Model 1.

Fig. 4. Density distribution—Model 1.

Fig. 5. Distribution of volume fraction of solid phase—Model 1.

Fig. 6. Stress distribution—Model 1.

$$\rho = \rho_s \xi_s + \rho_l (1 - \xi_s) \quad (31)$$

で与えられるが、この式で表される凝固領域の移動による密度分布の変化を Fig. 4 に示した。また、Fig. 5 は固相の体積分率の時間変化を表しており、密度の変化を表した図の概形にはほぼ対応している。

つぎに、応力解析の結果を示す。Fig. 6 (a)~(c) は、それぞれ半径方向応力 σ_r 、円周方向応力 σ_θ 、軸方向応力 σ_z の時間的変化を表したものである。半径 640 mm にある破線はモールドと鑄造管の接触境界を示すが、この境界で応力は不連続となり、Fig. 6 (a) の $t = 450$ s 以降では半径 550 mm 付近の凝固が進んでいる位置で応力が大きくなっている。また、Fig. 6 (c) において $t = 4650$ s と $t = 5610$ s を比較してみると、時間間隔が長いにもかかわらず応力分布はほとんど変化が見られないので、これを残留応力とみなしてもよいと思われる。これによると、先に挙げた半径 550 mm 付近以外にもモールドの両端で最大の残留応力が発生していることがわかる。

(b) 軸方向の長さが有限のモデル 2 における、温度

Fig. 7. Temperature distribution—Model 2.

と応力の連成効果を考慮した凝固解析の結果は、ほぼ前報と同じであるが、その温度分布を Fig. 7 に、固相の体積分率の分布を Fig. 8 および密度の分布を Fig. 9 に示す。これらの図によると、外表面に近づくほど温度が下がって行くが、モールドの中央面からの距離が 300 mm 以上の範囲ではそれ以外の範囲と比較して温度降下のこう配が大きくなっている。これは鑄造管の端面の外側（コーナー）に近づくにつれて、両方の境界の影響を大きく受けるようになるためである。以下ではこれをコーナー効果と呼ぶことにする。

つぎに、Fig. 8 は固相の体積分率の分布の時間的な変化を表している。この固相の体積分率は温度分布とほぼ対応していて、温度分布と同じようにコーナーに近づくにつれてより短い時間で完全に凝固しており、固相の体積分率でもコーナー効果が現れている。また、固相の密度を $2.6 \times 10^{-3} \text{ g/mm}^3$ 、液相の密度を $2.8 \times 10^{-3} \text{ g/mm}^3$ として密度分布の時間的変化を表したものが Fig. 9 である。この図においても、Fig. 7 の温

Fig. 8. Density distribution—Model 2.

Fig. 9. Volume fraction of solid phase—Model 2.

度分布, Fig. 8の体積分率の分布の図と同じようにコーナー効果が現れていて, コーナーに近づくにつれてより短い時間で固相の体積分率 $2.6 \times 10^{-3} \text{ g/mm}^3$ になっていることが確認された。

つぎに, モデル2の応力解析について述べる。Fig. 10は castingを始めてからあまり時間がたっていない状態での相当応力の分布を示している。初期の応力は非常に小さいが, casting管の外表面付近とモールドの底からの距離が300 mm以上の範囲では, 他の領域と比較して大きな応力が現れている。これは温度分布と同じようにコーナー効果によるものと思われる。Fig. 11は $t=8.0 \text{ s}$ の時の応力分布 σ_r , σ_θ , σ_z を表したものであるが, $t=8.0 \text{ s}$ では温度が 100°C 以下に下がっているため, これを残留応力の分布とみなす。 σ_θ と σ_z の分布はよく似たものになり, σ_r は2つの応力と違った分布になった。これは, 半径方向に負荷される遠心力の影響である。

Fig. 10. Equivalent stress—Model 2.

Fig. 11. Residual stresses—Model 2.

5 結 論

本研究では遠心鑄造における凝固過程の熱-力学的挙動を明らかにするために、まず、固相の体積分率を内部変数にとることによって、相変態とともに温度場と応力場の連成を考慮した基礎式を提示した。そして、この基礎式を有限要素法を用いて定式化し、遠心鑄造過程のシミュレーションを行った。

解析では、2種類のモデルを設定し、それらのモデルについて、遠心鑄造過程の温度、組織、密度、応力の分布を明らかにした。軸方向の長さを十分に長く設定したモデル1の解析によると、鑄造過程において大きな応力が発生するのは、凝固が進行している所やモールドの外表面と内表面付近であることがわかった。また、軸方向の長さを有限に設定したモデル2の解析によると、鑄造管の端面の外側付近では、他の部分に比べて凝固が速く進行し、残留応力も大きくなることが示された。

参 考 文 献

1) R. L. Dobson, "Metals Handbook (9th ed.)", Vol. 15,

300 (1988) ASM International

- 2) 巨 東英, 大鹿容祐, 井上達雄, 材料, **40**, 144 (1991).
- 3) R. M. Bowen, Continuum Physics, Vol. 3, 1 (1977) Academic Press
- 4) 長岐 滋 井上達雄, 日本機械学会論文集, A-44, 3705 (1978).
- 5) 井上達雄, 日本機械学会論文集, A-50, 285 (1984).
- 6) P. Perzyna, Advances of Applied Mechanics, **11**, 313 (1971).
- 7) 王 志剛, 井上達雄, 日本機械学会論文集, A-50, 1990 (1984).
- 8) D. Peirce, D. F. Shih and A. Needleman, Int. J. of Computer and Struct., **18**, 875 (1984).
- 9) O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method (1977) Mc Graw-Hill
- 10) T. Inoue, T. Yamaguchi and Z. G. Wang, Mater. Sci. Technol., **1**, 872 (1985).
- 11) 巨 東英, 井上達雄, 吉原直武, 日本機械学会論文集, A-55, 1236 (1989).