繊維破断の動的挙動を考慮した一方向 FRM の 引張強度シミュレーション†

合 田 公 一* 北 原 耕 一** 福 永 秀 春*

Monte-Carlo Simulation of the Tensile Strength in a Unidirectional Fiber Reinforced Metal Matrix Composite Including the Effect of Dynamic Behavior Caused by Fiber Breaks

by

Koichi GODA*, Koichi KITAHARA** and Hideharu FUKUNAGA*

A Monte-carlo simulation technique was applied to investigate how the dynamic behavior caused by fiber-breaks affects the tensile failure process and the tensile strength of unidirectional fiber reinforced metals. A shear-lag model was used as the stress analysis method, and the solution for the equation of motion was obtained by the semi-discrete analysis. Such an analysis technique was taken into the simulation procedure, based on the $\tau_{\min}$ method as proposed in the previous report. Conditions of uniaxial tension in a mono-layer of boron-aluminum composite were simulated fifty times and compared with the case in which the fibers break statically. The results showed that many of the simulated failure processes are quite the same as in the case of the static fiber-breaks, but some of the failure processes indicate the more noncumulative mode. Also, the average of the simulated tensile strengths did not change appreciably and the coefficient of variation increased slightly, in comparison with the case of the static fiber-breaks.

Key words: Fiber reinforced metals, Monte-Carlo simulation, Shear-lag model, Tensile strength, Semi-discrete analysis, Dynamic behavior, Weibull distribution

1 緒 言

著者らは前報¹⁾で、シアラグ理論²⁾に基づいた一方向 FRM (Fiber Reinforced Metals) の引張破壊過程を表わすモンテカルロ・シミュレーション手法を提示し、FRM の強度信頼性を評価する上で、強化繊維のワイブル分布特性と FRM 強度のばらつきがどのような関係にあるかを検討した。また、予測されたシミュレーションデータが、確率分布曲線を理論的に与える再帰法^{3)*1}の程度適合するかについても調査を試みた。後者の結果は再帰法に対し過大評価されたが、そこではそれが繊維配列や繊維間隔の不確定な性質ならびに繊維破断の動的効果を無視したことに起因すると考えた。ところで繊維破断の動的効果に関しては、シアラグ理論に基づき、マトリックスが弾性変形する範囲内で Hedgepeth⁴⁾によって初めて示された。また、Sakharova⁴⁾らはマトリックスが塑性変形する場合に対し、同様な理論による解析を試みているが、どちらの報告も

複合材の引張破壊過程や強度への影響を解明したものではない。一方、金原らはシアラグ理論の差分解法⁵⁾に基づいたモンテカルロ・シミュレーションを行い、一方向 FRP の引張破壊過程と引張強度へ及ぼす破断繊維の動的効果を明らかにした。それによると、動的効果により引張強度の平均値はさほど変化しないが、ばらつきは大きくなることが示されている。しかしながら、この手法は FRP を対象にマトリックスの変形の扱いを弾性範囲内に留めているので、FRM においても同様な性質が得られるかどうかは判断できない。

そこで、本研究は一方向 FRM の引張強度とばらつきに及ぼす繊維破断の動的効果について解明することを目的とする。応力解析手法にはシアラグ理論を用い、

*1 繊維強度の確率分布特性、破断繊維まわりの応力集中係数および無効長さ³⁾から、一方向強化複合材料の引張強度の確率分布曲線を推定する一手法。繊維強度の確率分布関数には、一般に2母数ワイブル分布が選ばれることが多い。また、無効長さとは、破断点からの耐荷未回復長さの2倍を意味する。

† 本報を「モンテカルロ・シミュレーションを用いた一方向 FRM の引張強度の評価 (第2報)」(Evaluation of Tensile Strength in Unidirectional Fiber Reinforced Metal Matrix Composite Materials using Monte-Carlo Simulation, II) とする。また、前報は材料40巻450号296頁 (1991年) に掲載済みである。

原稿受理 平成3年7月8日 Received July 8, 1991

* 正 会 員 広島大学工学部第一類 〒724 東広島市鏡山, Dept. of Mech. Eng., Hiroshima Univ., Kagamiyama, Higashihiroshima, 724

** 日立金属(株)九州工場 〒800-03 福岡県京都郡苅田町長浜町, Kyushu Works, Hitachi Metals, Co. Ltd., Miyako-gun, Fukuoka, 800-03

その系の運動方程式において位置座標のみを差分化した、いわゆる半離散化法⁸⁾によって方程式の解が導けることを示すとともに、 $r_{\min}$ 法¹⁾に基づいたモンテカルロ・シミュレーション手法にこの解法を取入れた。そして、一方向 FRM に連続ボロン繊維強化アルミニウム複合材料を想定し、シミュレーション結果を繊維が静的に破断する前報の手法によるものと比較検討したので報告する。

2 解析方法

2・1 シアラグ理論と半離散化法に基づく動的解析手法の定式化

解析に用いるモデルとして、 x 軸上に配列された N 本の繊維から成る単層板を想定する。このとき、シアラグ理論に基づく運動方程式は、文献 2) を参考にし、て次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} EA \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + h\tau_1 &= m \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ EA \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - h\tau_1 + h\tau_2 &= m \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ &\vdots \\ EA \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} - h\tau_{N-1} &= m \frac{\partial^2 u_N}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $u_1, \dots, u_N$: 繊維軸方向の変位、 E : 繊維の弾性率、 A : 繊維の弾面積、 h : 板厚、 m : 単位長さ当たりの繊維の質量、 t : 時間変数、 τ_i ($i=1, \dots, N-1$): i 番めおよび $(i+1)$ 番めの繊維間に働くマトリックスのせん断応力を表す。式 (1) の連立偏微分方程式を解くために、本研究では位置変数のみを離散化した半離散化法を用いる。まず、前報で示した差分の格子点間を 1 要素とみなした要素配列モデルを考える。このとき、繊維の質量は節点に集中するものとする。いま、節点 (i, j) における変位成分を $u_{i,j}$ と記すと、式 (1) 中の 2 階偏導関数は次式のような差分形に近似できる。

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \frac{4[o_{i,j}(u_{i,j-1} - u_{i,j}) + o_{i,j+1}(u_{i,j+1} - u_{i,j})]}{(2 + o_{i,j} + o_{i,j+1})(\Delta x)^2} \quad (2)$$

ここで、 Δx : 差分の格子点間隔、すなわち繊維要素長さである。 $o_{i,j}$: 繊維要素 $F(i, j)$ が破断しているかどうかによって決まる定数で、 $o_{i,j} = H\{X_{i,j}, \sigma_{i,j}\}$ である ($H\{\cdot\}$: ヘビサイドの階段関数、 $X_{i,j}$: 繊維要素 $F(i, j)$ の引張強度を示し、動的効果の有無にかかわらず、ここでは一定値とする。 $\sigma_{i,j}$: 繊維要素 $F(i, j)$ に作用する応力で、 $\sigma_{i,j} = E(u_{i,j} - u_{i,j-1})/\Delta x$ で与えられる)。一方、マトリックスを移動硬化則に従った弾線形硬化塑性体と仮定すると、マトリックス要素に働くせん断応力は、次式のように記述される。

$$\begin{aligned} \tau_{i,j} &= [1 - p_{i,j}(1 - \beta)]G \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{d} \\ &\quad + (1 - p_{i,j})\tau_{a,i,j} + p_{i,j}(1 - \beta)\tau_y \cdot \text{sgn}(u_{i+1,j} - u_{i,j})]q_{i,j} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 G : マトリックスのせん断弾性係数、 β : 加工硬化係数を G で除した値、 d : 繊維間隔、 τ_y : 初期降伏応力、 τ_a : みかけの応力増分である。 $\text{sgn}(\cdot)$ は $(\cdot)$ 内が正のとき 1、負のとき -1、0 のとき 0 を与える。また、マトリックス要素 $M(i, j)$ が弾性変形状態のとき、 $p_{i,j}=0$ および $q_{i,j}=1$ 、塑性変形状態のとき、 $p_{i,j}=1$ および $q_{i,j}=1$ 、破断状態のとき、 $q_{i,j}=0$ をそれぞれ与える。なお、マトリックスの変形抵抗に対するひずみ速度依存性はここでは考えない。 $o_{i,j}$ 、 $p_{i,j}$ および $q_{i,j}$ に依存して繊維およびマトリックス要素の変形・破断状態が記述されるので、これらを状態定数と呼ぶ。式 (2)(3) を式 (1) に代入することによって、位置変数のみを離散化した半離散化方程式が節点変位 $u_{i,j}$ に対して次のように得られる。

$$\begin{aligned} C_{1(i,j)}u_{i,j-1} + C_{2(i,j)}u_{i-1,j} + C_{3(i,j)}u_{i+1,j} \\ + C_{4(i,j)}u_{i,j+1} - \sum_{m=1}^4 C_{m(i,j)}u_{i,j} + C_{(i,j)} = \ddot{u}_{i,j} \\ \left(\ddot{u}_{i,j} = \frac{d^2 u_{i,j}}{dt^2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、

$$\begin{aligned} C_{1(i,j)} &= 4EAo_{i,j}/m(\Delta x)^2(2 + o_{i,j} + o_{i,j+1}) \\ C_{2(i,j)} &= hG[1 - p_{i-1,j}(1 - \beta)]/md \\ C_{3(i,j)} &= hG[1 - p_{i,j}(1 - \beta)]/md \\ C_{4(i,j)} &= 4EAo_{i,j+1}/m(\Delta x)^2(2 + o_{i,j} + o_{i,j+1}) \\ C_{(i,j)} &= -h\{(1 - p_{i-1,j})\tau_{a,i-1,j} + p_{i-1,j}(1 - \beta)\tau_y \\ &\quad \cdot \text{sgn}(u_{i,j} - u_{i-1,j})\} + h\{(1 - p_{i,j})\tau_{a,i,j} \\ &\quad + p_{i,j}(1 - \beta)\tau_y \cdot \text{sgn}(u_{i+1,j} - u_{i,j})\} \end{aligned}$$

である。境界条件としては、

$$u_{1,0} = 0 \text{ および } u_{i,K} = U + Vt \quad (i=1, \dots, N) \quad (5)$$

を考える。ここで、 U : 強制変位、 V : 引張速度である。各要素の変形状態に応じた状態定数を与えることにより、式 (4) は、 $N \times (K-1)$ 個の未知変位成分から成る連立常微分方程式となる。これを行列表示すると、

$$\{\ddot{u}\} = -[P]\{u\} + \{C\} \quad (6)$$

である。ただし、

$$\begin{aligned} [P] &= \begin{bmatrix} \sum C_{m(1,1)} - C_{3(1,1)} & 0 & \dots & 0 & -C_{4(1,1)} & 0 \\ -C_{2(2,1)} \sum C_{m(2,1)} - C_{3(2,1)} & 0 & \dots & 0 & -C_{4(2,1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -C_{1(i,j)} & 0 & \dots & 0 & -C_{2(i,j)} \sum C_{m(i,j)} - C_{3(i,j)} & 0 & \dots & 0 & -C_{4(i,j)} \\ 0 & & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & -C_{1(N,K-1)} & 0 & \dots & 0 & -C_{2(N,K-1)} \sum C_{m(N,K-1)} \end{bmatrix} \\ \{\ddot{u}\}^T &= [\ddot{u}_{1,1} \ \ddot{u}_{2,1} \ \dots \ \ddot{u}_{N,K-1}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{u\}^T &= \{u_{1,1}, u_{2,1}, \dots, u_{N,K-1}\} \\ \{C\}^T &= \{C_{(1,1)}, C_{(2,1)}, \dots, C_{(N,K-2)}, C_{(1,K-1)} + c_{4(1,K-1)} \\ &\quad \cdot (U+Vt) \dots C_{(N,K-1)} + c_{4(N,K-1)} \cdot (U+Vt)\} \end{aligned}$$

である。本研究では、次の正則変換式を用いて式(6)の解が導けることを示す。

$$\{u\} = [Q]\{v\} \quad (7)$$

ここで、行列 $[Q]$ は定数の正則行列とする。

$$\begin{aligned} \{\dot{u}\} &= [Q]\{\dot{v}\} \text{ なので、式(6)は} \\ \{\dot{v}\} + [Q]^{-1}[P][Q]\{v\} &= [Q]^{-1}\{C\} \end{aligned} \quad (8)$$

となる。行列 $[P]$ の特性方程式から固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_{N(K-1)}$ および対応する正規固有ベクトル $\{q_1\}, \dots, \{q_{N(K-1)}\}$ を求めることによって次式が成立する。

$$[Q]^{-1}[P][Q] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{N(K-1)} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (9)$$

すなわち、行列 $[Q]$ はベクトル $\{q_1\}, \dots, \{q_{N(K-1)}\}$ を列成分とする正則行列である。これから、式(8)はそれぞれ連立しない独立した微分方程式となり、 $\{v\}$ に関する解を求めることができる。これを式(7)に代入し節点変位に関する次の一般解を得る。

$$\begin{aligned} \{u\} &= \sum_{j=1}^{N(K-1)} \{q_j\} (B_{2j-1} \cos \sqrt{\lambda_j} t \\ &\quad + B_{2j} \sin \sqrt{\lambda_j} t) + [P]^{-1}\{C\} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 B_{2j-1} および B_{2j} ($j=1, \dots, N(K-1)$) は未知定数である。さらに、速度は

$$\begin{aligned} \{\dot{u}\} &= \sum_{j=1}^{N(K-1)} \{q_j\} \sqrt{\lambda_j} (-B_{2j-1} \sin \sqrt{\lambda_j} t \\ &\quad + B_{2j} \cos \sqrt{\lambda_j} t) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。本シミュレーションは、後述するように、静的解析手法と動的解析手法を組合せているため、上式の未知定数に対する初期条件として次の2つの場合を考えた。まず、静的解析の途中に時刻 t_b で繊維破断が生じた場合は、静的解析手法の開始時刻あるいは静的解析途中に繊維破断を除く状態変化が生じた時刻 t_s での変位成分および強制変位をそれぞれ $\{u(t_s)\}$ および $U(t_s)$ 、繊維破断が生じる直前の変位成分および強制変位をそれぞれ $\{u(t_b)\}$ および $U(t_b)$ とし、その間各節点が等速度運動したとして、

$$\begin{aligned} u(0) &= \{u(t_b)\} \\ \dot{u}(0) &= \frac{V \cdot \{u(t_b) - u(t_s)\}}{U(t_b) - U(t_s)} \end{aligned} \quad (12)$$

とする。一方、動的解析の途中に時刻 t_b で状態変化が生じた場合は、その直前の変位成分 $\{u(t_b)\}$ および速度成分 $\{\dot{u}(t_b)\}$ がそのまま初期条件として引継がれる。すなわち、

$$\begin{aligned} u(0) &= \{u(t_b)\} \\ \dot{u}(0) &= \{\dot{u}(t_b)\} \end{aligned} \quad (13)$$

である。式(12)あるいは式(13)を式(10)、(11)に代入すると、次のように未知定数が求まる。

$$\{B_{2j-1}\} = [Q]^{-1}\{u(0) - [P]^{-1}\{C\}\} \quad (14)$$

$$\{\sqrt{\lambda_j} \cdot B_{2j}\} = [Q]^{-1}\{\dot{u}(0) - [P]^{-1}\{C\}\} \quad (15)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \{C\}^T &= \{C_{(1,1)}, C_{(2,1)}, \dots, C_{(N,K-2)}, C_{(1,K-1)} \\ &\quad + c_{4(1,K-1)} \cdot U \dots C_{(N,K-1)} + c_{4(N,K-1)} \cdot U\} \end{aligned}$$

$$\{C\}^T = \{0 \dots 0 c_{4(1,K-1)} \cdot V \dots c_{4(N,K-1)} \cdot V\}$$

である。

2.2 シミュレーションの手順と入力値

一方向 FRM の変形・破断過程は、Fig. 1 にその概念を示すように、繊維が破断した後に複合材の受持つ応力は急激に低下する(矢印 A)が、破断による動的挙動は瞬時のうちに減衰して消滅し(矢印 B)、再びその応力は静的に上昇し始めると考えられる^{10), 11)}。そこで、本シミュレーションでは、応力が静的に上昇する過程に対しては前報で示した静的解析手法を用い、応力が急激に低下する過程に対してのみ前節で示した動的解析手法を流用する。以下に、そのシミュレーションの手順を示す。まず、繊維要素強度を2母数ワイブル分布の逆関数形に基づき発生させ、その最小値に相当する強制変位を求める。つぎにその強制変位を境界条件とし、動的変形・破断過程をシミュレートするルーチン(以下、動的解析ルーチンと記す)に入る。Fig. 2 は、その動的解析ルーチンのフローチャートである。これに対し、強制変位に任意変位増分を与えな

Fig. 1. Schematic illustration of stress/strain diagram for a unidirectional FRM.

*2 本研究では、行列 $[P]$ の固有値を求める数値解法としてギブンスとパイセクションの方法⁹⁾を採用した。この方法は対称行列を対象にした解法であるが、式(6)から判断すると、行列 $[P]$ には1繊維要素の破断によって2つの非対称成分が含まれる。本研究では、非対称行列の固有値を求める手法、たとえばべき乗法等は計算時間に多大な時間を有するため、実際は式(6)中の2つの係数 $c_{1(i,j)}$ と $c_{4(i,j)}$ をそれぞれ $c_{1(i,j)} \approx EA\sigma_{i,j}/m(\Delta x)^2$ ならびに $c_{4(i,j)} \approx EA\sigma_{i,j-1}/m(\Delta x)^2$ とみなして対称化しその固有値を近似した。これによる適合性を破断繊維要素に隣接した要素応力の時間変化について調べた結果、後述する移行条件までの範囲内で、べき乗法による変化の約1.5%の誤差内で一致した。

Fig. 2. Flow chart of Dynamic Analysis Routine.

がら静的変形過程をシミュレートするルーチン（前報 Fig. 4 (a) に相当）を以下では静的解析ルーチンⅠと呼ぶ。まず、事前に静的解析手法によって対応する強制変位^{*3}の下に、静的平衡状態に達するときの各要素応力ならびに平均応力値を求めておき、動的解析値と比較できるようにしておく。続いて、行列 $[P]$ の固有値・固有ベクトルを計算し、前節で示した初期条件の下に変位成分および速度成分を求める。状態変化がないときは、式 (10) への単なる時刻の代入計算となるが、各時刻ごとに各要素の降伏・破断による状態変化の判定を同時に行う。このとき、時刻は時間増分 Δt を与えながら経過させるが、状態変化が生じる時刻は必ずしも代入された時刻と一致しない。そこで本研究では、時間増分を小さい各要素に生じる応力の時間変化を近似的に線形変化するとみなして、時刻 t から $t+\Delta t$ 間に各要素に生じる応力の増分比 r の最小倍率 $r_{\min}$ ¹⁾ を基準にして状態変化を予測する、いわゆる $r_{\min}$ 法に従って確定時刻と確定応力を見積もった。いま、 $r_{\min} > 1$ のときは状態変化がないので、計算された各要素応力はそのまま確定値となる。 $r_{\min} \leq 1$ のときは、 $r_{\min}$ を基準にして確定時刻ならびに各要素の確定応力を算出するとともに、 $r_{\min}$ の対象となった要素の状態定数を変更して再び固有値・固有ベクトルを求める手順を繰返す。ただし、その変更が繊維要素の破断の場合は、上述のように、静的解析ルーチンⅡを実行し、動的解析値との比較から静的解析ルーチンⅠへ移行できるよう準備しておく。動的解析ルーチンから静的解析ルーチンⅠへの移行条件については、繊維破断後の応力の時間変化を参考に次章に記述するが、静的解析ルーチンⅡの下で導出された各要素応力および平均応力値を静的解析ルーチンⅠの初期条件とした。

Table I. Input data used in present simulation.

Elastic modulus of fiber : E	392 GPa
Cross-sectional area of fiber : A	0.0154 mm ²
Mass of fiber per unit length : m	3.89×10^{-8} kg/mm
Weibull's shape parameter of fiber : m_f	10, 15, 20
Weibull's scale parameter of fiber : σ_0	3.92 GPa
Fiber spacing : d	0.14 mm
Shear modulus of matrix : G	25.7 GPa
Initial shear yield stress of matrix : τ_y	40.4 MPa
Shear strength of matrix : $\tau_{\max}$	74.8 MPa
(Work-hardening rate of matrix)/ $G : \beta$	0.00316
Size of fiber-elements : $N \times K$	10 × 11
Gauge length of composite : L	16.5 mm
Thickness of composite : h	0.25 mm
Crosshead speed : V	1.0 mm/min

さらに繊維破断が蓄積し、複合材の破壊条件が満足されれば計算を終了する。なお、マトリックス要素のうち塑性変形状態にあるもので、除荷要素（せん断応力の絶対値が低下した要素）があれば、その最も低下したマトリックス要素1つを対象にして、再び弾性変形状態に戻るよう状態定数を変更する。そして、 Δt 差し引いた前回の時刻における各変位成分および速度成分を初期条件として、固有値・固有ベクトルの再計算を行う。そして、除荷要素が無くなるまでこれを繰返した。

一方向 FRM のモデル材料としては、前報同様に連続ボロン繊維強化アルミニウム複合材料（以下、B/AI 複合材と記す）を選定した。Table I に本シミュレーションで用いた入力値を一括して示す。なお、計算時間の制約により繊維要素数は 10×11 とし、繊維体積率は約 33% のものを想定した。また、複合材の引張破壊過程ならびに引張強度を変化させるパラメータとして、繊維強度のワイブル形状母数 m_f に注目し、 $m_f=10, 15$ および 20 の 3 種類で検討した。このときの尺度母数は、標準ゲージ長さ（ワイブル母数推定時の長さ）30 mm に対する値である。なお、シアラ理論では繊維のみが軸力を負担するため、結果の表示には複合材の引張応力や引張強度を繊維が引張方向

^{*3} この時刻における強制変位と、静的解析ルーチンⅠへの移行時刻における強制変位は異なる。しかしながら、その間わずか数十 μsec しか経過しておらず、前者の強制変位を用いて静的平衡状態を予測しても、解にほとんど影響はない。なお、この場合の静的解析手法とは、前報の Fig. 4 (b) による手法によって、 $r_{\min} > 1$ を満足するまで計算することを意味し、以下では静的解析ルーチンⅡと記す。

^{*4} 今回用いた複合材寸法では、5 要素以上の繊維要素破断があれば最大応力は必ず決定されることが前報の静的シミュレーションの試行より判明した。そこで、本シミュレーションでは繊維要素破断が 5 回生じたときを破壊条件とみなし計算を打ち切った。

に負担した平均応力によって代用している。

3 結果および考察

3・1 繊維破断時の繊維応力の時間変化と移行条件

Fig. 3 は, 11×11 分割された単層板モデルに対し, 中央の繊維要素 (1, 6) が応力レベル $\sigma_f = 0.98, 1.96$ および 2.94 GPa で破断したときの, 動的解析手法から予測される各繊維要素の平均応力 $\bar{\sigma}$ (Fig. 3(a)) および破断点に隣接した繊維要素 (2, 6) の応力 σ (Fig. 3(b)) の時間変化を示す。ただし, これらは各破断応力レベルで除して基準化している。図中細線は, 静的解析ルーチン II による計算値, すなわち静的平衡応力 (Fig. 3(b) では静的応力集中係数) を示す。これから, 破断後数十 μsec 経過すると, 図(a)の平均応力はその静的平衡応力を下回るが, その度合いは破断応力レベルの増加とともに強まることがわかる。これはシアラグ方程式に慣性項が加わった分だけマトリックス要素のせん断降伏域が広がり, 破断繊維の応力回復が鈍くなったためと考えられる。一方, 図(b)においては, 破断応力レベルの増加につれ応力の集中する度合いが小さくなることがわかる。また, どの破断応力レベルにおいても静的平衡応力がある時間内で上回り, 最初のうちに現われる応力波のピークが全範囲の最大値を与えている。この最大値を与える時刻は, 図(a)の平均応力が最も低下した時刻にほぼ対応している。

大平らは, W/Cu 複合材料における繊維破断時の AE (Acoustic emission) 原波形解析を行い, 破断繊維

(a) Average value for all fiber elements.

(b) Stress in fiber element (2, 6).

Fig. 3. Variation of fiber stress with time in the case that a fiber element (1, 6) breaks.

は破断後数 μsec で静的平衡状態に達することを報告している。本研究で用いる B/Al 複合材料は, それと材質や試験片形状の違いのため直接比較できないが, マトリックスの変形抵抗の変化により, 実際には解析で得られた時間変化 (Fig. 3) より早い段階で静的平衡応力に収束するであろうと推定される。そこで, 動的解析ルーチンから静的解析ルーチン I へ早い段階で強制移行することを考えた。すなわち, 繊維要素の平均応力が最も低下した時刻が, 破断点近傍の繊維要素に応力の最大値を与える時刻とし, それ以降動的挙動は続くだろうが, その時刻までに他の繊維が破断しなければ以降の動的効果は無視できるほど小さいと考え, そこで動的解析ルーチンを打切る。一方, それより前の時間内では, 静的平衡応力に達しない限り動的挙動は進行するはずであり, この時刻までが動的挙動が継続するのに必要最低な条件と考えた。すなわち, (1) あらかじめ計算された静的解析ルーチン II による平均応力値を下回ったとき, 静的解析ルーチン I に移る (たとえば, Fig. 3(a) 内の矢印 ①), (2) 平均応力の最小値に達した時点で静的解析ルーチン I へ移る (たとえば, Fig. 3(a) 内の矢印 ②), とした 2 種類の移行条件を仮定した。以下, これらの移行条件でシミュレーションを区別し, それぞれ動的シミュレーション ① および動的シミュレーション ② と記す。また, 比較のための前報のシミュレーションを静的シミュレーションと記す。

3・2 繊維破断過程

以上の手法で, B/Al 複合材の静的シミュレーション, 動的シミュレーション ① および ② をワイブル形状母数 $m_f = 10, 15$ および 20 の条件でそれぞれ 50 回ずつ試行した。ただし, 各条件とも同じワイブル乱数が採用された。その結果, 動的シミュレーションは, 多くの場合静的シミュレーションとまったく同じ繊維破断過程を経ることが認められたが, いくつかの場合に異なる過程がみられた。Fig. 4 は, その異なる過程の応力-ひずみ線図の一例 ($m_f = 10$ の場合) を示したものである。図中の矢印は繊維要素が破断したことを示し, 記された番号は破断順位を示す。これから,

(a) Static simulation.

(b) Dynamic simulation ②.

Fig. 4. Simulated stress/strain diagrams ($m_f = 10$).

Table II. Average value and coefficient of variation in simulated tensile strengths.

Simulation method	$m_f=10$			$m_f=15$			$m_f=20$		
	$\bar{\sigma}_c$ GPa	C. V. % (m_c)	$\bar{\sigma}_c/\bar{\sigma}_f$	$\bar{\sigma}_c$ GPa	C. V. % (m_c)	$\bar{\sigma}_c/\bar{\sigma}_f$	$\bar{\sigma}_c$ GPa	C. V. % (m_c)	$\bar{\sigma}_c/\bar{\sigma}_f$
Static	3.46	6.63(15.8)	0.875	3.54	4.92(20.3)	0.899	3.59	3.98(24.0)	0.913
Dynamic ①	3.46	6.63(15.8)	0.875	3.54	4.95(20.1)	0.898	3.59	4.04(23.9)	0.913
Dynamic ②	3.46	6.67(15.6)	0.873	3.53	5.09(19.6)	0.896	3.58	4.29(23.5)	0.911

Fig. 5. Histograms for number of accumulated fiber-breaks before composite failure.

最初（破断順位 ①）の繊維破断時は同じ応力レベルであるが、それ以降の推移は動的シミュレーション ② が繊維の累積破断数（複合材が最大応力を示すまでに破断した繊維要素数）は少なく、しかも最大応力も小さいことが認められる。これは前述したように、動的過程に入るとその応力波は破断点近傍で静的平衡応力を上回るため、その影響（動的効果）によって周囲の繊維が破断する場合があります、低い応力レベルで複合材を破壊に導いたと考えられる。ただし、その影響が現われるのは全試行数のうちほんのわずかであり、各ワイブル形状母数ごとに、動的シミュレーション ① ではそれぞれ 1, 4 および 1 回、動的シミュレーション ② ではそれぞれ 5, 9 および 3 回ほど現われた。Fig. 5 は、シミュレーションで得られた繊維の累積破断数に対するヒストグラムを各ワイブル形状母数ごとに示したものである。これから、静的シミュレーション、動的シミュレーション ① さらに ② の順で、若干ながらより非累積的な破断過程を示すことがわかる。

3・3 引張強度とそのばらつき

Table II にそれぞれのシミュレーション 50 回の試行によって得られた B/AI 複合材の引張強度の平均値 $\bar{\sigma}_c$ および変動係数 C. V. を示す。これから、どのワ

イブル形状母数においても、動的シミュレーションによってその平均値はほとんど変化せず、変動係数が若干大きく現われることが認められる。一般に、分散は平均値からの偏差の 2 乗和であり、偏差が大きくなるデータの変化は平均値の変化よりもむしろ分散の変化に敏感に効くようになる。Fig. 3 (b) で示したように、低応力での繊維破断はより大きな応力集中を引き起こすため、動的効果は全体の低強度側へ、つまり偏差が大きくなるようにデータを変化させ、全試行数のうちの幾つかにその効果がもたらされる。このため、見かけ上平均値はほとんど変化せず、変動係数は増大したものと推察される。変動係数の変化は、Fig. 5 に示した繊維破断過程の変化からも説明できる。すなわち、動的シミュレーションの繊維破断過程が静的シミュレーションのそれに比べて非累積的であるため、強度のばらつきは上限である繊維そのものの強度のばらつきに幾分近づき、増大したと考えられる。なお、本研究は計算時間の制約のため、50 回の試行によって統計的性質の変化を論じたものであるが、上述のように、動的効果は非累積破壊をもたらす、低強度側へデータを変化させるので、試行数の大小にかかわらず同様な統計的性質が発揮されると考えられる。

ところで、今回試みた動的シミュレーションにおいても、繊維強度のワイブル形状母数の増加につれ、引張強度の平均値は徐々に増加し、変動係数が小さくなる傾向が見出された。また、繊維強度と複合材強度のワイブル形状母数 m_f と m_c を比較すると、どの場合も m_c が大きく、複合化による信頼性向上の効果においても静的シミュレーションと同様な傾向が得られた。さらに、繊維強度の平均値 ($L=16.5$ mm のとき、 $m_f=10, 15$ および 20 に対してそれぞれ $\bar{\sigma}_f=3.96, 3.94$ および 3.93 GPa) に対する複合材強度の平均値 $\bar{\sigma}_c$ の占める割合は 1 以下であり、複合則は成立していない。

*5 再帰法を提案した Harlow と Phoenix³⁾ によると、一方向強化複合材では非累積的な破断過程になるほど、強度のばらつきが大きくなることを証明している。この非累積性は、複合材の寸法（繊維本数）に依存しており、たとえば最も弱い繊維 1 本の破断が複合材全体の破壊を招くような小さな寸法では、強度のばらつきは繊維そのものと同じであり、これがばらつきの上限である。2 母数ワイブル分布では、1 番めの順序統計量（繊維強度の最小値）の分布は母分布と同じばらつきを示すために、このことが立証される。

奥野¹²⁾は, B/AI 複合材の単層板を対象に, 破断点まわりの応力集中係数や無効長さを一義的に与え, 引張強度を予測するモンテカルロ・シミュレーション手法を提示した. これによると, 繊維強度のばらつきの増加 (m_f の減少) にともない複合材強度そのものが大きくなることが報告されており, 著者らの一連の結果と逆の関係にある. 2 母数ワイブル分布では, 一般に標準ゲージ長さでの平均強度が同じでも, それより短い長さに外そうされた平均強度は, m_f が小さいほど大きくなる. たとえば, 彼らの用いた要素強度の変動係数 2, 15 および 29% では, それに対応する要素強度の平均値 $\bar{\sigma}_f$ はそれぞれ 3.70, 5.65 および 9.26 GPa とかなり大きく算出される.^{*6} すなわち, 彼らの結果は繊維強度のばらつきが大きくなったために複合材強度が大きくなったのではなく, 繊維要素強度そのものが大きくなったためと推測される. また, 実際には繊維は短くなると 2 母数ワイブル分布による外そう値から外れ飽和する側に向かう, いわゆる多重モードワイブル分布特性にしたがう¹³⁾ため, m_f を小さくすることによる強度上昇の効果は期待できないであろう. Table II で示したように, 繊維強度のばらつきが大きければ複合材強度のばらつきも大きくなるため, 強度信頼性向上の見地からも, 繊維強度のばらつきは小さく抑えた方がよいと判断される.

なお, 本研究は Hedgepeth の示したシアラゲ理論式をそのまま流用し半離散化したものであるが, マトリックスの垂直応力成分あるいはマトリックスに生じる慣性・粘性の影響などが考慮されず, いくつかの点で実際に考えられる動的挙動を十分にシミュレートできなかった. しかしながら, 著者らは FRM の強度信頼性を微視力学的観点から理解する上で, その信頼性に及ぼす未解決であった現象の効果を定性的ながら把握できたと考えている. これら考慮されなかった解析手法の検討とそれを取り入れたシミュレーションの開発は今後の課題にしたい.

4 結 言

前報で示した $\tau_{\min}$ 法に基づくモンテカルロ・シミュレーション手法にシアラゲ理論式を半離散化した動的解析手法を導入することによって, 一方向 FRM の引張強度とばらつきに及ぼす繊維破断の動的効果に

ついて検討した. FRM に連続ボロン繊維強化アルミニウム複合材料を想定し, 繊維強度のワイブル形状母数にともなう引張破断過程ならびに引張強度の変化を予測するとともに, 繊維が静的に破断する場合と比較した. 得られた結論は, 以下のように要約される.

(1) 静的シミュレーションおよび 2 種類の動的シミュレーションをそれぞれ 50 回ずつ試行した結果, 動的シミュレーションは静的シミュレーションに対して, ほとんど同じ繊維破断過程を再現するが, いくつかにおいてより非累積的な破断過程がみられた.

(2) 動的シミュレーションによる複合材強度は, 繊維強度のワイブル形状母数と無関係に, 静的シミュレーションに対して平均値がほとんど変化せず, 変動係数がわずかながら大きく現われる.

(3) 繊維強度のワイブル形状母数の増加につれ, 静的シミュレーションおよび動的シミュレーションともに複合材強度の平均値を徐々に増加させ, 変動係数を減少させる.

参 考 文 献

- 1) 合田公一, 福永秀春, 材料, **40**, 296 (1991).
- 2) J. M. Hedgepeth, NASA Tech. Note, D-882, 1 (1961).
- 3) D. G. Harlow and S. L. Phoenix, Int. J. Frac., **17**, 347 (1981); *ibid.*, **17**, 601 (1981).
- 4) E. N. Sakharova and A. S. Ovchinskii, Mekh. Kompo. Mater. (英訳), **1**, 57 (1979).
- 5) K. P. Oh, J. Comp. Mater., **13**, 311 (1979).
- 6) 金原 勲, 尾崎毅志, 高田志郎, 材料, **34**, 280 (1985).
- 7) 金原 勲, 尾崎毅志, 井上和夫, 日本造船学会論文集, **163**, 397 (1988).
- 8) W. F. Ames (三村昌泰・小西芳雄訳), “工学における非線形偏微分方程式 I 下”, p. 433 (1978) 産業図書
- 9) 板野匡弘, “FORTRAN77 による数値計算法入門”, p. 69 (1982) オーム社
- 10) 中沢興三, 梅川莊吉, 日本金属学会誌, **36**, 398 (1972).
- 11) 大平貴規, 岸 輝雄, 宮下博仁, 香川 豊, 中田栄一, 日本金属学会誌, **48**, 248 (1984).
- 12) 奥野 功, 三浦維四, 日本金属学会誌, **42**, 736 (1978).
- 13) 合田公一, 福永秀春, 東原昭仁, 日本機械学会論文集, A-52, 1848 (1986).

*6 奥野らは, 標準ゲージ長さでの繊維強度の平均値 $\bar{\sigma}_f$ を 3.5 GPa で与えており, 繊維 1 本に対して 40 分割されてあるので, $\bar{\sigma}_f = (1/40)^{-1/m} \bar{\sigma}_f$ から導かれる.