ファインセラミックスの破壊強度分布のモンテカルロ・シミュレーションによる評価[†]

田 中 道 七* 中 山 英 明**
境 田 彰 芳*** 今 道 高 志****

Evaluation of Weibull Parameters for Static Strength of Ceramics by Monte Carlo Simulation

by

Tsuneshichi TANAKA*, Hideaki NAKAYAMA**, Akiyoshi SAKAIDA***
and Takashi IMAMICHI****

Monte Carlo simulation method was used to evaluate the theoretical distributions of the estimates of Weibull (shape) and scale parameters for various sample sizes. It was found that the theoretical distributions of the estimates of Weibull and scale parameters are well approximated by log-normal distributions, and the scatter and bias of each distribution decrease with the increase of sample size. The comparison of the distribution of Weibull parameter estimated by experiments with the theoretical distribution indicates that the scatter of the experimentally obtained Weibull parameter results from the statistical nature of the estimates depending on the sample size and the difference of test conditions is not a major factor for the scatter. And it was also revealed that the distribution of scale parameter obtained by experiments does not agree with the theoretical one obtained by Monte Carlo simulation. This means that the scale parameter or the intrinsic strength of sintered silicon nitride and sintered silicon carbide depends on the fabrication and testing techniques.

Key words: Monte Carlo simulation, Weibull parameter, Scale parameter, Static strength, Sintered silicon nitride, Sintered silicon carbide

1 緒 言

ファインセラミックスの強度特性は一般にワイブル統計理論¹⁾を用いて検討されることが多く、特に最近では2母数ワイブル分布における母数の推定値の分布についていくつかの解析結果が報告されている²⁾⁻⁵⁾。

例えば、Khalili²⁾はあらかじめ設定した2母数(ワイブル係数 $m_0=10$, 尺度母数 $b_0=1$)ワイブル分布に従うワイブル乱数に対して、モンテカルロ・シミュレーションにより標本寸法を4から100とした場合について、線形推定法、モーメント法、最尤法によりワイブル係数 m および尺度母数 b の推定を行い、最尤法による推定が適切であるとしている。また、設定した母数が推定したワイブル係数に及ぼす影響を調べる目的で、 m_0 を20と100($b_0=1$ のみ)としてワイブル係数の推定を行い、 m_0 の変化は標準化したワイブル係数の推定値(m/m_0)の分布に影響を及ぼさ

ないことを示している。

同種の解析はFaucher³⁾らによっても行われており、それによると線形推定法を用いた母数の推定において、累積確率にはメジアンランク法の方が対称試料累積分布法より適切であるとしている。

しかし、これらの結果をみると、推定した2母数どのような分布に従うかは明らかでなく、設定したワイブル係数が尺度母数の推定値に及ぼす影響や両母数の推定値の独立性についても検討がなされていない。また、これまでの報告では推定したワイブル係数および尺度母数の分布と実験結果より得られる両母数の推定値の分布を比較したものはみられない。

以上の観点から、本研究ではこれまでの報告例と同様、モンテカルロ・シミュレーションを用いて、設定したワイブル係数を2種類に変化させた($m_0=10$ および15, $b_0=100$ のみ)ワイブル乱数よりワイブル係

† 原稿受理 平成5年2月16日 Received Feb. 16, 1993

* 正 会 員 立命館大学理工学部機械工学科 〒603 京都市北区等持院北町, Dept. of Mech. Eng., Ritsumeikan Univ., Kita-ku, Kyoto, 603

** 正 会 員 大阪産業大学短期大学部 〒574 大東市中垣内, Junior College of Automobile Indust., Osaka Sangyo Univ., Nakagaito, Daito, 574

*** 正 会 員 明石工業高等専門学校機械工学科 〒674 明石市魚住町西岡, Dept. of Mech. Eng., Akashi College of Tech., Uozumi-cho, Akashi, 674

**** 学生会員 立命館大学大学院 〒603 京都市北区等持院北町, Graduate Student, Ritsumeikan Univ., Kita-ku, Kyoto, 603

数と尺度母数を推定してそれらの分布特性を調べ、それらに及ぼす標本寸法の影響を検討するとともに、これらの推定値に及ぼす設定したワイブル係数の影響を考察した。ついで、常圧焼結窒化ケイ素と常圧焼結炭化ケイ素（以下、それぞれ窒化ケイ素、炭化ケイ素と呼ぶ）を用いた引張および曲げ荷重下での常温および高温における実験結果をもとに、これより得られるワイブル係数と尺度母数の推定値の分布とモンテカルロ・シミュレーションによる理論分布を比較し、前者の分布に及ぼす実験条件の影響について検討を加えた。

2 方 法

本シミュレーションに用いた母集団は、乗積合同法による区間 $(0, 1)$ の一様乱数を設定したワイブル係数 m と尺度母数 b をもつ次式の 2 母数ワイブル分布に従うように変換した 10^5 個のワイブル乱数である。

$$F(x) = 1 - \exp\{-(x/b)^m\} \quad (1)$$

ここで、設定した m , b の値を以下では m_0 , b_0 とし、 $(m_0, b_0) = (15, 100)$, $(10, 100)$ の 2 組にした。この 2 組の m_0 の値は後に示す窒化ケイ素と炭化ケイ素のワイブル係数の推定値の中央値に近いものである。また、 b_0 を 1 種類としたのは、 b_0 の変化は単にワイブル確率紙上で分布の横軸に沿う平行移動を生ずるのみだからである。なお、乱数の検定は変換前の一様乱数に対して行い、頻度検定、組合せ検定および Gap 検定¹⁵⁾において両側 5% の危険率で有意差のないことを確認した。

ワイブル係数と尺度母数の推定値（以下、 m , b で表わす）の分布に与える標本寸法 n の影響を調べるため、 n を 5, 10, 20, 30, 40 および 50 の 6 種類として、これらの標本を母集団から任意にそれぞれ 10^3 組抽出し、ワイブル確率紙上で直線回帰することにより、各標本寸法に対してそれぞれ 10^3 組の推定値 m と b を求めた。ここで、各組の標本において n 個のデータを小さい順に並べたときの i 番目の累積確率 P は、Faucher³⁾によって推奨されている次式のメジアンランク法を用いて算出した。

$$P = (i - 0.3) / (n + 0.4) \quad (2)$$

なお、 n 個の完全標本が与えられたとき、最尤法によるワイブル係数と尺度母数の推定値は次式を満たす m と b の値として求まる。

$$\frac{n}{m} = \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{x_i}{b} \right)^m - 1 \right\} \ln \left(\frac{x_i}{b} \right) \quad (3)$$

$$b = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^{1/m} \quad (4)$$

先に述べたように、Khalili²⁾らは分散の小さい最尤法が最適であるとしているが、線形推定法との差は小さく、両式を連立させて解くことはかなり煩雑であり、実際に、実験結果から両母数を推定する場合にもワイ

ブル確率紙上で直線回帰することがほとんどであるので、最尤法は用いないこととした。しかし、ワイブル係数が既知の場合の尺度母数の推定式（式 (4)）は簡単であり、標本 $x_1, \dots, x_n$ が与えられた場合に推定値 b に及ぼすワイブル係数 m の影響を知ることができる。この点については以下で一定範囲の検討を加えた。つぎに、窒化ケイ素と炭化ケイ素を用いた引張および曲げ荷重下での常温および高温における実験結果を文献より抽出し、式 (1) の 2 母数ワイブル分布を仮定し、メジアンランク法を用いてワイブル確率紙上で直線回帰を行い、ワイブル係数と尺度母数を推定して、それらの分布特性を求め、モンテカルロ・シミュレーションによる理論分布と比較し、考察を加えた。

3 モンテカルロ・シミュレーションによるワイブル係数と尺度母数の推定値の分布特性

3・1 ワイブル係数の推定値の分布特性

Fig. 1 はモンテカルロ・シミュレーションにより得られたワイブル係数の推定値 m の分布特性を標本寸法をパラメータとして対数正規確率紙上に図示したものである。図中の・印はワイブル係数 m と尺度母数 b の値をそれぞれ $m_0=15$, $b_0=100$ に設定したワイブル乱数を用いた場合であり、実線は各標本寸法における回帰直線を示している。また、図中の破線は $m_0=10$, $b_0=100$ に設定した場合の各標本寸法に対する回帰直線である。縦軸の累積確率 P は各標本寸法に対する 10^3 組の推定値を小さい順に並べ、次式で与えられる対称試料累積分布法を用いて算出した。

$$P = (i - 0.5) / n \quad (5)$$

ここで、 n は全数（ $=10^3$ ）で、 i は順位数である。また、横軸の m/m_0 はワイブル係数の推定値 m を設定値（ $m_0=15$ および 10 ）で標準化したものである。

このように各標本寸法 n におけるワイブル係数の推定値の分布を対数正規分布で近似した場合、その適合度を検定すると、有意水準 0.05 で $n=5, 10$ の場合を除いて有意差はなく、ほぼ対数正規分布に従う。なお、 $n=5, 10$ の場合の適合度がよくないのは Fig.

Fig. 1. Distribution of the estimates of Weibull parameter by Monte Carlo simulation.

1にみるように分布の裾野部分が直線からはずれることによるものであるが、以下では $n=5, 10$ の場合も含めて次式対数正規分布を仮定し、議論を進める。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2s^2}\right], \quad x = \log\left(\frac{m}{m_0}\right) \quad (6)$$

ここで、 μ, s は x の平均値と標準偏差である。

Fig. 2(a), (b) は Fig. 1 の各直線より μ と s の値を求め、それぞれを n の関数として図示したもので、図中の○印および●印は m_0 を 15 および 10 に設定した場合である。図(a)より n が 20 以下で平均値 μ は 1 より大きく、推定値 m は正のバイアスをもつが、 n が 20 を越すと μ はほぼ 1 に収束しており、バイアスはなくなる。また、図(b)より n が大きくなるに従って s が減少し、推定値 m のばらつきは小さくなる。さらに、Fig. 1, 2 より $m_0=15, 10$ に対する標準化した推定値 m/m_0 の分布は同一と考えてよく、これらの結果は Khalili らの結論に一致する。

3・2 尺度母数の推定値の分布特性

Fig. 3 はモンテカルロ・シミュレーションにより得られた尺度母数の推定値 b の分布特性を標準寸法をパラメータとして対数正規確率紙上に図示したものであり、図(a)は $m_0=15, b_0=100$ の場合、図(b)は $m_0=10, b_0=100$ の場合である。また、縦軸は式(5)により算出した累積確率で、横軸の b/b_0 はそれぞれの推定値 b を設定値 $b_0=100$ で標準化したものであり、図中の実線は各標準寸法における回帰直線を示したものである。この場合も、先と同様、対数正規分布に対する適合度の検定を行うと、有意水準 0.05 で $n=5, 10$ の場合を除いて有意差のないことが示される。 $n=5, 10$ の場合は前節と同様の理由で適合度はよくないが、先と同様以下では $n=5, 10$ の場合も含めて、式(6)の対数正規分布（ただし、 $x=\log(b/b_0)$ ）を仮定して検討を進める。

Fig. 4(a), (b) はこの場合の x の平均値 μ と標準偏差 s の値を標準寸法 n の関数として図示したものである。図(a)より、 n が 20 以下で μ は 1 より小さく、推定値 b は負のバイアスをもつが、 n が 20 以上では

μ が 1 に収束し、バイアスはほぼ消滅する。また、平均値 μ には m_0 の影響は認められない。つぎに、図(b)より n が大きくなるに従って s は減少し、推定値 b のばらつきが小さくなるが、 s は設定した m_0 の値に依存し、 m_0 が大きくなると同一の n に対して標準偏差 s は小さくなる。

2 母数ワイブル分布において標本 $x_1, \dots, x_n$ ($x_1 > \dots > x_n$ とする) が与えられたとき、最尤法による尺度母数の推定値 b は式(4)で得られ、それはワイブル係数 m に依存する。ここで m が変化した場合の b の増減を調べるために、式(4)の両辺の対数を取り、微分すると次式を得る。

$$\frac{d \ln b}{dm} = \frac{1}{m \sum_{i=1}^n x_i^m \ln\left(\frac{x_i}{b}\right)} \quad (7)$$

ここで、 $x_1 > \dots > x_n$ のとき尺度母数 b は $x_1 > \dots > b > \dots > x_n$ なので、 $\ln(x_1/b) > 0, \dots, \ln(x_n/b) < 0$ である。ゆえに式(7)の $\ln(x_i/b)$ はある番号 i で正から負に変わる。このことから、式(7)中の $\{ \}$ の正負を判別することは困難であるが、数値例の使用により次の関係になることがわかる。

$$d \ln b / dm > 0 \quad (8)$$

この点について後の Table I, II のところで数値例を示して再度説明するが、 $x_1, \dots, x_n$ が与えられたとき、式(8)が成立つものの、 m の変化による b の変化は実用範囲内では極めて小さい。

このため、Fig. 4(b)に見られる標準偏差 s の設定値 m_0 による変化は次の事実によるものである。すなわち、ここで用いた 10^5 個のワイブル乱数はワイブル係数を $m_0=15$ および 10 に設定して得たものであり、当然のことながら $m_0=15$ としたワイブル乱数の分布の幅は $m_0=10$ の場合のそれより小さくなる。このことは 1 組の乱数より求めた推定値 b は m_0 が大きい程、設定値 b_0 に接近する傾向をもち、したがって、推定値 b の分布の幅が小さくなって、標準偏差 s が減少することになる。

つぎに、推定値 m と b の独立性に関して、 $m_0=10, b_0=100$ に設定したワイブル乱数より 50 と 10

Fig. 2. Mean and standard deviation of the estimated Weibull parameters (m/m_0) as a function of sample size.

Fig. 3. Distribution of the estimates of scale parameter by Monte Carlo simulation.

Fig. 4. Mean and standard deviation of the estimated scale parameters (b/b_0) as a function of sample size.

の標本寸法を 10^3 組取り出し、各組より推定した m と b の間の相関関係を調べた。紙幅の関係で図は省略するが、それぞれの場合の相関係数 q は $n=50$ の場合 $q=0.126$, $n=10$ の場合 $q=0.139$ であり、両推定値の間にはほとんど相関はなく、このことから、推定値 m と b の分布はほとんど独立と考えてよい。

なお、Fig. 2 (b) と Fig. 4 (b) を比較すると後者の標準偏差 s の値は前者に比べてほぼ 1 桁小さいことから、尺度母数の推定精度はワイブル係数のそれよりかなり高く、このことは Khalili²⁾ の結果に一致する。

4 実験で得られたワイブル係数と尺度母数の推定値の分布特性

まず、Table I, II に解析に用いた窒化ケイ素と炭化ケイ素の実験結果に対する試験条件、標本寸法および試験データからワイブル確率紙上で直線回帰により推定したワイブル係数と尺度母数、ならびに平均強度を示す。これらのデータは文献番号に示すようにいくつかの研究機関で独立に得られたものであり、Table I, II において表 (a), (b) の区別は n によりグループ分けしたものである。

4・1 実験で得られたワイブル係数の推定値の分布特性

Fig. 5 (a), (b) は窒化ケイ素と炭化ケイ素について Table I, II に示したワイブル係数の推定値 m の分布を対数正規確率紙上に示したものである。図中の○印と●印の区別は Table I, II の表 (a), (b) の区別に対応して標本寸法 n の一定範囲内で推定値 m をグループ化し、その分布を見たものである。図の横軸はどのようにグループ化した実験による推定値 m を対数正規分布で近似した場合の中央値 $\tilde{m}$ で標準化したもので、それぞれの場合の $\tilde{m}$ の値を Table III に示してある。図中の実線は○印および●印で示した $m/\tilde{m}$ の分布を直線回帰したものであり、破線は先のモンテカルロ・シミュレーションによる推定値 m の理論分布 (Fig. 1 の実線) のうち $n=5, 10, 20$ の場合を取り出し、示したものである。

Table I, II における実験データは常温から高温にわたる広範囲の温度条件下で得られたものであり、Fig. 5 (a), (b) を見ると、これらの実験で得られた m は中央値の約 0.5 から 2.0 の範囲内に分布している。また、

Table I. Experimental data on Weibull and scale parameters of sintered silicon nitride.

(a) $n=10-15$

No.	Test method	Temperature T (°C)	Sample size n	Weibull parameter m	Mean strength $\bar{\sigma}_f$	Scale parameter			Intrinsic scale parameter		Ref.
						$b^{(1)}$	$b^{(2)}$	$b^{(3)}$	$\beta^{(4)}$	$\beta/\beta^{(5)}$	
SN- 1	Tension	R. T.	10	7.8	493	524	515	528	777	0.91	[7]
SN- 2	Tension	R. T.	10	12.9	640	666	664	669	869	1.02	[6]
SN- 3	Tension	1000	15	14.1	299	310	309	311	460	0.78	[13]
SN- 4	Tension	1000	10	15.0	461	477	481	483	622	1.06	[6]
SN- 5	Tension	1000	15	25.3	313	320	320	318	495	0.84	[13]
SN- 6	Tension	1000	10	9.5	343	361	357	365	536	0.91	[7]
SN- 7	Tension	1200	10	13.1	251	261	261	263	340	—	[6]
SN- 8	Tension	1300	10	11.0	96	100	99	101	130	—	[6]
SN- 9	3-point bending	R. T.	11	24.9	912	932	931	926	903	1.06	[8]
SN-10	3-point bending	R. T.	10	14.5	881	913	903	904	883	1.03	[8]
SN-11	3-point bending	R. T.	10	20.4	884	908	907	903	880	1.03	[7]
SN-12	3-point bending	R. T.	10	13.0	812	845	843	850	850	1.00	[13]
SN-13	3-point bending	1000	10	10.6	731	766	779	800	742	1.26	[8]
SN-14	3-point bending	1000	10	12.0	738	770	764	771	745	1.26	[8]
SN-15	3-point bending	1200	10	27.7	462	471	473	469	456	—	[8]
SN-16	3-point bending	1300	10	23.2	215	220	223	221	213	—	[8]
SN-17	4-point bending	R. T.	10	11.5	839	877	890	911	819	0.96	[13]

(b) $n=19-22$

No.	Test method	Temperature T (°C)	Sample size n	Weibull parameter m	Mean strength $\bar{\sigma}_f$	Scale parameter			Intrinsic scale parameter		Ref.
						$b^{(1)}$	$b^{(2)}$	$b^{(3)}$	$\beta^{(4)}$	β/β	
SN-18	Tension	R. T.	22	18.0	536	552	554	553	820	—	[10]
SN-19	Tension	1000	20	13.7	300	312	310	311	494	—	[13]
SN-20	3-point bending	1250	20	16.8	592	611	620	619	592	—	[12]
SN-21	3-point bending	1250	20	25.9	611	624	627	621	604	—	[12]
SN-22	3-point bending	1250	20	15.7	640	662	656	657	641	—	[12]
SN-23	3-point bending	1300	20	21.7	545	559	574	566	541	—	[12]
SN-24	3-point bending	1300	20	15.3	481	498	511	514	482	—	[12]
SN-25	3-point bending	1350	20	19.2	458	471	475	473	456	—	[12]
SN-26	3-point bending	1350	19	13.4	364	378	377	380	366	—	[12]
SN-27	3-point bending	1350	20	21.9	302	310	308	307	300	—	[12]

1) Scale parameter obtained by the linear regression of the fracture strengths σ_f on Weibull probability paper.

2) Scale parameter calculated by Eq. (4) using each Weibull parameter m in the above table.

3) Scale parameter calculated by Eq. (4) using Weibull parameter $\tilde{m}_0=16.5$.

4) Scale parameter obtained by the linear regression of the modified fracture strengths σ'_f on Weibull probability paper.

5) β is the median of scale parameters β plotted on log-normal probability paper; $\beta=854$ for R. T. and 589 for 1000°C.

Table II. Experimental data on Weibull and scale parameters of sintered silicon carbide.

(a) $n=5\sim7$

No.	Test method	Temperature T (°C)	Sample size n	Weibull parameter m	Mean strength $\bar{\sigma}_f$	Scale parameter			Intrinsic scale parameter		Ref.
						$b^{(1)}$	$b^{(2)}$	$b^{(3)}$	$\beta^{(4)}$	$\beta/\tilde{\beta}$	
SC-1	Tension	R.T.	7	10.5	327	343	354	355	629	—	[12]
SC-2	Tension	1200	5	6.5	278	298	291	297	585	—	[14]
SC-3	Tension	1200	7	9.5	289	304	304	306	490	—	[14]
SC-4	Tension	1200	7	10.6	299	314	311	312	576	—	[14]
SC-5	Tension	1200	5	21.0	317	325	323	321	639	—	[14]

(b) $n=8\sim15$

No.	Test method	Temperature T (°C)	Sample size n	Weibull parameter m	Mean strength $\bar{\sigma}_f$	Scale parameter			Intrinsic scale parameter		Ref.
						$b^{(1)}$	$b^{(2)}$	$b^{(3)}$	$\beta^{(4)}$	$\beta/\tilde{\beta}^{(5)}$	
SC-6	Tension	R.T.	8	10.3	303	318	318	319	584	1.22	[12]
SC-7	Tension	R.T.	10	7.8	298	317	315	319	582	1.22	[12]
SC-8	Tension	R.T.	9	5.7	258	279	275	287	451	0.94	[12]
SC-9	Tension	R.T.	10	9.3	303	319	313	314	586	1.23	[13]
SC-10	Tension	R.T.	10	11.9	294	307	305	305	496	1.04	[12]
SC-11	3-point bending	R.T.	15	10.0	470	494	500	502	507	1.06	[9]
SC-12	3-point bending	R.T.	10	10.8	397	416	413	413	427	0.89	[14]
SC-13	3-point bending	R.T.	9	7.4	367	391	388	396	401	0.84	[13]
SC-14	3-point bending	R.T.	10	13.2	358	372	370	368	381	0.80	[13]
SC-15	3-point bending	800	10	16.2	441	456	465	456	467	—	[9]
SC-16	3-point bending	1000	10	6.9	481	515	534	560	528	—	[9]
SC-17	3-point bending	1200	10	10.2	529	556	566	568	570	—	[9]
SC-18	3-point bending	1400	10	7.3	435	464	469	485	476	—	[9]
SC-19	3-point bending	1500	10	16.2	436	450	455	449	461	—	[9]
SC-20	4-point bending	R.T.	10	13.9	335	348	349	346	424	0.89	[13]

1) Scale parameter obtained by the linear regression of the fracture strengths σ_f on Weibull probability paper.2) Scale parameter calculated by Eq. (4) using each Weibull parameter m in the above table.3) Scale parameter calculated by Eq. (4) using Weibull parameter $\tilde{m}_0=10.7$.4) Scale parameter obtained by the linear regression of the modified fracture strengths σ'_f on Weibull probability paper.5) $\tilde{\beta}$ is the median of scale parameter β plotted on log-normal probability paper; $\tilde{\beta}=478$ for R.T.

図(a)の○印は $n=10\sim15$ の実験結果をプールしたものであるが、Table I(a)より大部分の実験は $n\cong10$ で行われており、 $n=15$ の実験は2組にすぎない。したがって、図(a)の○印の分布を直線回帰した実線は近似的に $n=10$ に対するものと考えてよく、この実線は $n=10$ と $n=5$ に対する理論分布の破線の間にあるが、 $n=10$ の破線に近く位置している。同様にして、図(a)中●印は $n=19\sim22$ の実験結果をプールしたものであるが、Table I(b)より実質的には $n=20$ の場合と考えてよく、この分布を直線回帰した実線は $n=20$ に対する理論分布を与える破線と極めてよく一致している。ついで、図(b)を見ると、 $n=5\sim7$ の○印は実験の組数が少ないがその分布を直線回帰した結果は $n=5$ の理論分布とかなり一致している。また、同図●印は $n=8\sim15$ に対するものであるが Table II(b)より大部分の実験は $n=10$ に対するものであり、●印を直線回帰した実線は $n=10$ の理論分布にほぼ一致することが認められる。

上述のように Fig. 5(a), (b)中の $m/\tilde{m}$ の分布は n により区分する以外は、荷重形式や常温および高温といった実験条件で区別することなく一括処理しているが、これら因子による分布の偏りは観察されない。したがって、第一近似としてここで用いた窒化ケイ素と炭化ケイ素の静強度の分布におけるワイブル係数の推

定値のばらつきは、応力状態や試験温度の違いによるものではなく、 n が比較的小さいことによると判断される。このことから、ワイブル係数は第一近似として

Table III. Median of Weibull parameters estimated by experiments.

Material	Sample size n	Median of Weibull parameter	
		$\tilde{m}$	$\tilde{m}_0$
Sintered silicon nitride	10~15	14.7	16.5
	19~22	17.8	
Sintered silicon carbide	5~7	10.8	10.7
	8~15	10.0

Fig. 5. Distribution of normalized Weibull parameter estimated by experiments.

実験条件によらない材料定数と考えてよく、各材料に固有のワイブル係数が存在すると考えられる。Table III に示した $\tilde{m}$ の値はその目安を与えるものであるが、それらは両材料について標本寸法の範囲によって多少の違いをみせている。以下、この点について考察する。

まず、両材料について Table I, II 中の各組の実験結果から推定した m と b の値を用いて、各組における実験結果の平均強度 $\bar{\sigma}_f$ を次式により求めた。

$$\bar{\sigma}_f = b\Gamma(1+1/m) \quad (9)$$

ここで、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数であり、Table I, II にこうして求めた $\bar{\sigma}_f$ の値を示す。この $\bar{\sigma}_f$ で各組の破壊強度データ σ_f を標準化し、この標準化破壊強度 $\sigma_f/\bar{\sigma}_f$ を各材料についてプールした上で、メジアンランク法を用いてワイブル確率紙上に図示し、式 (1) のワイブル分布をあてはめ、ワイブル係数を求めると Table III に示したように窒化ケイ素に対して $\tilde{m}_0 = 16.5$ 、炭化ケイ素に対して $\tilde{m}_0 = 10.7$ となる。これらの値は各材料について 2 種の標本寸法範囲に対して得られた $\tilde{m}$ の値の中間にあり、プールした場合の n の大きさ（窒化ケイ素では 382、炭化ケイ素では 182）から考えて、各材料に対するワイブル係数としてはほぼ正確な値を与えるものと考えてよい。

4・2 実験で得られた尺度母数の推定値の分布特性

3・2 節において尺度母数の推定値 b のワイブル係数 m に対する依存性を述べ、さらに推定値 b と推定値 m の間にはほとんど相関がなく、 b と m は独立であると考えてよいことを示したが、ここで Table I, II を使って推定値 b の m 依存性について触れておく。表中の尺度母数 b は各組の破壊強度データ σ_f をワイブル確率紙上に図示し、直線回帰によりワイブル係数 m とともに推定した値であり、 b' はこうして推定した表中の各 m の値を用いて式 (4) により実験データから計算した尺度母数の推定値、 b'' は m の値として Table III の $\tilde{m}_0$ を用いて式 (4) から同様に計算した推定値である。各試験番号について、 b 、 b' 、 b'' の値を比較すると、その差は非常に小さく実用的には無視できる程度である。また、 b' と b'' の値を比較すると $m < \tilde{m}_0$ で $b' < b''$ となることから、同一データ（式 (7) の $x_1, \dots, x_n$ ）に対して m 値が増加すると b が微増することがわかる。

さて、尺度母数は一般に負荷状態や試験温度等の試験条件に依存するため、試験条件の影響を除いてその分布を検討するには、各試験条件下で得られた破壊強度を標準化する必要がある。そのため、まず各試験条件における有効体積 V_{eff} を求め、各試験条件から得られた各組の破壊強度データ σ_f を次式により単位体積 1 mm^3 における破壊強度 σ'_f に換算した。

$$\sigma'_f = \sigma_f \cdot (V_{eff})^{1/\tilde{m}_0} \quad (10)$$

そして、各組のデータ σ'_f の分布をワイブル確率紙上であらためて直線回帰し、得られた尺度母数の推定値を β として、その分布を調べた。なお、式 (10) 中の $\tilde{m}_0$ の値には各材料について Table III の値を用いた。推定値 β の値を Table I, II に示す。こうして求めた推定値 β （以下、換算尺度母数と呼ぶ）は各組で異なる試験条件の中で荷重形式と試験片形状の差を考慮したものであるが、温度条件の違いは考慮されていない。そこで同一試験温度条件が 6 以上ある窒化ケイ素 (Table I(a)) の常温および 1000°C の場合と炭化ケイ素 (Table II(b)) の常温の場合をとり出し、 β の分布を対数正規確率紙上に図示したものが Fig. 6 であり、図中の実線はそれぞれの場合に対する回帰直線である。図より、各試験温度における換算尺度母数 β の分布は対数正規分布でほぼ近似できる。

つぎに、この β の分布をモンテカルロ・シミュレーションによる尺度母数の分布と比較するために、Fig. 6 のそれぞれの実線から中央値 $\tilde{\beta}$ を求め、この $\tilde{\beta}$ で標準化した β の分布を Fig. 7 に示す。このように $\beta/\tilde{\beta}$ を横軸にとると、試験条件に関係なく尺度母数の推定値の分布を比較できる。図中の実線はそれぞれの場合に対する回帰直線であり、このときの $\beta/\tilde{\beta}$ の値を Table I(a)、II(b) に、 $\tilde{\beta}$ の値は各表の欄外に示す。

Fig. 7 の破線はモンテカルロ・シミュレーションで得られた $m_0 = 15$ の場合の推定値 b/b_0 の分布 (Fig. 3(a)) において標本寸法 $n = 10$ および 20 の場合を、また、一点鎖線は $m_0 = 10$ の場合 (Fig. 3(b)) にお

Fig. 6. Distribution of intrinsic scale parameter estimated by experiments.

Fig. 7. Distribution of normalized intrinsic scale parameter estimated by experiments.

る $n=5, 10$ および 20 の場合を取り出して, 比較のために示したものである. Table III より窒化ケイ素の場合のワイブル係数の推定値 $\tilde{m}_0=16.5$ は $m_0=15$ に近いことから Fig. 7 の $\bigcirc$ 印と $\square$ 印の分布は上述の破線の分布と比較すればよく, 炭化ケイ素の場合 $\tilde{m}_0=10.7$ は $m_0=10$ に近いことから $\bullet$ 印の分布は一点鎖線の分布と比較すればよい.

図より, $\bigcirc$ 印で示す窒化ケイ素の常温での $\beta/\tilde{\beta}$ の分布 ($n=10\sim 15$) はモンテカルロ・シミュレーションによる理論分布に比較的近く位置しているが, 後者の $n=10$ の場合よりはむしろ $n=5$ の場合に近く, 実験で得られた $\beta/\tilde{\beta}$ の分布はモンテカルロ・シミュレーションによる同一標本寸法の b/b_0 の理論分布と一致するとは言いがたい. また, $\square$ 印と $\bullet$ 印の $\beta/\tilde{\beta}$ の分布は b/b_0 の理論分布から大きくはずれている.

このように, 実験結果から標準化した尺度母数の推定値の分布とモンテカルロ・シミュレーションによる理論分布が一致しないことは, 上述の方法で有効体積や試験温度の差を考慮した $\beta/\tilde{\beta}$ を用いても, なお, それらを同一母集団として扱い得ないことを示しており, このことは焼結過程を含む材料の製造方法, 試験片の作成方法, 各研究機関での実験方法の相違が両材料の強度に敏感に影響するためであると考えられる.

以上のことから本章の結果をまとめると, 実験で得られたワイブル係数の分布はモンテカルロ・シミュレーションによる理論分布とはほぼ一致するものの, 尺度母数の分布は理論分布と全く一致しないことから, Table I, II の各組の実験結果は各材料について同一母集団からの試験片による結果であると言えない. しかし, 各材料についてワイブル係数のみは第一近似的に共通の値をもつと主張することができる. このことは実際的には非常に有益であり, 今後において個々の実験で求めたワイブル係数の値を Table I, II の m の値に追加して解析することにより, さらに確度の高いワイブル係数の推定を可能ならしめるものである. 一方, 尺度母数については 3・2 節で述べたように, 同一母集団に属すると考えてよい場合の個々の実験で求まる尺度母数の推定値にはばらつきが小さく, 推定精度が高いためにその値を母集団のそれとしても実用上はあまり大きな誤差を伴わないと考えてよい.

5 結 言

得られた結論は次のとおりである.

(1) 設定したワイブル係数 m_0 と尺度母数 b_0 をもつワイブル乱数を用いてモンテカルロ・シミュレーションにより得られたワイブル係数 m と尺度母数 b の推定値の分布は標本寸法が少ない $n=5, 10$ の場合を除いて, はほぼ対数正規分布に従うと考えてよい. また, 両推定値の間にはほとんど相関はなく, 独立と考

えて取扱うことができる.

(2) 上で得られた推定値 m と b の分布は標本寸法 n が大きくなるに従って標準偏差が減少し, n が 20 を越すと平均値はほぼ設定値 m_0 あるいは b_0 に収束する. また, 標準化した推定値 m/m_0 の分布は従来の研究結果と同様, 設定した母集団のワイブル係数 m_0 の値に依存しない. しかし, 推定値 b の分布は明らかに設定した母集団のワイブル係数 m_0 の値に依存し, m_0 が大きくなると同一の n に対して b の標準偏差は小さくなる.

(3) モンテカルロ・シミュレーションによるワイブル係数の推定値の理論分布と実験結果から得られるワイブル係数の推定値の分布は良い対応を示す. このことから, ワイブル係数は第一近似として実験条件によらない材料定数であると考えられ, 窒化ケイ素と炭化ケイ素に対する値は Table III の $\tilde{m}_0$ で与えられる.

(4) 有効体積や試験温度の差を考慮した尺度母数の推定値の分布をモンテカルロ・シミュレーションによる理論分布と比較すると, 両分布の一致は見られない. このことは焼結過程を含む材料の製造方法, 試験片の作成方法, 各研究機関での実験方法の相違が両材料の強度に敏感に影響するためであると考えられる.

(平成 4 年 5 月 23 日 日本材料学会第 41 期学術講演会にて講演)

参 考 文 献

- 1) W. Weibull, J. Appl. Mech., **18**, 293 (1951).
- 2) A. Khalili and K. Kromp, J. Mat. Sci., **26**, 6741 (1988).
- 3) B. Faucher and W. R. Tyson, J. Mat. Sci. Lett., **7**, 1199 (1988).
- 4) G. Quinn, J. Am. Ceram. Soc., **73**, 2374 (1990).
- 5) T. T. Shih, Eng. Fract. Mech., **13**, 257 (1980).
- 6) 田中道七, 岡部永年, 境田彰芳, 材料, **36**, 563 (1987).
- 7) 岡部永年, 伊藤洋茂, 平田英之, 村松正光, 材料, **36**, 1012 (1987).
- 8) 田中道七, 中山英明, 今道高志, 未発表.
- 9) 田中道七, 中山英明, 今道高志, 山元 茂, 岡部永年, 日本材料学会第 41 期学術講演会前刷, 345 (1992).
- 10) ファインセラミックス協会, “ファインセラミックスの標準化に関する調査研究報告書”, p. 131 (1984).
- 11) ファインセラミックス協会, 同上, p. 15 (1985).
- 12) ファインセラミックス協会, 同上, p. 6 (1986).
- 13) ファインセラミックス協会, 同上, p. 5 (1987).
- 14) 日本ファインセラミックス協会, 同上, p. 57 (1988).
- 15) 山内二郎編, “統計値表”, p. 195 (1972) 日本規格協会
- 16) 石川 浩, 材料, **24**, 693 (1975).
- 17) 岡部永年, 平田英之, 村松正光, 浜田晴一, 材料, **38**, 783 (1989).