微小疲労き裂の開閉口挙動に及ぼす結晶粒界の影響†

秋庭義明* 原田昭治** 山上貴幸***

Effect of Grain Boundary on Closure Behavior of Small Fatigue Cracks

by

Yoshiaki AKINIWA*, Shoji HARADA** and Takayuki YAMAGAMI***

The effect of the interaction between crack-tip slip band and grain boundary on plasticity induced crack closure was analyzed. On the basis of the method proposed by Budiansky and Hutchinson, the crack opening stress and the crack opening displacement were calculated for the constant and proportional residual stretch models in which the residual stretch was assumed to be constant and proportional along the crack surfaces, respectively. The crack opening stress and the crack opening displacement range decreased with increasing crack length. Then the simulation method developed by Newman was applied to crack growth. The crack opening stress increased with increasing crack length. The distribution of the residual stretch was geometrically similar to the change of the maximum crack opening displacement with crack length. The relation between the crack opening displacement range and the effective stress intensity range was almost unique irrespective of applied stress and boundary condition.

Key words: Fatigue, Crack closure, Crack opening displacement, Grain boundary, Simulation, Residual stretch

1 緒 言

疲労き裂の伝ば挙動は比較的長いき裂については線形破壊力学の適用によって寿命評価が可能となってきた。しかしながら寿命の大部分を占める微小き裂は、伝ば挙動が不規則で、また同一の ΔK で比較した場合、長いき裂の関係より高速に伝ばするため、長いき裂の関係をもとにした寿命評価は危険側となる。このような微小き裂伝ばの特異性は、結晶粒界との相互作用およびき裂閉口の相違が原因と考えられているが、定量的な説明までにはいたっていないのが現状である。

著者らの1人は、き裂先端のすべり帯が結晶粒界に阻止される場合について、き裂と粒界との相互作用をき裂先端開口変位 (CTOD) の変化から説明するとともに、モンテカルロ法を援用したき裂伝ばシミュレーションを行い⁵⁾、き裂伝ば寿命の統計的性質が、結晶個々の転位の摩擦応力や結晶粒径のばらつきをもとに説明し得ることを示した⁶⁾。一方実験的には、レーザ干渉変位計を用いて表面き裂の開閉口挙動を高精度に測定し、表面微小疲労き裂の伝ばにおいてもき裂閉口が重要な役割を果たすことを明らかにした^{7), 8)}。すなわちこれらのことは、疲労き裂と結晶粒界との相互作用を把

握する上では、き裂開閉口挙動の影響についても検討する必要があることを意味している。

そこで本研究では、塑性誘起き裂閉口を対象とし、き裂先端のすべり帯が結晶粒界に阻止される場合についてき裂伝ばに伴うき裂開口応力の変化を解析した。き裂面の残留塑性変位が、一定の厚みで付着する場合および比例的に増加する場合について応力関数法を用いて解析した。また残留変位を仮定せず、Newmanの手法を拡張してき裂伝ばシミュレーションを行い、両者の比較検討を行った。

2 解 析 方 法

2・1 解析モデル

Fig. 1に微小き裂の伝ば過程を模式的に示す。き裂は粒内から発生し、初期には結晶粒界との相互作用なしで伝ばする。その後、き裂がある程度伝ばした時点で、き裂先端のすべり帯が結晶粒界に阻止される。このとき、すべり帯先端にはき裂と同様の応力特異性が生じ、その値が粒界の抵抗値を越えたときに隣接粒に伝ばする⁴⁾。一般に疲労き裂の伝ば初期には、結晶方位の影響を強く受けるステージⅠのすべり帯き裂であり、その後ステージⅡに遷移する。遷移後もしくはばくは粒

† 原稿受理 平成4年10月5日 Received Oct. 5, 1992

* 正会員 名古屋大学工学部機械工学科 〒464-01 名古屋市千種区不老町, Dept. of Mech. Eng., Nagoya Univ., Chikusa-ku, Nagoya, 464-01

** 正会員 九州工業大学工学部設計生産工学科 〒804 北九州市戸畑区仙水町, Dept. of Mech. Eng., Kyushu Inst. of Tech., Tobata-ku, Kitakyushu, 804

*** 九州工業大学大学院 〒804 北九州市戸畑区仙水町, Graduate Student, Kyushu Inst. of Tech., Tobata-ku, Kitakyushu, 804

Fig. 1. Fatigue crack growth.

界との相互作用下で伝ばし、やがて長いき裂の伝ば挙動に従う。本研究では、ステージⅡのき裂を対象とし、き裂と粒界との相互作用が最も顕著に現れる場合、すなわちすべり帯が完全に阻止される場合のき裂開口挙動を解析する。簡単のためステージⅠの領域は省略し、伝ば初期からステージⅡで伝ばするものとして解析するが、2～3結晶粒のステージⅠのき裂伝ばの後にステージⅡき裂に遷移し、そのすべり帯が阻止される場合についても、本質的な傾向は同様と考えられる。

表面微小き裂は、その発生初期に結晶方位の影響を強く受け、また半円状に伝ばするため、厳密には異方性を考慮した三次元的な解析が必要と考えられるが、

Fig. 2. Model of crack-tip slip band.

本研究ではすべり帯が粒界に阻止されることによる開口応力への影響を明らかにすることを目的とし、簡略化のため前報と同様の等方性材料の一次元き裂として解析する。Fig. 2に示すように長さ $2a$ のき裂に対し、Dugdale モデルにもとづくすべり帯が形成されるものとする。Dugdale モデルより計算される塑性域寸法とき裂長さの和 c が、結晶粒界寸法 d より小さい場合は平衡すべり帯 (ESB) 状態、 c が d より大きくなる場合はすべり帯が粒界に阻止される ($c=d$) 阻止すべり帯 (BSB) 状態とする。き裂開口の要因としては、塑性誘起のき裂開口を対象とし、弾性係数はすべての結晶粒で等しいものとする。

2・2 応力関数法

Budiansky らによって提案された手法を中井らと同様に、微小き裂に拡張して解析する。本研究ではき裂面に残留塑性変位が一定の厚みで付着する場合 (CRS) とき裂中央から比例的に増加する場合 (PRS) について解析する。Fig. 3 に最大応力、最小応力およ

(a) Constant Residual Stretch

(b) Proportional Residual Stretch

Fig. 3. Crack closure model.

びき裂開口応力時におけるき裂まわりの境界条件を示す。最小応力ではき裂は完全に閉じる条件 ($R \leq 0$) で計算する。

Muskhelishvili Potential Φ を用いると y 方向応力 σ_y および残留変位 δ は以下のように表せる。

$$\sigma_y = \Phi_+ + \Phi_- \quad (1)$$

$$\frac{d\delta}{dz} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_+ - \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_- = \frac{4}{iE} (\Phi_+ - \Phi_-) \quad (2)$$

ここで E は弾性係数, $v = \delta/2$ である。ただし

$$f_{\pm} = f(x \pm i\eta) \quad \eta > 0, \eta \rightarrow 0$$

最小応力において PRS の境界条件は以下のように表せる。

$$\Phi_+ - \Phi_- = \frac{iE}{4} \frac{d\delta_{\min}}{dz} = \frac{iE}{4} \gamma \quad |z| < a$$

$$\Phi_+ + \Phi_- = -\sigma_y \quad a < |z| < b$$

$$\Phi_+ - \Phi_- = \frac{iE}{4} \frac{d\delta_{\max}}{dz} \quad b < |z| < c$$

$$\Phi_+ - \Phi_- = 0 \quad c < |z| \quad (3)$$

ただし, σ_y : 降伏応力

ここで補助関数 $\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}$ を用いて平衡方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} & \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)} \Phi(z) \\ &= -\frac{E}{4\pi} \int_0^a x \frac{\sqrt{(b^2 - x^2)(a^2 - x^2)}}{(x^2 - z^2)} \gamma dx \\ & - \frac{\sigma_y}{\pi} \int_a^b x \frac{\sqrt{(b^2 - x^2)(x^2 - a^2)}}{x^2 - z^2} dx \\ & + \frac{E}{4\pi} \int_b^c x \frac{\sqrt{(x^2 - b^2)(x^2 - a^2)}}{x^2 - z^2} \frac{d\delta_{\max}}{dx} dx \\ & + \frac{\sigma_{\min}}{2} z^2 + Cz + D \end{aligned} \quad (4)$$

Φ の有限条件より以下の二式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{E\gamma}{4\pi} \int_0^a x \sqrt{\frac{b^2 - x^2}{a^2 - x^2}} dx - \frac{\sigma_y}{\pi} \int_a^b x \sqrt{\frac{b^2 - x^2}{x^2 - a^2}} dx \\ & + \frac{E}{4\pi} \int_b^c x \sqrt{\frac{x^2 - b^2}{x^2 - a^2}} \frac{d\delta_{\max}}{dx} dx + \frac{\sigma_{\min}}{2} a^2 + D = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{E\gamma}{4\pi} \int_0^a x \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{b^2 - x^2}} dx + \frac{\sigma_y}{\pi} \int_a^b x \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{b^2 - x^2}} dx \\ & + \frac{E}{4\pi} \int_b^c x \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x^2 - b^2}} \frac{d\delta_{\max}}{dx} dx + \frac{\sigma_{\min}}{2} b^2 + D = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

式(5), (6)より次式が得られる。

$$\begin{aligned} & -\frac{E\gamma}{4\pi} \int_0^a \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 - b^2)(x^2 - a^2)}} \\ & + \frac{\sigma_y}{\pi} \int_a^b \frac{xdx}{\sqrt{(b^2 - x^2)(x^2 - a^2)}} \\ & + \frac{E}{4\pi} \int_b^c \frac{x}{\sqrt{(x^2 - b^2)(x^2 - a^2)}} \frac{d\delta_{\max}}{dx} dx \end{aligned}$$

$$+ \frac{\sigma_{\min}}{2} = 0 \quad (7)$$

また変位の連続条件より次式が得られる。

$$\int_a^b \frac{d\delta_{\min}}{dx} dx + a\gamma - \delta_{\max}(b) = 0 \quad (8)$$

き裂開口時の境界条件は以下ようになる。

$$\Phi_+ + \Phi_- = 0 \quad |z| < a$$

$$\Phi_+ - \Phi_- = \frac{iE}{4} \frac{d\delta_{\min}}{dz} \quad a < |z| < b$$

$$\Phi_+ - \Phi_- = \frac{iE}{4} \frac{d\delta_{\max}}{dz} \quad b < |z| < c \quad (9)$$

補助関数 $\sqrt{(z^2 - a^2)}$ を用いて平衡方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} & \sqrt{z^2 - a^2} \Phi(z) = \frac{E}{4\pi} \left\{ \int_a^b \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2 - z^2} \frac{d\delta_{\min}}{dx} dx \right. \\ & \left. + \int_b^c \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2 - z^2} \frac{d\delta_{\max}}{dx} dx \right\} + \frac{\sigma_{\text{op}}}{2} z + Cz + D \end{aligned} \quad (10)$$

Φ の有限条件よりき裂開口応力は次式で得られる。

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{op}} = & -\frac{E}{2\pi} \left\{ \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \frac{d\delta_{\min}}{dx} dx \right. \\ & \left. + \int_b^c \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \frac{d\delta_{\max}}{dx} dx \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

ただし $d\delta_{\min}/dz$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_{\min}}{dz} = & \sqrt{\frac{z^2 - a^2}{b^2 - z^2}} \left\{ -\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{x}{x^2 - z^2} \sqrt{\frac{b^2 - x^2}{a^2 - x^2}} \gamma dx \right. \\ & + \frac{8\sigma_y}{\pi E} \int_a^b \frac{x}{x^2 - z^2} \sqrt{\frac{b^2 - x^2}{x^2 - a^2}} dx \\ & - \frac{2}{\pi} \int_b^c \frac{x}{x^2 - z^2} \sqrt{\frac{x^2 - b^2}{x^2 - a^2}} \frac{d\delta_{\max}}{dx} dx \\ & \left. - \frac{4}{E} \sigma_{\min} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

また、一定残留変位の場合は $\sigma_{\min}$ において $|z| < a$ で $d\delta/dz = 0$ の条件で計算される。なお、平衡すべり帯状態での比例残留変位および一定残留変位は、それぞれ応力一定および応力拡大係数一定条件下でのき裂伝ばに対応する。¹²⁾

2・3 き裂伝ばシミュレーション

Newman¹⁰⁾の手法をすべり帯が粒界で阻止される場合に拡張してき裂伝ばシミュレーションを行った。初期き裂長さ a_0 の残留変位のない理想き裂より伝ばさせ、開口応力の変化がほぼ安定したき裂長さになった時点ですべり帯先端に粒界をおき、その後のき裂伝ばによる開口応力の変化を計算した。ここで a_0 を適当な長さに設定することで、ステージⅠのき裂を模擬することもできる。き裂開口応力はき裂伝ば増分量に依存する¹³⁾ことが報告されているが、本研究では、計算時間の都合上最大塑性域寸法の 1/500 を基本とした。

ただし伝ば量が $a_0/3 \times 10^{-4}$ より小さくなる場合は、その後一定値として計算した。き裂前方塑性域内はき裂先端が密となるように 20 分割した。また、要素の増加を抑制するため Lumping 処理を行うが、Newman と同様の手法では Lumping 後に Lumping 要素が降伏する等の問題が生じるため、対象とする二つの要素の他にその前後の要素の残留変位を考慮して、4 点を二次曲線で近似し、Lumping 要素の残留変位を決定した。

3 解析結果および考察

3.1 応力関数法

き裂伝ばに伴う繰返し塑性域寸法の変化を Fig. 4 に

Fig. 4. Change of reversed plastic zone size with crack length.

(a) Residual stretch.

(b) Crack-tip opening displacement.

Fig. 5. Crack approaching grain boundary.

Fig. 6. Change of crack opening stress with crack length.

示す。横軸は正規化されたき裂長さで、 a_i は粒界にすべり帯先端が接したときのき裂長さである。したがって横軸の 0 は ESB 状態を、1 はき裂先端が粒界に達したことを意味する。縦軸は最大塑性域寸法で正規化した。繰返し塑性域が粒界に阻止された場合、縦軸は 1 となる。実線および破線はそれぞれ比例残留変位と一定残留変位を表している。同一の荷重応力およびき裂長さでは PRS の方が繰返し塑性域寸法が大きい。

き裂伝ばにともなうき裂先端残留変位と最大き裂先端開口変位との比の変化を Fig. 5 (a) に示す。き裂先端残留変位は粒界に近づくにつれ小さくなる。このことは、き裂の伝ばとともに前段階で形成された残留変位全面が圧縮塑性変形することを意味しており、き裂伝ばの前段階の履歴もしくは負荷履歴の影響がその後の残留変位に反映されないことを意味する。Fig. 5 (b) はき裂先端開口変位範囲 $\Delta \delta$ の変化を示す。 $\sigma_{max}/\sigma_Y = 0.2$ の場合は明確でないが、負荷応力が大きい場合 $\Delta \delta$ はいったん増加した後減少し、これは前報と同様である。PRS と CRS を比較すると PRS の方が大きい。

Fig. 6 に CRS および PRS について得られたき裂

Fig. 7. Relation between crack opening displacement and effective stress intensity range.

開口応力とき裂長さの関係を示す。ESB 状態である切片の値は陳らの結果に一致する。き裂開口応力は PRS の高負荷応力でいったん増加するものの、低負荷応力ではき裂伝ばとともに低下し、0 に漸近する。すなわちこのことは、き裂先端が粒界に近づくにつれ有効応力成分が増加することを意味する。また、CRS と PRS を比較すると全体的に PRS の方が開口応力が小さく、この傾向は負荷応力が大きくなるにつれて顕著となる。

き裂先端開口変位範囲と有効応力拡大係数範囲の関係を Fig. 7 に示す。図中点線は SSY 状態で得られた Budiansky らの結果である。すべり帯が粒界に阻止されるにつれ破線の上方にずれるものの、最大でもおよそ 1.5 倍程度であり、第一次近似としては Budiansky らの結果を用いても大きな誤差は生じないであろう。

3・2 き裂伝ばシミュレーション

前項では特定の残留変位形を仮定して解析を行ったが、その妥当性は明らかでない。そこでつぎに残留変位分布を仮定せずに、Newman¹⁰⁾の手法を拡張してき裂の伝ばシミュレーションを行った。

伝ばシミュレーションに先立ち、本手法の計算精度を検討するため、CRS の応力関数法で用いた境界条件を用いてき裂開口応力および残留変位を計算した。

Fig. 8. Change of crack opening stress with crack length.

Fig. 9. Change of effective stress intensity range with crack length.

き裂先端塑性域およびき裂内をき裂先端が密となるようにそれぞれ 20 および 60 分割した。結果は省略するが、応力関数法で得られた値と極めてよく一致した。

き裂伝ばにともなうき裂開口応力の変化を Fig. 8 に示す。初期き裂長さ a_0 よりそれぞれの負荷条件で伝ばさせ、開口応力の増加がほぼ飽和するき裂長さ $(a-a_0)/\omega_0=4$ になった時点での塑性域先端を粒界とした。図中破線は粒界がない場合 (ESB 状態) の結果で、ある程度き裂が伝ばすればほぼ一定値となる。一方、すべり帯が阻止される場合を実線で示すが、き裂の伝ばとともに開口応力は増加し、したがって有効応力成分は減少する。Fig. 8 (b) は Fig. 6 と同様のスケールで整理し直したものであるが、伝ば初期では PRS の結果に近い値をとるものの、き裂伝ばとともに開口応力が増加し、Fig. 6 とは逆の傾向を示す。これは前述のように応力関数法では、残留変位に対してき裂伝ばに伴う前段階の履歴もしくは負荷履歴の影響が反映されてないことが原因と考えられる。Fig. 9 は、本結果を有効応力拡大係数範囲 ΔK_{eff} の変化として整理し直したものである。負荷応力 $\sigma_{max}/\sigma_Y=0.8$ の場合を除いて、き裂の伝ばとともに ΔK_{eff} は減少する。

以上のことから、き裂伝ばシミュレーションにおいてすべり帯が結晶粒界に阻止される場合は、前報⁴⁾で示したごとく、き裂先端開口変位が低下するのみならず有効応力範囲も減少し、粒界によるすべり帯の阻止は有効応力拡大係数範囲の観点からみても、き裂伝ばの抵抗として作用することがわかる。

Fig. 10 (a) に $\sigma_{max}/\sigma_Y=0.6$, $a/d=0.979$ における残留変位分布を実線で、き裂伝ばに伴う最大き裂先端開口変位の変化を破線で示す。残留変位は ESB 領域では線形に増加し、BSB 領域では最大値をとった後に減少する。前項で仮定した PRS や CRS とは異なることが明らかである。図中の実線を破線で除した結果を Fig. 10 (b) に示す。図中破線は PRS の ESB 状態

(a) $\delta_R/\delta_{\max}^{\text{tip}} - x/d$. (b) $\delta_R/\delta_{\max}^{\text{tip}} - x/d$.

Fig. 10. Distribution of residual stretch.

態で得られた値である。き裂先端近傍で小さくなるものの、ほぼ破線で近似可能で、残留変位は最大き裂先端開口変位とほぼ相似形であることがわかる。すなわち、相似形の残留変位を仮定することによって、伝ばシミュレーションによらずに、簡便にき裂開口挙動が評価できる可能性を示唆している。

$\sigma_{\max}/\sigma_Y = 0.6$ の場合のき裂伝ばに伴う $\Delta\delta$ および $\delta_{\max}$ の変化を Fig. 11(a) に示す。 $\Delta\delta$ は $\delta_{\max}$ と同様、BSB に移行した後最大値を取り、その後減少する。ESB 状態においては、き裂長さによらずにき裂先端開口変位範囲と最大き裂先端開口変位の比 $\Delta\delta/\delta_{\max}$ は一定値をとることが報告されている¹²⁾。 Fig. 11(b) にき裂伝ばに伴う $\Delta\delta/\delta_{\max}$ の変化を示す。図中矢印は ESB から BSB 状態に移行するき裂長さを示している。また破線は PRS の ESB 状態における値を示したものである。 a_0 は初期き裂長さで、残留変位の無い理想き裂の状態であるため、き裂伝ば初期に残留変位の形成とともに $\Delta\delta/\delta_{\max}$ は 1 から急激に減少し、破線に近い値でほぼ一定値となる。BSB 状態になるといったん減少し、その後増加に転ずるが、その変動量はさほど大きくない。すなわち、定常状態になった後に BSB 状態に移行する場合は、 $\Delta\delta$ は $\delta_{\max}$ をもとに、 ESB 状態での値でほぼ近似可能であることがわかる。

(a) $\Delta\delta E/2d\sigma_Y$, $\delta_{\max}^{\text{tip}} E/2d\sigma_Y - (a-a_0)/(d-a_0)$. (b) $\Delta\delta/\delta_{\max} - (a-a_0)/(d-a_0)$.

Fig. 11. Change of crack-tip opening displacement with crack length.

Fig. 12. Relation between crack-tip opening displacement and effective stress intensity range.

き裂先端開口変位範囲と有効応力拡大係数範囲の関係を Fig. 12 にまとめる。図中点線は伝ばシミュレーションの結果、破線および実線は CRS, PRS の結果である。 $(a-a_0)/(d-a_0)$ が 0 から 0.9 までの範囲を示したが、解析条件によらずにほぼ一価的な関係が認められる。このことは、極めて粒界に近い領域を除けば、き裂伝ば駆動力として有効応力拡大係数範囲とき裂先端開口変位範囲がほぼ等価であることを意味している。本解析は結晶粒界によるすべり帯阻止効果を対象に

議論したが、必ずしも結晶粒界に限定されるものではなく、二相合金や複合材料等、強化材が分散する材料への適用も期待される。

4 結 論

塑性誘起き裂閉口を対象とし、き裂先端のすべり帯が結晶粒界に阻止される場合についてき裂伝ばに伴うき裂開口応力の変化を解析した。得られた主な結果を以下に示す。

(1) き裂面に一定の厚さの残留変位を付着させた場合およびき裂中央からの距離に比例した残留変位を付着させた場合いずれも、き裂先端残留変位およびき裂開口応力は、き裂の伝ばとともに低下した。また同一の負荷応力およびき裂長さで両者を比較すると、き裂先端残留変位およびき裂開口応力は比例残留変位の方が小さい。

(2) き裂伝ばシミュレーションでは、き裂開口応力はき裂伝ばとともに増加し、有効応力成分は減少した。また残留変位分布は、最大き裂先端開口変位の変化とほぼ相似形であった。

(3) き裂先端開口変位範囲と最大き裂先端開口変位の比は、き裂伝ばとともにいったん減少した後増加するが、その変化量は小さく、平衡すべり帯状態での値を用いても大きな誤差は生じない。

(4) き裂先端開口変位範囲と有効応力拡大係数範囲の関係は、き裂が粒界の極近傍に近い領域を除いて、

解析手法や負荷応力によらずほぼ一価的に整理できた。

(平成4年5月23日 日本材料学会第41期学術講演会にて講演)

参 考 文 献

- 1) J. Lankford, *Fatigue Eng. Mater. Struct.*, **5**, 233 (1982).
- 2) E. R. Rios, Z. Tang and K. L. Miller, *Fatigue Eng. Mater. Struct.*, **7**, 97 (1982).
- 3) K. Tanaka, *Trans. JSME*, **35** (1987).
- 4) K. Tanaka, Y. Akiniwa, Y. Nakai and R. P. Wei, *Eng. Fract. Mech.*, **24**, **6**, 803 (1986).
- 5) 秋庭義明, 田中啓介, *材料*, **38**, 1169 (1989).
- 6) K. Tanaka, Y. Akiniwa and M. Kinefuchi, *Proc. 4th Int. Conf. Fatigue and Fatigue Thresholds*, **4**, 2137 (1990).
- 7) Y. Akiniwa, S. Harada and Y. Fukushima, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* **14-2/3**, 317 (1991).
- 8) 秋庭義明, 原田昭治, 宮田恭介, *日本機械学会講演論文集*, No. 910-62, 782 (1991).
- 9) B. Budiansky and J. W. Hutchinson, *Trans. ASME, J. Applied Mech.*, **45**, 267 (1978).
- 10) J. C. Newman, Jr., *ASTM STP 748*, 53 (1981).
- 11) 中井善一, 大路清嗣, 田中啓介, *日本機械学会講演論文集*, No. 834-3, 42 (1983).
- 12) 陳 玳珩, 西谷弘信, *日本機械学会講演論文集*, **52**, 481, A, 2174 (1986).
- 13) 白鳥正樹, 三好俊郎, 宮本 博, 森 孝男, *材料*, **26**, 753 (1977).