微小だ円き裂群干渉解析のための交代繰返し法[†]

西岡 俊 久* 徳 永 崇** 明 石 委 子***

Alternating Method for Interaction Analysis of a Group of Micro-Elliptical Cracks

by

Toshihisa NISHIOKA*, Takashi TOKUNAGA** and Tomoko AKASHI***

An alternating method is developed for the interaction analysis of arbitrary distributed multiple elliptical cracks. The completely analytical solutions (VNA solutions) for a single elliptical crack in an infinite solid, subject to arbitrary crack-face tractions, are implemented in the present alternating method, together with the coordinate transformations for stress tensor. Since only the VNA solutions of individual cracks are used as a basic solution of the Schwartz-Neumann alternating technique, the present method leads to a highly accurate and efficient numerical tool for routine evaluation of the stress intensity factors for interacting multiple cracks. Numerical demonstrations are also given for interaction problems of several types.

Key words: Elasticity, Fracture mechanics, Stress intensity factor, Alternating method, Micro-elliptical cracks, Mixed-mode, Analytical solution, VNA solution, Interaction

1 緒 言

一般に機械構造物中のき裂や欠陥はだ円き裂や半(部分)だ円き裂として近似され、強度評価や安全設計がなされることが多い。近年、飛行機や原子炉压力容器、ガスパイプラインなどの老朽化、また、先進鋭性材料のマイクロクラックタフニング機構の解明などのため三次元だ円き裂群問題が注目されてきた。

しかし、このような多数だ円き裂群解析は、通常の有限要素法や境界要素法では膨大な要素数が必要であり、事実上不可能である。このため、新しい概念による高効率な解析手法の開発が必要である。

無限体中1個のだ円き裂に任意の次数の多項式で表される分布荷重が作用する場合の一般解の導出の試みが、Vijayakumar-Atluri³⁾によってなされた。その後Nishioka-Atluri⁴⁾が完全な一般解を導くことに成功した。完全な一般解には、(i) 任意分布荷重と任意次数調和応力関数との間に成立する係数間関係式が非特異代数方程式であること、(ii) 任意の次数の一般だ円積分の評価式、および(iii) 任意次数ポテンシャル関数の任意次数偏微分評価式などが必要である。これらの評価式なども含めて、この解は簡便のため、VNA解と呼ばれている^{2),5)}。無限体中単数だ円き裂に任意次数の分布荷重が作用する場合の解析解は、上記(i)~(iii)に

する数学的困難さから当時不可能とされていた⁶⁾。これに対し、VNA解はこれらの問題点をすべて克服したものである。

本研究では、最初に無限体中の単数だ円き裂のVNA解の概要を示す。これを基礎にした無限体中複数だ円き裂問題の系統的な解析は、Nishiokaら⁷⁾⁻⁹⁾によって開発された複数だ円き裂のための交代繰返し法(Alternating Method)の利用により可能となり、モードI型問題に対しては、すでに効率の良い解析方法が開発されている。

本研究では、VNA解のみを利用する微小だ円き裂群問題のための交代繰返し法を開発した。開発した手法は非常に汎用性が高く、3次元のなき裂群の配置の系統的な変化にも容易に対応することが可能である。この方法によって複雑な多数き裂群問題も経済的かつ高精度に効率よく解くことが可能となった。

解析例として、非平行な2個のだ円き裂の場合を解析した。さらに、3個以上の多数だ円き裂群を解析し、それらの干渉挙動を明らかにした。

2 無限体中単数だ円き裂のVNA解の概要

2・1 き裂面分布荷重と調和応力関数

無限体中に存在する単数だ円き裂の解析解について述べる。だ円き裂の中心に原点を持つ直交デカルト座

[†] 原稿受理 平成5年12月17日 Received Dec. 17, 1993

* 正会員 神戸商船大学商船学部電子機械系 〒658 神戸市東灘区深江南町, Dept. of Ocean Mech. Eng., Kobe Univ. of Mercantile Marine, Higashinada-ku, Kobe, 658

** 神戸商船大学大学院 〒658 神戸市東灘区深江南町, Graduate Student, Kobe Univ. of Mercantile Marine, Higashinada-ku, Kobe, 658

*** 三井造船(株) 〒104 東京都中央区築地, Mitsui Eng. & Shipbuilding Co. Ltd., Chuo-ku, Tokyo, 104

標 (x_1, x_2, x_3) を考える。だ円き裂の解析では、だ円体座標を用いたほうが便利であることが多い。そのだ円体座標 ξ_α ($\alpha=1, 2, 3$) は次の 3 次方程式の解で表される。

$$\omega(s) = 1 - \left(\frac{x_1^2}{a_1^2 + s} \right) - \left(\frac{x_2^2}{a_2^2 + s} \right) - \left(\frac{x_3^2}{s} \right) = 0 \quad (1)$$

$$-a_1^2 \leq \xi_1 \leq -a_2^2 \leq \xi_2 \leq 0 \leq \xi_3 < \infty$$

このだ円体座標を用いると $x_3=0$ 平面で、き裂内部は $\xi_3=0$ 、き裂外部は $\xi_2=0$ 、そしてき裂縁は $\xi_2=\xi_3=0$ で簡単に表すことができる。

ここで、だ円き裂面上に作用する任意の分布荷重 $\sigma_{3\alpha}^{(0)}$ ($\alpha=1, 2, 3$) は次式のように級数展開できるものとする。

$$\sigma_{3\alpha}^{(0)} = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^m A_{\alpha, m-n, n}^{(i, j)} x_1^{2m-2n+i} x_2^{2n+j}; \quad (\alpha=1, 2, 3) \quad (2)$$

ここに $A_{\alpha, m-n, n}^{(i, j)}$ は未定係数であり、 (i, j) はそれぞれ x_1, x_2 軸に対する荷重の対称性を示している。 M は任意の整数で式 (2) に対する完全多項式の次数 Mc と $Mc=2M+1$ の関係があり、各応力成分の多項式項数 N と $N=(M+1)(2M+3)$ の関係がある。

一方、応力 σ_{ij} は調和応力関数 f_α ($\alpha=1, 2, 3$) を用いて次のように表すことができる。

$$\sigma_{11} = 2\mu [f_{3, 11} + 2\nu f_{3, 22} - 2f_{1, 31} - 2\nu f_{2, 32} + x_3(\nabla \cdot \vec{f})_{, 11}] \quad (3a)$$

$$\sigma_{22} = 2\mu [f_{3, 22} + 2\nu f_{3, 11} - 2f_{2, 32} - 2\nu f_{1, 31} + x_3(\nabla \cdot \vec{f})_{, 22}] \quad (3b)$$

$$\sigma_{12} = 2\mu [(1-2\nu)f_{3, 12} - (1-\nu)(f_{1, 23} + f_{2, 13}) + x_3(\nabla \cdot \vec{f})_{, 12}] \quad (3c)$$

$$\sigma_{33} = 2\mu [(f_{3, 11} + f_{3, 22}) + x_3(\nabla \cdot \vec{f})_{, 33}] \quad (3d)$$

$$\sigma_{31} = 2\mu [f_{1, 11} + (1-\nu)f_{1, 22} + \nu f_{2, 21} + x_3(\nabla \cdot \vec{f})_{, 13}] \quad (3e)$$

$$\sigma_{32} = 2\mu [f_{2, 22} + (1-\nu)f_{2, 11} + \nu f_{1, 12} + x_3(\nabla \cdot \vec{f})_{, 23}] \quad (3f)$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = f_{1, 1} + f_{2, 2} + f_{3, 3} \quad (4)$$

ここで、 μ, ν はそれぞれ横弾性係数、ポアソン比を表す。また調和応力関数は次のように表すことができる。

$$f_\alpha = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^k C_{\alpha, k-l, l}^{(i, j)} F_{2k-2l+i, 2l+j}; \quad (\alpha=1, 2, 3) \quad (5)$$

ここに、 $C_{\alpha, k-l, l}$ は未定係数であり、 $F_{2k-2l+i, 2l+j}$ はポテンシャル関数である。

2・2 未定係数間の関係式

き裂面上の境界条件は $\sigma_{3\alpha} = \sigma_{3\alpha}^{(0)}$ ($\alpha=1, 2, 3$) であるので式 (2) および式 (3) より、調和応力関数 f_α を用いて次式の間係数を得ることができる。

$$\sigma_{3\alpha}^{(0)} = 2\mu [(1-\nu)(f_{\alpha, 11} + f_{\alpha, 22}) + \nu(f_{1, 1\alpha} + f_{2, 2\alpha})]; (\alpha=1, 2) \quad (7)$$

$$\sigma_{33}^{(0)} = 2\mu(f_{3, 11} + f_{3, 22}) \quad (8)$$

係数 $|A|$ と $|C|$ の関係は、式 (7) と式 (8) に式 (2) と式 (5) を代入して、 x_1 および x_2 の次数ごとに両辺の係数を比較等置することにより得ることができる。⁴⁾ モード I に対しては、次のようになる。

$$A_{3, m-n, n}^{(i, j)} = 2\mu \frac{(-1)^{m+i+j+1}}{(2m-2n+i)!(2n+j)!} \sum_{k=m}^M \sum_{l=0}^k (-1)^k [I_1^{(i, j)} J_{L_1+1, L_2, 0}(0) + I_2^{(i, j)} J_{L_1, L_2+1, 0}(0)] \cdot C_{3, k-l, l}^{(i, j)}; \\ (i=0, 1, j=0, 1, m=0, 1, \dots, M, \\ n=0, 1, \dots, m) \\ L_1 = m-n+k-l+i, L_2 = n+l+j \quad (9)$$

また、モード II, III の混合モードでは次のようになる。

$$A_{\alpha, m-n, n}^{(i, j)} = 2\mu \frac{(-1)^{m+i+j+1}}{(2m-2n+i)!(2n+j)!} < \sum_{k=m}^{M_1} \sum_{l=0}^k (-1)^k \{ (1-\nu) [I_1^{(i, j)} J_{L_1+1, L_2, 0}(0) + I_2^{(i, j)} J_{L_1, L_2+1, 0}(0)] \\ + \nu I_{\alpha}^{(i, j)} J_{L_1+\sigma_{1\alpha}, L_2+\sigma_{2\alpha}, 0}(0) \} \cdot C_{\alpha, k-l, l}^{(i, j)} \\ + (-1)^{k+1-i-j} \sum_{k=m_2}^{M_2} \sum_{l=0}^k \nu I_{12}^{(1-i, 1-j)} J_{L_1+1-l, L_2+1-j, 0}(0) \cdot C_{\beta, k-l, l}^{(1-i, 1-j)} >; \\ (i=0, 1, j=0, 1, \alpha=1, 2, \beta=3-\alpha \\ M_1 = M - \delta_{ij} \delta_{i1}, M_2 = M - \delta_{ij} \\ m_2 = m + (-1)^{1+i} \delta_{ij}, m=0, 1, \dots, M_1, \\ n=0, 1, \dots, m) \quad (10)$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。また、このとき以下の関係が成り立つ。

$$I_{\alpha}^{(i, j)} = \frac{(2k+i+j+1)!}{(k-m)!} \frac{(2L_1+2\delta_{1\alpha})!}{(L_1+\delta_{1\alpha})!} \cdot \frac{(2L_2+2\delta_{2\alpha})!}{(L_2+\delta_{2\alpha})!} \quad (11)$$

$$I_{12}^{(1-i, 1-j)} = \frac{(2k+3-i-j)!}{(k-m+1-i-j)!} \frac{(2L_1+2-2i)!}{(L_1+1-i)!} \cdot \frac{(2L_2+2-2j)!}{(L_2+1-j)!} \quad (12)$$

式 (9), (10) をマトリックス表示すると、

$$\{A_{3, m-n, n}^{(i, j)}\} = [B_{33}] \{C_{3, k-l, l}^{(i, j)}\} \quad (13)$$

$$N \times 1 \quad N \times N \quad N \times 1$$

$$\left\{ \begin{matrix} A_{1, m-n, n}^{(i, j)} \\ A_{2, m-n, n}^{(i, j)} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} [B_{11}] & [B_{12}] \\ [B_{21}] & [B_{22}] \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} C_{1, k-l, l}^{(i, j)} \\ C_{2, k-l, l}^{(i, j)} \end{matrix} \right\} \quad (14)$$

$$2N \times 1 \quad 2N \times 2N \quad 2N \times 1$$

となる。これをまとめると、次式のようになる。

$$[A] = [B] [C] \quad (15)$$

$$3N \times 1 \quad 3N \times 3N \quad 3N \times 1$$

ここに、

$$[A] = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} [B_{11}] & [B_{12}] & [0] \\ [B_{21}] & [B_{22}] & [0] \\ [0] & [0] & [B_{33}] \end{bmatrix},$$

$$|C| = \begin{Bmatrix} |C_1| \\ |C_2| \\ |C_3| \end{Bmatrix} \quad (16)$$

なお文献4)において式(10)に相当する式に誤記があったことを付記する。

また、式(9)、(10)中や応力成分評価に必要な一般だ円積分は次式で表される。⁴⁾

$$J_{p-q, q-r, r}(\xi) = \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{ds}{(s+a_1^2)^{p-q+1/2}(s+a_2^2)^{q-r+1/2}(s+a_3^2)^{r+1/2}} \quad (17)$$

任意の整数パラメータ p, q, r に対する上式の一般評価式は、第1種、第2種だ円積分およびヤコビのだ円関数の複雑な組合せで表すことができ、詳細は文献4)に与えられている。さらに、応力分布を評価するためには、式(3)~(6)からわかるように任意次数のポテンシャル関数 $F_{2k-2l+i, 2l+j}$ の高次偏微分が必要であるが、文献4)においてその評価式の詳細が与えられている。

2・3 だ円き裂縁での応力拡大係数分布

与えられた荷重に対し未定係数 $|A|$ を決定し、式(13)、(14)あるいは式(15)を解くことにより未定係数 $|C|$ を決定することができる。これにより応力が決定され、き裂縁における特異応力項の係数として応力拡大係数を評価できる。すなわち、だ円き裂縁での各モードの応力拡大係数 K_I, K_{II}, K_{III} は係数 $|C|$ を用いて次のように表すことができる。

$$K_I = 8\mu \left(\frac{\pi}{a_1 a_2} \right)^{1/2} A^{1/4} \frac{1}{a_1 a_2} H_3 \quad (18)$$

$$K_{II} = 8\mu \left(\frac{\pi}{a_1 a_2} \right)^{1/2} A^{-1/4} \frac{1}{a_1 a_2} \left[H_1 a_2 \cos \theta + H_2 a_1 \sin \theta \right] \quad (19)$$

$$K_{III} = 8\mu \left(\frac{\pi}{a_1 a_2} \right)^{1/2} A^{-1/4} \frac{(1-\nu)}{a_1 a_2} \left[H_2 a_2 \cos \theta - H_1 a_1 \sin \theta \right] \quad (20)$$

$$H_\alpha = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^k (-2)^{2k+i+j} (2k+i+j+1)! \cdot \left(\frac{\cos \theta}{a_1} \right)^{2k-2l+i} \left(\frac{\sin \theta}{a_2} \right)^{2l+j} \cdot C_{\alpha, k-l, i, j}^{(i, j)}; \quad (\alpha=1, 2, 3) \quad (21)$$

ここに、 $A = a_1^2 \sin^2 \theta + a_2^2 \cos^2 \theta$ であり、また、 θ はだ円角で x_1 軸より測られる。

3 任意分布多数だ円き裂群解析のための交代繰返し法

多数だ円き裂群問題の解析に対し、本手法に必要な基本解は、2章で示したVNA解のみである。つぎに、この方法の解析手順をフローチャートにしてFig.1に示し、各ステップについて、以下で説明する。

Fig. 1. The flow chart of the alternating technique for multiple cracks.

<ステップ 1> 外力が全体座標系で与えられた場合、各き裂面上の応力に変換し、応力分布を局所座標系で記述する。重ね合わせの原理より、これらの逆向きの応力が各き裂面に作用する問題に変換し、解析を進める。すなわち各き裂に対する式(2)の係数 $|A|$ を決定する。その際、次に示される座標変換が必要である。

Fig.2に示されるように、全体座標系を X_i ($i=1, 2, 3$), n 番目のだ円き裂の局所座標系を $x_i^{(n)}$ ($i=1, 2, 3$) とし、だ円き裂の長軸、短軸を $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}$ とする。ここで上添字の (n) はき裂の番号を表す。

それぞれ $x_i^{(n)}$ 軸 ($i=1, 2, 3$) に沿った単位ベクトルに対する全体座標系の方向余弦ベクトル $\{a_{ij}^{(n)}\}$ は次のように表すことができる。

$$\{a_{iP}\} = \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}\}^T; \quad (i=1, 2, 3) \quad (22)$$

ここで、 $a_{ij}^{(n)}$ ($i, j=1, 2, 3$) は全体座標系と n 番だ円き裂局所座標系との座標変換マトリックスとなる。

これにより、全体座標系から n 番き裂座標系への座標、応力の変換式は次のように表される。

$$x_i^{(n)} = a_{ij}^{(n)} \{X_j - X_j^{(n)}\} \quad (23)$$

Fig. 2. Various coordinate systems for multiple elliptical cracks.

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \alpha_{ip}^{(n)} \alpha_{jq}^{(n)} \sigma_{pq}^{(0)} \quad (24)$$

ここに $X_j^{(n)}$ は n 番だ円き裂の中心点の全体座標値, 上添字 (g) は全体座標系成分を表す. 下添字については総和規約に従うものとする.

例えば, Fig. 2 の例では $\sigma_{33}^{(0)} = \sigma$ で他成分はすべてゼロとして, 式 (24) より各き裂面にかかる荷重が計算できる.

<ステップ 2> ステップ1で決定された各き裂に対する係数 $|A|$ を式 (15) に代入して, 係数 $|C|$ について解き, 各き裂に対する調和応力関数 f_a を決定する.

<ステップ 3> 式 (18)~式 (20) より, 現在の繰返しでの残差荷重寄与分による応力拡大係数を計算する.

<ステップ 4> 各き裂を無限体中単数だ円き裂とみなし, 無視された他のき裂面上の応力分布を式 (3) で与えられる解析解より計算する. このとき, 以下に示される式を用いて座標変換を行い, 各き裂面上の応力分布を求める.

Fig. 2 のような l 番き裂座標系から全体座標系へ, また全体座標系から k 番き裂座標系への応力変換をマトリックス表示すると式 (24) より次のようになる.

$$[\sigma^{(k)}] = [\alpha^{(l)}]^T [\sigma^{(l)}] [\alpha^{(l)}] \quad (25)$$

$$[\sigma^{(k)}] = [\alpha^{(k)}] [\sigma^{(0)}] [\alpha^{(k)}]^T \quad (26)$$

したがって l 番から k 番き裂座標系への応力変換は, 式 (25) を式 (26) に代入して, 次式のように表される.

$$[\sigma^{(k)}] = [\alpha^{(kl)}] [\sigma^{(l)}] [\alpha^{(kl)}]^T \quad (27)$$

ここで

$$[\alpha^{(kl)}] = [\alpha^{(k)}] [\alpha^{(l)}]^T \quad (28)$$

$$[\alpha^{(kl)}]^T = [\alpha^{(l)}] [\alpha^{(k)}]^T \quad (29)$$

また $k=l$ のとき, 座標変換マトリックスの直交性より

$$[\alpha^{(kl)}] = [\alpha^{(k)}] [\alpha^{(k)}]^T = [I] \quad (30)$$

となる. ここで $[I]$ は単位マトリックスを表す.

全き裂に対して同様の計算を行い, 各き裂面上で他のき裂の応力分布のために生じる残差応力分布を評価する.

<ステップ 5> 各き裂面上でモードごとの残差応力 (モード I: $\sigma_{33}^{(n)}$, モード II, III: $\sigma_{31}^{(n)}$ および $\sigma_{32}^{(n)}$) の大きさを調べる. すべてのき裂に対して各モードの残差応力が十分小さく, 許容範囲内であれば繰返し計算を終了し, ステップ8へ移る. この許容値は本論文では外荷重 σ の 0.001% とした. 1 つでも残差応力が許容値より大きい場合次のステップへ進み繰返し計算を続ける.

<ステップ 6> 各き裂面上の応力自由条件 $\sigma_{3a}^{(n)} = 0$ ($a=1, 2, 3$) を満たすように, ステップ5で計算した残差応力と同じ大きさで逆向きの応力 σ_{3a}^R ($a=1, 2, 3$) をかける.

<ステップ 7> 各き裂面上の上記の残差荷重に対して, 係数 $|A|$ を決定する. この時, 以下に示す最小自乗法を用いる.

$$I_a = \int_{S_c} (\sigma_{3a}^R - \sigma_{3a}^{(0)})^2 dS \quad (a=1, 2, 3) \quad (31)$$

式 (2) をマトリックス表示すると

$$\sigma_{3a}^{(0)} = [L]^T [A_a] \quad (32)$$

式 (32) を式 (31) に代入し, $\partial I_a / \partial [A_a] = 0$ とおくと, $[A_a]$ について次のような代数方程式の解が得られる.

$$[A_a] = [H]^{-1} [R_a] \quad (33)$$

ここで,

$$[H] = \int_{S_c} [L] [L]^T dS \quad (34)$$

$$[R_a] = \int_{S_c} [L] \sigma_{3a}^R dS \quad (35)$$

以上より, 各き裂で係数 $|A|$ が決定される.

上記のステップ2から7までを, 全き裂面上の各モードの残差応力が許容範囲内になるまで繰返す.

<ステップ 8> 全き裂面上ですべてのモードの残差応力が許容範囲内になれば, 各き裂面の最終的な解は, 各繰返しの応力拡大係数の総和 (重ね合わせ) により求められる. また, 任意の点における応力, ひずみ, 変位なども同様に各繰返し寄与分の重ね合わせによって評価できる.

4 だ円き裂群干渉問題の解析

いま Fig. 3 のように各き裂中心間距離の全体座標系成分を d_i とすると次のようになる.

$$d_i^{(kl)} = X_i^{(k)} - X_i^{(l)} \quad (i=1, 2, 3) \quad (36)$$

本論文の例題では問題を単純化するため, $a_1 = a_1^{(k)} = a_1^{(l)}$, $a_2 = a_2^{(k)} = a_2^{(l)}$, $d_i = d_i^{(kl)}$ とした. これらに対応する無次元化したパラメータを下記のように定める.

$$\lambda_i = \frac{d_i}{2a_2} \quad (i=1, 2, 3) \quad (37)$$

つぎに, き裂の方向を表すため全体座標の X_i 軸回りに対する各き裂の傾斜角を ϕ_i ($i=1, 2, 3$) として表す.

Fig. 3. Two elliptical cracks with rotated angles of $\pm\phi_1$.

また、応力拡大係数を比較するために無次元化した干渉係数 F_M ($M=I, II, III$) を導入した。

$$F_M = K_M / \sigma \sqrt{\pi a_2} \quad (M=I, II, III) \quad (38)$$

以上のパラメータを用いて、 X_3 軸方向に一樣引張り応力 σ を受ける場合のき裂の干渉を調べる。また、各図は、No. 1 き裂についてのものである。解析に用いる材料定数は、ポアソン比 $\nu=0.3$ とした。

本解析手法の妥当性および計算精度については、すでに多くのケースについて検証が行われている⁷⁾⁻¹⁰⁾。例えば、本研究で取り扱った問題に関連する、同軸上平行2個だ円き裂問題については、文献10)において Isida¹¹⁾らの体積法による結果と比較を行い、解析結果については非常に良い一致が得られている。

4・1 き裂中心が引張り方向に並び非平行等大2個だ円き裂問題

Fig. 4. Variation of the interaction factor with crack distance (Two elliptical cracks).

Fig. 3 に示すような配置 ($\lambda_1=\lambda_2=0.0$) のき裂を考える。ここでは、き裂中心が引張り方向に並び No. 1

(a) Contour lines of stress distribution for two elliptical cracks ($1/\lambda_3=0.9$).

(b) Contour lines of stress distribution for individual elliptical cracks.

Fig. 5. Contour lines of stress distribution (Plane of $X_1=0$, $\sigma_{33}^{(0)}/\sigma, \pm\phi_1=30^\circ$).

crack が $+\phi_1$, No. 2 crack が $-\phi_1$, X_1 軸に関して傾斜する等大 2 個の円き裂について考える. アスペクト比を $a_2/a_1=0.5$ の円き裂に対して, X_3 軸方向のき裂中心間距離 d_3 を変化させて解析した. また干渉の影響を測るためにき裂縁上の代表的な点 A ($\theta^{(1)}=0$), B ($\theta^{(1)}=\pi/2$), C ($\theta^{(1)}=-\pi/2$) を定めた.

Fig. 4 は, き裂間距離に対する干渉係数 F_I および F_{II} の点 B, C での変化について示す. 同一図中に傾斜角 ϕ_1 による変化についても示す.

Fig. 4 (a) ではき裂が接近する ($1/\lambda_3 \rightarrow 1.0$) につれて F_{IB} は, 単数き裂の場合 ($1/\lambda_3=0.0$) と比較すると ϕ_1 が 30° 以下のとき減少し, ϕ_1 が 45° 以上のとき増加している. さらに, F_{IC} は, どのき裂間距離の場合でも F_{IB} 以下であることが分かる. さらに, F_{IC} は $\phi_1=60^\circ, 75^\circ$ の場合, 単数き裂の場合と比較しても, き裂間距離による変化は見られない. 以上まとめると, 点 B においては $\phi_1=0^\circ \sim 30^\circ$, 点 C では, $\phi_1=0^\circ \sim 45^\circ$ の範囲で干渉による応力集中緩和が見られる. また, 点 B の $\phi_1=45^\circ \sim 75^\circ$ では干渉による応力集中増加の様子がみられる.

Fig. 4 (b) では, $\phi_1=15^\circ, 30^\circ$ の場合, 点 C の方が点 B より F_{II} の減少の割合がかなり大きくモード II 型の応力集中緩和が生じていることがわかる. $\phi_1=45^\circ$ ではき裂が接近する ($1/\lambda_3 \rightarrow 1.0$) と点 B, C 共に同じように干渉係数 F_{II} は減少する傾向がみられる. また, $\phi_1=0^\circ, 75^\circ$ の F_{IIB} はき裂の接近と共に増加の傾向が見られる.

Fig. 5 (a) は, $\phi_1=30^\circ$, $1/\lambda_3=0.9$ の場合についてき裂付近の応力分布 (σ_{33}^0/σ) の等高線を示したものである. なお等高線間隔は 0.1 としている. また, 等高線は $\sigma_{33}^0/\sigma=0.0, 0.5, 1.0, \dots$ のように, ある特定の値を

破線で示した. 比較のため Fig. 5 (b) にそれぞれのき裂が単独で存在するときの応力等高線を示す. Fig. 5 (a) と Fig. 5 (b) を比較して, 2 個き裂の干渉により, き裂自由表面近傍の低応力領域がき裂間で接続し, 応力緩和が生じる様相がわかる. Fig. 5 (a) で, き裂が接近しているところでは応力の等高線が密になっており, 干渉している様子が見られる. き裂が離れているところでは, き裂が接近しているところと比較して, 遠方引張り応力 ($\sigma_{33}^0/\sigma=1.0$) より小さい領域が大きい様子が見られる.

4・2 き裂中心が同軸上にある平行多数円き裂問題

Fig. 6 に示すように, すべての多数き裂が X_3 軸上に平行に並び, X_1 軸まわりに角度 ϕ_1 傾斜する場合に

Fig. 6. Coaxial multiple elliptical cracks with rotated angles of ϕ_1 .

Fig. 7. Variation of the interaction factor for coaxial multiple elliptical cracks.

について解析を行った。X₃ 軸方向の引張り応力 σ は一定とし、き裂間距離は $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.0$, $\lambda_3 = 0.75$, アスペクト比は $a_2/a_1 = 0.5$ とした。

Fig. 7 (a)~(c) にそれぞれ、最外側のき裂 (No. 1 crack) および中央のき裂 (Center crack) の点 B ($\theta = 90^\circ$) における F_I , F_{II} , また、点 A ($\theta = 0^\circ$) における F_{III} のき裂数 N に対する変化を示す。また、傾斜角 ϕ_1 に伴う変化についても同時に示した。

Fig. 7 (a) の F_{IB} の場合、単数き裂に対する F_{IB} の減少の割合は、 $\phi_1 = 0^\circ \sim 30^\circ$ においては中央のき裂の方が最外側のき裂よりも大きく、特に $\phi_1 = 0^\circ$ において約 40.4%, 最外側のき裂では、約 21.1% の減少となっている。これは、き裂数の増加により中央のき裂付近で応力集中緩和が生じているためである。また、傾斜角 ϕ_1 が大きくなるとモード I 変形が少なくなる。そのため $\phi_1 = 75^\circ$ ではき裂が増加しても干渉係数 F_{IB} はほぼ一定値を示していることがわかる。

Fig. 7 (b) の F_{IIB} の場合、 $\phi_1 = 0^\circ$ ではき裂が奇数個のとき中央のき裂の F_{IIB} は対称性によりゼロとなる。偶数個のときはモード I が支配的であるため、2 個き裂の場合を除いて、ほとんどゼロである。 $\phi_1 = 30^\circ \sim 60^\circ$ では、き裂が 2 個の場合を除くと、き裂数の増加に伴って F_{IIB} は減少している。 $\phi_1 = 45^\circ$ のとき、モード II 変形が支配的となり、 F_{IIB} がいずれのき裂個数の場合も最大となる。その場合の F_{IIB} の減少の割合は中央では約 36.8%, 最外側では約 23.2% である。したがって、中央のき裂の方が最外側より応力集中緩和が多く生じていることがわかる。

Fig. 8. Contour lines of stress distribution (σ_{33}/σ) for coaxial multiple elliptical cracks (Plane of $X_1 = 0$, $1/\lambda_3 = 0.75$, $N = 5$).

Fig. 7 (c) の F_{IIIA} の場合、 $\phi_1 = 0^\circ$ では、き裂の個数にかかわらず中央のき裂ではゼロである。また、最外側のき裂では、ほとんどゼロである。 $\phi_1 = 15^\circ \sim 60^\circ$ では、き裂数の増加に伴って F_{IIIA} は減少し、一定値に収束している様子がわかる。例えば、 $\phi_1 = 45^\circ$ において、 F_{IIIA} は中央のき裂では約 25.2%, 最外側のき裂では約 13.3% の減少である。また、 $\phi_1 = 75^\circ$ ではき裂数の増加によって応力集中増加が若干生じた後、一定値に収束している。しかし、この問題では、いずれの場合もモード III 変形はモード I およびモード II と比較して小さいことがわかる。

Fig. 8 は、き裂数 5 個、 $\phi_1 = 45^\circ$ のときの応力分布 (σ_{33}/σ) の等高線である。最外側のき裂 (No. 1 crack) と中央のき裂 (Center crack) の点 B 付近の応力分布では中央のき裂の方が若干高い様子がわかる。これは Fig. 7 (a) の $\phi_1 = 45^\circ$ における F_{IB} でも確認できる。

5 結 言

本研究では、無限体中に任意分布する微小だ円き裂群に対する交代繰返し法を開発した。すなわち、座標変換マトリックスの導入により、任意の位置での応力をそれぞれのき裂座標系での応力に変換することを可能にした。本手法を有限要素交代繰返し法 (Finite Element Alternating Method) に組込むことにより、有限要素メッシュはき裂を全くモデル化することなく、有限体中の多数だ円き裂の解析も可能となる。

解析例で示したように、任意の多数き裂やき裂が傾斜する場合の干渉挙動について解析可能となり、本手法が、機器老朽化多数き裂やマイクロクラックタフニング機構解明などの有効な基礎的手法になるものと考えられる。

(平成 5 年 9 月 22 日 日本材料学会第 7 回破壊力学シンポジウムにて講演)

参 考 文 献

- 1) ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Section III, App. G., (1987).
- 2) R. B. Stonesifer, F. W. Brust and B. N. Leis, Eng. Fract. Mech. **45**, 357 (1993).
- 3) K. Vijayakumar and S. N. Atluri, J. Appl. Mech., **48**, 88 (1981).
- 4) T. Nishioka and S. N. Atluri, Eng. Fract. Mech., **17**, 247 (1983).
- 5) A. Y. Kuo, S. Shvarts and R. B. Stonesifer, ASTM STP, **1131**, 347 (1992).
- 6) R. C. Shah and A. S. Kobayashi, Eng. Fract. Mech., **3**, 71 (1971).
- 7) 西岡俊久, P. E. O'Donoghue and S. N. Atluri, 日本機械学会論文集, A-51, 342 (1985).
- 8) P. E. O'Donoghue, T. Nishioka and S. N. Atluri, Eng. Fract. Mech., **20**, 545 (1984).
- 9) T. Nishioka and Y. Furutani, JSME., **30**, 1221 (1987).
- 10) 西岡俊久, 明石委子, 徳永 崇, 日本機械学会論文集, A-60, 364 (1994).
- 11) M. Isida, K. Hirota, H. Noguchi and T. Yoshida, Int. J. Fract., **27**, 31 (1985).