異材接合界面の特異応力場に対するすべり変形効果[†]

村 田 雅 人* 向 井 喜 彦* 平 松 秀 基**

Analytical Study of the Effect of Interfacial Slip on Stress Singularity on Interface of Bonded Material

by

Masato MURATA*, Yoshihiko MUKAI* and Hideki HIRAMATSU**

The effects of plastic deformation and interfacial slip on stress singularity near an interfacial crack and the end of bonded joint were studied by FEM with bond elements which had a feature of stress field on an interfacial plane. The results obtained are as follows: The solutions obtained by FEM coincided with the analytical ones using an image stress function proposed by other investigators. In the case that plastic deformation was induced near the interfacial crack tip, the singularity term decreased with work hardening coefficients. In addition, when a slip deformation occurred at the bonded interface, the analytical solutions by FEM approached to those of a homogeneous body. On the other hand, the stress singularity field near the end of bonded material disappeared by slip deformation.

Key words: Bond element, FEM, Interfacial slip, Interfacial crack, Stress singularity

1 緒 言

異材接合体の接合界面にき裂が存在する場合の特異応力場については従来より多くの研究者により種々の解析法により検討がなされてきた。例えば、単純な境界条件を有する問題については複素固有関数展開法による解析解の導出¹⁾、境界条件が複雑なものに対しては有限要素法 (FEM)、境界要素法 (BEM) などの数値解析の方法が多数報告されている。さて、残留応力や熱応力などの実用的な諸問題ならびに多数の材料的不均質を含む複雑な系や異方体、さらには塑性体等多数の問題に対しては FEM が有効である²⁾。しかし、異材接合体を単に連続体として FEM 解析を行う場合、界面上の応力が垂直応力 σ_y 、せん断応力 τ_{xy} によって特徴づけられるため、界面に隣接した要素から界面応力を推定するか、あるいは節点力を剛性方程式から求めることにより界面上応力を定義する必要がある。しかし、これらは便法的であり解の精度の点で問題がある。

そこで異材接合体を一種の接触問題と考える。接触問題は力の伝達を面上の摩擦によるものと界面に特殊な構成方程式を有する接合要素を仮設するものの二種類に大別されるが、後者の構成方程式は界面上の応力分布を表現するのに適切な形をしている。しかも、接合要素の性質上、高温状態で生じられると思われる界面す

べりなど非線形性を伴う不連続な現象や界面の極薄多層構造に対しても適用の可能性がある。

本研究では、異材接合界面の応力状態の解析に対して接合要素を用いた有限要素法の適用を試み、界面上の応力分布、応力の特異性に対する塑性変形の効果ならびに界面すべりの影響について検討した。また、異材接合界面端部における特異応力場に対する同様の効果について検討を試みた。

2 応力解析法

本研究では一般要素として三角形 1 次要素⁸⁾、接合要素として三角形 1 次のアイソパラメトリック要素^{6), 7)}を用いた。一般要素、接合要素ともにひずみの適合条件を満たし、仮想仕事の原理より導かれた剛性方程式、並びに全体剛性マトリックスの構築になら問題が生じない。また、応力解析としてはひずみ増分理論を用いた。本解析に用いた接合要素の概略を次に示す。

本解析に用いたのは三角形接合要素である。まず、写像として Fig. 1 に示すように、 t , n を三角形の親要素に対する正規化パラメータ座標、 h を実要素の厚さ、 ℓ を要素の不連続面に沿う長さとする。変位増分は全体座標系 x , y で $\dot{u}_x$, $\dot{u}_y$ であり、それらを代表して $\dot{u}_o$ と表す。また、局所座標系 x' , y' における変位増分は界面に対するせん断変位増分として $\dot{u}_t$ 、垂直変位増分として $\dot{u}_n$ とし、それらを代表して $\dot{u}_i$ と

[†] 原稿受理 平成 3 年 8 月 19 日 Received Aug. 19, 1991

* 正 会 員 大阪大学工学部生産加工学科 〒565 吹田市山田丘, Dept. of Welding & Production, Osaka Univ., Yamadaoka, Suita, 565

** 大阪大学大学院 〒565 吹田市山田丘, Graduate Student, Osaka Univ., Yamadaoka, Suita, 565

Fig. 1. A shape of bond element and its mapping.

する。本解析で用いた三角形接合要素の変形特性を次に示す。

局所座標系 x' , y' における変位関数を $x' = f_1(L_1, L_2, L_3)$, $y' = f_2(L_1, L_2, L_3)$ と表すと、写像則として一般化変位増分 $\dot{u}$ について次式が成り立つ。

$$\begin{Bmatrix} \partial \dot{u} / \partial L_2 - \partial \dot{u} / \partial L_1 \\ \partial \dot{u} / \partial L_3 - \partial \dot{u} / \partial L_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial x' / \partial L_2 - \partial x' / \partial L_1 & \partial y' / \partial L_2 - \partial y' / \partial L_1 \\ \partial x' / \partial L_3 - \partial x' / \partial L_1 & \partial y' / \partial L_3 - \partial y' / \partial L_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \dot{u} / \partial x' \\ \partial \dot{u} / \partial y' \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \partial \dot{u} / \partial x' \\ \partial \dot{u} / \partial y' \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$[J]$ は Jacobi のマトリックスで、全体座標系でも同様の式が成立するが、このとき $[J]$ は次のように表せる。

$$[J] = \begin{Bmatrix} \ell & 0 \\ \ell' & h \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ただし、

$$\ell = \sqrt{(\partial x / \partial L_2 - \partial x / \partial L_1)^2 + (\partial y / \partial L_2 - \partial y / \partial L_1)^2}$$

$$\ell' = \sqrt{(\partial x / \partial L_3 - \partial x / \partial L_1)^2 + (\partial y / \partial L_3 - \partial y / \partial L_1)^2}$$

ここで、要素内変位増分 $\dot{u}_L$ は変位関数 N_i ($i=1, 2, \dots, m$; m は節点数⁸⁾) と節点変位 $\dot{u}_{Li}$ により次式で表せる。

$$\dot{u}_L = \sum_{i=1}^m N_i(L_1, L_2, L_3) \dot{u}_{Li} \quad (3)$$

よって式 (1) と式 (3) より

$$\begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_t / \partial y' \\ \partial \dot{u}_n / \partial y' \end{Bmatrix} = \frac{1}{h\ell} \begin{Bmatrix} h & 0 \\ -\ell' & \ell \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial N_1 / \partial L_2 - \partial N_1 / \partial L_1 & \partial N_2 / \partial L_2 - \partial N_2 / \partial L_1 \\ \partial N_1 / \partial L_3 - \partial N_1 / \partial L_1 & \partial N_2 / \partial L_3 - \partial N_2 / \partial L_1 \\ \dots & \partial N_m / \partial L_2 - \partial N_m / \partial L_1 \\ \dots & \partial N_m / \partial L_3 - \partial N_m / \partial L_1 \end{Bmatrix} \dot{u}_L \quad (4)$$

接合要素における y' 方向での両部材の相対変位のみ注目するので

$$\begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_t / \partial y' \\ \partial \dot{u}_n / \partial y' \end{Bmatrix} = \frac{1}{h\ell} \begin{Bmatrix} -\ell' & 0 & \ell & 0 \\ 0 & -\ell' & 0 & \ell \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial N_1 / \partial L_2 - \partial N_1 / \partial L_1 & 0 & \dots \\ 0 & \partial N_1 / \partial L_2 - \partial N_1 / \partial L_1 & \dots \\ \partial N_1 / \partial L_3 - \partial N_1 / \partial L_1 & 0 & \dots \\ 0 & \partial N_1 / \partial L_3 - \partial N_1 / \partial L_1 & \dots \\ \partial N_m / \partial L_2 - \partial N_m / \partial L_1 & 0 \\ 0 & \partial N_m / \partial L_2 - \partial N_m / \partial L_1 \\ \partial N_m / \partial L_3 - \partial N_m / \partial L_1 & 0 \\ 0 & \partial N_m / \partial L_3 - \partial N_m / \partial L_1 \end{Bmatrix} \dot{u}_L = [B_L] \dot{u}_L \quad (5)$$

ただし、 $[B_L]$ はひずみ変位マトリックス

また同様に、要素の構成方程式は界面における相対変位のみを考え、その相対変位と応力の関係を次式のように表す。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{nt} \\ \dot{\sigma}_{nm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_s & 0 \\ 0 & G_E \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_t / \partial y' \\ \partial \dot{u}_n / \partial y' \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \partial \dot{u}_t / \partial y' \\ \partial \dot{u}_n / \partial y' \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここで、 G_s は定数として与えているので、界面すべりにおける残留ひずみ等の非線形性は再現できない。式 (5) と式 (6) から局所座標系における要素剛性マトリックスは次式で表せる。

$$[K'] = \ell \int_s [B_L]^T [D] [B_L] h t dL_2 L_3 \quad (7)$$

(s : 要素の面積, t : 板厚)

これを全体座標系に変換し、通常の要素と同様の剛性方程式を用いて計算を行なう。このように接合要素は、相対変位のみが関係する構成方程式を使っているため、界面方向の剛性は存在しない。つまり接合要素を用いることにより、界面に平行方向に変形が生じていても σ_x は生じないという特殊な界面状態を再現できる。

3 界面上の特異応力場解析

3.1 き裂問題に対する界面すべりの効果

本研究においては、前項の特性を有する三角形接合要素を用い、平板中央部にき裂を挿入した試験体に引張応力を加えたときの挙動を解析するものとした。

FEM 解析要素分割図を Fig. 2 に示す。ここでは、実際の試験体の 1/2 モデルを用い、接合要素の厚さは解の収束性の観点から 0.001 mm とした。また、応力状態は平面応力場を仮定した。

Fig. 2. FEM mesh (CCT type).

まず、複素応力関数により求められた弾性理論解と、FEM 解析結果と比較した。以下に、弾性理論解を示す。ここでは、理論解として無限板における解析結果を用いた。異材接合界面き裂問題では一般に単純引張りを行った場合でもき裂先端部では混合モードとなり、各応力拡大係数は次式で表せる¹⁾。

$$K_I = \frac{\sqrt{\pi a}}{\cosh \pi a} [\sigma_y^\infty \cos(\alpha \ln 2a) + 2a \sin(\alpha \ln 2a) + \tau_{xy}^\infty \sin(\alpha \ln 2a) - 2a \cos(\alpha \ln 2a)]$$

$$K_{II} = \frac{\sqrt{\pi a}}{\cosh \pi a} [\tau_{xy}^\infty \cos(\alpha \ln 2a) + 2a \sin(\alpha \ln 2a) + \sigma_y^\infty \sin(\alpha \ln 2a) - 2a \cos(\alpha \ln 2a)] \quad (8)$$

一様応力 σ_y^∞ のみが働く場合の σ_y と τ_{xy} について、き裂先端の応力を求めると

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_y^\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \frac{K_I}{\sigma_y^\infty} \left\{ \cos\left(\alpha \ln \frac{r}{2a}\right) \right\} - \frac{K_{II}}{\sigma_y^\infty} \left\{ \sin\left(\alpha \ln \frac{r}{2a}\right) \right\} \right\}$$

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_y^\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \frac{K_I}{\sigma_y^\infty} \left\{ \sin\left(\alpha \ln \frac{r}{2a}\right) \right\} + \frac{K_{II}}{\sigma_y^\infty} \left\{ \cos\left(\alpha \ln \frac{r}{2a}\right) \right\} \right\} \quad (9)$$

Fig. 3. Stress distribution in bond elements in elastic analysis.

となる。ただし

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \left(\frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} \right) / \left(\frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right) \right\} \quad (10)$$

($\kappa_1, \kappa_2, \mu_1, \mu_2$ は材料によって決まる定数)

である。この式によりき裂先端からの距離 r と $\sigma_y / \sigma_y^\infty, \tau_{xy} / \sigma_y^\infty$ の関係を求め理論解とした。

まず、弾性解析における応力分布を Fig. 3 に示す。各応力は無限遠での一様応力 σ_y^∞ で基準化した。ここで、 $\sigma_y / \sigma_y^\infty$ については、 $G_s = 30590 \text{ MPa}$ と $G_s = 10 \text{ MPa}$ 、 $\tau_{xy} / \sigma_y^\infty$ については 4 種類の G_s について計算を行なった。また、Fig. 3(a) および (b) 中の太い実線は理論解である。これより、接合要素のせん断剛性が $G_s = 30590 \text{ MPa}$ のとき、 σ_y は理論解と解析解でかなり良く一致した。また、接合要素のせん断剛性、 G_s による変化は、 σ_y についてはほとんど見られないのに対し、 τ_{xy} については G_s の低下とともにその値が低下し、き裂先端における発散特性も小さくなった。この原因は次のように考えることができる。

まず、本解析例のような異材接合体ではなく均質体の場合を考える。今、中央き裂が存在し、 y 方向 (き

Fig. 4. Stress distribution in bond elements in elasto-plastic analysis.

裂と垂直方向)に上下から引張荷重がかかったとき, き裂先端近傍は応力の特異場となり σ_y が発散特性を示す. また, ここではき裂の上下面において材料が同じであり, x 方向(き裂と平行方向)の変形様式が等しいため, せん断応力 τ_{xy} は存在しない. しかし, 異材接合体の場合は, 接合界面上における上下の材料のヤング率およびポアソン比が違い, 接合界面の上下で変形様式が異なるため, τ_{xy} が生まれる. しかも, き裂が存在するとき, その先端では τ_{xy} は特異性を示すこととなる. ここで, 接合界面に挿入した接合要素のせん断剛性, G_s を低下させると, 接合界面の上下においてお互いの拘束力が小さくなり, τ_{xy} の値は当然小さくなる. また, き裂の先端近傍では, 接合部(結合している部分)とき裂部(結合していない部分)とで上下の材料の拘束力に差があったものが, G_s の低下とともにその差がなくなるので τ_{xy} の特異性は消滅する方向へと向かうと考えられる. つぎに, 大きな負荷を受けたときの金属側の塑性変形を考え, 弾塑性解析を行なった. ここでは, G_s の変化に加え金属側のひずみ硬化係数 H も3段階に変化させた. Fig. 4 (a), (b), (c), (d), (e), (f)に $H=0, 10000, 30000$ (MPa) の場合の σ_y および τ_{xy} を示す. σ_y , τ_{xy} ともに弾性解と

傾向はほぼ同じであったが, ひずみ硬化係数が増大するにつれ弾性解に近づいた.

また, Fig. 4 の弾塑性解析結果から図中の τ_{xy} に関する直線の傾き m を求め $[-m]$ とせん断剛性 $[G_s]$ の関係を Fig. 5 に示す. 図中, $[G_s]=10$ MPa のデータ

Fig. 5. Relation between singular parameter- m and shear stiffness.

Fig. 6. Relation between singular parameter- m and strain hardening coefficient.

Fig. 7. FEM mesh (Smooth plate).

Fig. 8. Stress distribution in bond elements in FEM analysis.

については傾きが若干負となり現実的ではないが、これらの傾きはき裂先端部から 0.5 mm の範囲のデータを最小二乗法により求めたためである。また、 $[-m]$ と金属のひずみ硬化係数⁸⁾ $[H]$ との関係を Fig. 6 に示

Fig. 9. Relation between singular parameter-m and shear stiffness.

す。これより、 H がいかなる値であろうと G_s が小さいほど $[-m]$ は小さくなり、界面のせん断剛性がなくなればせん断応力の特異性は消滅する。一方、弾完全塑性体のような場合でも界面におけるせん断剛性が高いとせん断応力の特異性を生じている。したがって、界面におけるせん断応力の特異性の低減には G_s または H を小さくするのが有効であるが、 G_s と H の効果を比較すると、界面すべりを生じることにより効果的に特異場を緩和できることが明らかになった。

3・2 端部における特異応力場とすべりの関係

異材接合体においては接合境界端部において特異応力場を生じる。ここでは、接合境界端部における特異性にたいする界面すべりの影響について検討を行った。

試験片の接合界面端部特異性について解析したモデルを Fig. 7 に示す。また、その結果を、Fig. 8 に示す。同図 (a), (b) は端部における接合界面上の σ_y 分布であり、(c), (d) は τ_{xy} 分布である。各応力は無限遠の応力 σ_y^∞ で基準化した。また、 σ_y/σ_y^∞ については、 $G_s = 30590$ MPa と $G_s = 10$ MPa、 $\tau_{xy}/\sigma_y^\infty$ については $G_s = 30590$ MPa、 $G_s = 3000$ MPa および $G_s = 10$ MPa について計算を行なった。また、図中の直線の傾き m を求め $[-m]$ とせん断剛性 $[G_s]$ の関係を Fig. 9 に示す。端部の場合、き裂問題と違って G_s の低下とともに $\tau_{xy}/\sigma_y^\infty$ だけでなく σ_y/σ_y^∞ の発散特性も消滅する傾向となっており、接合界面のすべりによってせん断応力や引張方向の応力による破壊が起こりにくくなることが明らかとなった。

4 結 言

セラミック-金属接合材について、接合界面上で変位や応力に不連続の存在する可能性を考え、不連続面に接合要素を挿入する方法により応力解析を行なった。得られた結果を次に示す。

(1) 界面におけるすべりを生じない状態での接合要素における応力状態は複素応力関数を用いた界面応力

の解と良好に一致し, その実用性が明らかになった.

(2) 金属側において塑性変形を生じた場合でも界面き裂における応力特異性は減少するが消滅しない.

(3) 接合要素を用いた有限要素法解析により, 接合界面中央部にき裂をもつ異材接合体は, 接合界面上のすべりによって, き裂先端での τ_{xy} の特異性指数が減少し, せん断応力による破壊が起こりにくくなることが明らかとなった. ただし, σ_y の特異性は界面すべりに関係なく生じた.

(4) 接合界面端部における特異性は, 界面すべりによって σ_y , τ_{xy} ともに消滅した.

参 考 文 献

- 1) C. T. Sun and C. T. Jin, Engineering Fracture Mechanics, **28**, 13 (1987).
- 2) 向井喜彦, 村田雅人, 大沢健二, 山本柁道, 材料, **38**, 26 (1989).
- 3) 薦 紀夫, 山地成一, 日本機械学会誌, **76**, 40 (1973).
- 4) H. Schafer, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **6**, 335 (1975).
- 5) 丸井英男, 日本鋼構造協会第11回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集, 昭和52年6月, p. 253 (1977).
- 6) 江澤良孝, 学位論文, 昭和53年12月 (1978).
- 7) Y. Yamada, Y. Ezawa and I. Nishiguchi, Trans. Int. Conf. Struct. Mech. React. Tech. 5th, p. 1 (1979).
- 8) 山田嘉昭, “塑性・粘弾性” (1972) 培風館
- 9) 山田嘉昭, 江澤良孝, 生産研究, **6**, 519 (1979).

1) C. T. Sun and C. T. Jin, Engineering Fracture Mecha-