窒化けい素のフレットング疲労特性に及ぼす力学的要因[†]

岡 根 正 樹* 武 藤 睦 治** 鈴 木 省 伍***

Mechanical Factors Influencing Fretting Fatigue Properties of Silicon Nitride

by

Masaki OKANE*, Yoshiharu MUTOH** and Shogo SUZUKI***

Fretting fatigue tests of HIP-sintered silicon nitride were carried out to discuss the dominant mechanical factors influencing fretting fatigue behavior. The fretting fatigue strength of silicon nitride was not necessarily decreased with increasing the contact load (contact pressure), which is in contrast with the case of metallic materials. This contrary behavior of ceramics results from that the relative slip amplitude between specimen and contact pad increases with decreasing contact load. Furthermore, even under a constant relative slip amplitude, the ratio of the relative slip amplitude to the contact radius varied with contact load, which has an influence on fretting wear behavior and consequently on fretting fatigue behavior. These results suggest that the fretting fatigue strength of silicon nitride is affected not only by frictional force but also by the condition of partial slip in the contact region, that is fretting wear behavior.

Key words: Fretting fatigue, Mechanical factors, Silicon nitride, Fretting wear, Contact load, Relative slip amplitude

1 緒 言

ガスタービンエンジンや自動車用レシプロエンジン等の高効率・高性能化を目指し、使用部材のセラミックス化が進められている。セラミックスを構造物材料として実用する場合、はめ合や摺動部等の各種接触部においてフレットングを生じることが予想される。

著者らは、これまでセラミックス用のフレットング疲労試験装置を試作し、HIP 焼結の窒化けい素を用いた静的および繰返しフレットング疲労試験^{*1}を行い、セラミックスにおいてもフレットングの作用により疲労強度の顕著な低下が認められること、き裂はきわめて初期に発生しその伝ば寿命が疲労寿命にほぼ等しいことなどを示すとともに、セラミックスにおけるフレットング疲労特性解明の重要性を明らかにしてきた。^{1)~3)}

フレットング疲労に影響を与える力学的因子として接触面圧、摩擦力および相対すべり振幅などが挙げられる。^{4)~6)} これまでの金属材料のフレットング疲労の研究成果にもとづくと、第一近似としては摩擦力が同一であれば、接触面圧あるいは相対すべり振幅によらず同一のフレットング疲労強度となること、および接触面圧や相対すべり振幅の変化はそれらが摩擦力に及ぼす影響を介して、フレットング疲労強度に影響

を及ぼしていることなどが知られている。^{7),8)}

本研究においては、主として接触面圧(接触荷重)を変化させた窒化けい素のフレットング疲労試験を行い、セラミックスのフレットング疲労特性に及ぼす力学的因子について、上述の金属材料の場合と同様に考えてよいのかどうかを詳細に検討した。

2 供試材および試験方法

2・1 供試材

供試材として曲げ試験片(3×4×36 mm)、直径 2 mm の円柱接触片および直径 5/32 インチ(3.97 mm)の軸受球(精度 JIS20 級)接触片に、焼結助剤および焼結条件の異なる 2 種類の HIP 焼結窒化けい素を用いた。供試材の室温における基本的な諸特性を Table I に示す。試験片は表面粗さの影響を極力避けるため、ダイヤモンドスラリーを用いたラッピングを行い、接触片との接触面(4×36 mm 面)の最大表面粗さ R_{max} を 0.4 μm 以下、中心線平均粗さ R_a を 0.1 μm 以下にした。なお、接触片については曲面の研磨が困難であるため、特に表面の研磨等を行わずに受け入れ状態のまま使用した。また、表面の付着物を取除

*1 一定荷重負荷(静疲労)を受ける試験片にフレットングが作用する場合を静的フレットング疲労、繰返し荷重(繰返し疲労)を受ける試験片にフレットングが作用する場合を繰返しフレットング疲労と呼ぶことにする。

† 原稿受理 平成 6 年 1 月 18 日 Received Jan. 18, 1994

* 学生会員 長岡技術科学大学機械系 〒940-21 長岡市上富岡町, Dept. of Eng., Nagaoka Univ. of Tech., Kamitomioka, Nagaoka, 940-21

** 正 会 員 長岡技術科学大学機械系 〒940-21 長岡市上富岡町, Dept. of Eng., Nagaoka Univ. of Tech., Kamitomioka, Nagaoka, 940-21

*** (株)いすゞセラミックス研究所 〒252 藤沢市土棚, Isuzu Ceramic Res. Inst. Co. Ltd., Tsuchitana, Fujisawa, 252

Table I. Mechanical properties of the materials used.

	Specimen and cylindrical contact pad	Spherical contact pad
4 point bending strength, σ_b [MPa]	950	931
Fracture toughness, K_{IC} [MPa $m^{1/2}$]	7.6	7.0
Hardness, H_v [GPa]	14.3	15.7
Young's modulus, E [GPa]	304	294
Poisson's ratio, ν	0.28	0.25
Coefficient of thermal expansion, [$10^{-6}/^{\circ}\text{C}$]	3.1	3.6

Table II. Test conditions.

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Test machine	Machine A						Machine B		
Type of contact pad	Cylindrical contact pad		Spherical contact pad						
Contact load, N	14.3	43.0	14.3		43.0		9.8	29.4	49.0
Frequency, Hz	10						126		
Amplitude of beam, μm	4	4	4	20	4	20	-----	-----	-----
Relative slip amplitude S_w μm	-----	-----	-----	-----	-----	-----	3	3	3
Mean Hertzian stress, Gpa	0.34	0.59	1.75		2.53		1.54	2.23	2.64
Contact semi-width, μm	9.11	5.25	50.97		73.57		44.94	64.81	76.84
Remarks in figures	■	□	▲	●	△	○	▽	◇	◆

くために、試験片および接触片ともに試験前にアセトン中で10分間超音波洗浄を行った。

2・2 フレッシング疲労試験

フレッシング疲労試験は、著者らが試作した2種類のフレッシング疲労試験装置を用いて行った。それらの詳細は前報で述べたので、ここでは概略を示す。Fig. 1にフレッシング疲労試験装置の試験部の模式図を示す。2つの試験装置は接触部に生じる相対往復運動（すなわちフレッシング運動）の駆動源が異なり、(a)は電動機の回転運動を偏心カムを介して微小な往復運動に変換しているのに対し、(b)は正弦波形の電圧を印加した圧電バイモルフに生じる微小な往復運動をそのまま利用している。いずれの試験装置の場合とも、接触片と試験片間に生じる相対すべりは正弦波形になっている。以下では便宜上(a)および(b)の試験装置をそれぞれ“試験装置 A (Machine A)”および“試験装置 B (Machine B)”と称する。なお、試験装置 B においては、試験片に静的のみならず繰返し応力を負荷することが可能である。本研究においては、いずれのフレッシング疲労試験装置の場合も、試験中試験片には、4点曲げ（支持スパン 30 mm, 負荷スパン 10 mm）による応力を静的に負荷する静的フレッシング疲労試験を行った。

Table II にフレッシング疲労試験の試験条件を示す。表中 No. 1~No. 6 までの試験には試験装置 A（偏心カム式）を用い、No. 7~No. 9 までの試験には試験装置 B（圧電バイモルフ式）を用いた。なお、

試験装置 B を用いた試験は、上述の試験装置 A での試験結果をうけて行ったため、詳細については後述す

Fig. 1. Schematic illustrations of fretting fatigue test apparatus.

る。表中のはりの振幅とは、既報において詳細を述べたように、試験部を固定した位置での片持りの変位振幅を意味しており、試験部治具の剛性の影響を受けるため、試験片と接触片間の相対すべり振幅とは必ずしも一致しない。フレットング繰返し速度は、すべての試験で 10 Hz に統一して行い、 2×10^6 cycles (試験時間 2×10^5 s) で破断に至らない場合、その時点で試験打ち切りとした。また、試験後には試験片のフレットング損傷面を走査型電子顕微鏡 (SEM) により観察した。

3 実験結果および考察

3.1 円柱接触片の場合

3.1.1 フレットング疲労強度 Fig. 2 に円柱接触片を用いた場合のフレットング疲労試験結果から、疲労寿命線図を示す。同図には同一窒化けい素の静疲労寿命試験の結果¹⁾ (▼) もあわせて示した。また、矢印 → のついた実験点はその時点 (2×10^5 s) で破断に至らなかったことを示している。図より、いずれの条件の場合もフレットング疲労強度は静疲労強度に比べて低下しており、ばらつきの大きいほぼ水平に近い寿命曲線となっていることがわかる。フレットング疲労限 σ_{fw} は接触荷重が 43 N の場合約 600 MPa、接触荷重が 14.3 N の場合約 540 MPa であった。このように、接触荷重が小さい方が疲労限が低くなる現象は、金属材料の場合と逆の傾向を示すものである。なお、試験片の破断箇所は、すべてフレットング箇所であった。

3.1.2 摩擦力および相対すべり量の測定結果 Fig. 3 にフレットング繰返し数と接線力係数、摩擦力および相対すべり振幅の関係を示す。図中には接触荷重の異なる 2 種類を区別して示してあるが、それぞれには負荷応力の異なる 2 種類の試験結果が区別せずに示してある。なお、接線力係数は測定された試験片と接触片間の摩擦力を接触荷重で除した値として定義

Fig. 2. S-N curves for fretting fatigue with cylindrical contact pad.

Fig. 3. Variation of tangential force coefficient, frictional force and relative slip amplitude during fretting fatigue tests with cylindrical contact pad.

し、すべりが全面すべりとなった場合にこの値は摩擦係数と一致する。

接触荷重 P が 43 N の場合、接線力係数は 0.1 前後で、試験開始から終了までの間の値の変動も比較的小さく、相対すべり振幅に関しても $0.5 \mu\text{m}$ 程度でほぼ一定の値を示した。一方、 $P=14.3$ N の場合には、接線力係数は $P=43$ N の場合よりも高めの 0.3 前後の値を示し、変動幅も $P=43$ N の場合と比べて比較的大きかった。また、相対すべり振幅も $1 \sim 2 \mu\text{m}$ 程度と $P=43$ N の場合に比べ大きな値を示した。一方、摩擦力は $P=43$ N の場合は 5 N 程度であるのに対し、 $P=14.3$ N の場合は若干低めだがほぼ同一の 4 N 程度の値を示した。すなわち、本試験条件では、接触荷重を低下させることにより、相対すべりが容易となり、相対すべり振幅が大きくなる。これにともない固着域とすべり域の割合が変化し、その結果接線力係数が大きくなるため、結果として摩擦力は接触荷重によらず同等の値を示したと考えられる。

3.2 球形接触片の場合

3.2.1 フレットング疲労強度 Fig. 4 に球形接触片を用いた場合のフレットング疲労試験結果から、疲労寿命線図を示す。フレットング疲労寿命は円柱接触片を用いた場合とは異なり、ばらつきはあるものの負荷応力の低下とともに長寿命を示す傾向が認められた。

はりの振幅 S_{ab} が $20 \mu\text{m}$ の場合、接触荷重 P が 14.3 N (●) および 43 N (○) の場合のフレットング疲労限 σ_{fw} はそれぞれ 425 MPa および 385 MPa 程度であった。これは、接触荷重の増加にともないフレットング疲労限 σ_{fw} が低下するという金属材料の

Fig. 4. S-N curves for fretting fatigue with spherical contact pad.

場合の傾向と一致する。しかし、後述のようにそのメカニズムは金属材料の場合とは若干異なるようである。

一方、はりの振幅が $4 \mu\text{m}$ の場合 ($\blacktriangle$: $P=14.3 \text{ N}$, $\triangle$: $P=43.0 \text{ N}$) は、いずれの接触荷重においてもその疲労強度に大きな差はなく、フレットング疲労限 σ_{fw} は 425 MPa 程度であった。

3・2・2 摩擦力および相対すべり量の測定結果
Fig. 5 に各試験条件下におけるフレットング繰返し数と接線力係数、摩擦力および相対すべり振幅の関係を示す。試験片と接触片間の摩擦力は、はりの振幅が $20 \mu\text{m}$ の場合、接触荷重の増加に比例して大きくなっていることがわかる。また、はりの振幅が $4 \mu\text{m}$ の場合には、接触荷重によらず摩擦力はほぼ一定であり、円柱接触片の場合と同傾向を示した。接線力係数は、いずれのはりの振幅条件においても接触荷重の増加とともに低い低下する傾向にある。この傾向ははりの振幅

Fig. 5. Variation of tangential force coefficient, frictional force and relative slip amplitude during fretting fatigue tests with spherical contact pad.

が小さい方が顕著であった。

3・3 フレットング損傷面の観察結果

Fig. 6 に各試験条件下で、 $2 \times 10^5 \text{ s}$ で試験を打ち切った試験片のフレットング損傷面の観察例を示す。同図 (a) および (b) は円柱接触片の場合であるが、接触荷重が小さな 14.3 N の場合が接触荷重の大きな 43 N の場合よりも損傷の程度および損傷領域ともに大きなものとなっている。これは接触荷重が小さい場合の方がより大きな相対すべり振幅を生じていたことに対応している。また、摩耗の痕跡は接触幅方向全面に均一ではなく、微小な凹凸、うねり等の影響により、局部的であった。実機でのセラミックス同士の平面-平面接触の場合にも、同様の不均一な接触状態が予想され、したがって局部的には平均的面圧よりも大きな面圧となることが予想されるので、強度評価に際してこの点に対する配慮が必要となる。

Fig. 6 (c) および (d) に球形接触片の一例として、はりの振幅 $20 \mu\text{m}$ の場合の観察例を示す。球形接触片の場合も円柱接触片の場合と同様に、接触荷重が小さな 14.3 N の場合の損傷領域が大きなものとなっている。球と平面の弾性接触に関する Hertz の理論⁹⁾によれば、本供試窒化けい素の場合、接触荷重が 14.3 N のときの弾性接触円の直径は約 $102 \mu\text{m}$ であり、 43 N の場合は約 $147 \mu\text{m}$ である。しかし図でみられる損傷領域の大きさは、理論接触領域の大きさよりもはるかに大きなものである。これは試験中に接触部において摩耗が進行した結果であると考えられる。そこで、初期の接触、摩耗損傷状態を調べるため、はりの振幅 $20 \mu\text{m}$ の条件で、フレットング疲労試験を 100 s

(a) $S_{a,b}=4 \mu\text{m}$, $P=43 \text{ N}$, $\sigma_{\text{max}}=600 \text{ MPa}$.
(b) $S_{a,b}=4 \mu\text{m}$, $P=14.3 \text{ N}$, $\sigma_{\text{max}}=550 \text{ MPa}$.
(c) $S_{a,b}=20 \mu\text{m}$, $P=43 \text{ N}$, $\sigma_{\text{max}}=385 \text{ MPa}$.
(d) $S_{a,b}=20 \mu\text{m}$, $P=14.3 \text{ N}$, $\sigma_{\text{max}}=425 \text{ MPa}$.

Fig. 6. SEM observations of fretted surfaces of the specimens tested up to $2 \times 10^5 \text{ s}$.

Fig. 7. SEM observations of fretted surfaces of the specimens tested up to 100 s (1×10^3 cycles) under the conditions of $S_{a,b}=20\ \mu\text{m}$.

(1000 cycles) で中断した試験片損傷面の SEM 観察を行った。その観察結果を Fig. 7 に示す。図によれば、(a) の接触荷重が 43 N の場合は、(b) の接触荷重が 14.3 N の場合と比べて、損傷の程度が軽微であることが明らかである。(a) の場合、表面損傷は円環状に発生している。この損傷領域の大きさは前述の Hertz の弾性接触領域の大きさにほぼ等しく、接触領域内中心部で表面損傷の発生していない領域は、Mindlin の理論¹⁰⁾でいう固着域 (Stick-zone) であり、すべりは固着域の外側の部分的な領域で生じている。また、損傷領域端部付近には、すべり方向に垂直な表面き裂を確認することができる。一方、(b) の場合は、激しい表面損傷に加えて、多数の摩耗粉の付着が確認される。また、この段階では、接触域寸法は Hertz の理論のそれからそれほど大きくはないが、損傷の形状はすべり方向に若干長くなっており、固着域は認められず、接触面全体がすべっていることがわかる。

3・4 窒化けい素のフレットング疲労特性に及ぼす接触荷重の影響

これまでの金属材料のフレットング疲労に及ぼす接触面圧の影響の関する報告によれば、フレットング疲労強度は接触面圧の増加とともに通常の疲労強度のレベルから低下し、接触面圧がある値以上で一定値を示すようになる。^{6)~8)}これは、接触面圧の増加とともに摩擦力が増し、フレットングき裂の伝ば速度を加速させるため、疲労強度は低下するものの、さらに接触面圧が増加すると接触面での圧縮応力による平均応力の効果が無視できなくなり、双方の効果が相殺が起こる結果、疲労強度の低下率は減少し、一定値をとるようになることが原因とされている。⁷⁾

これに対して、本研究における窒化けい素のフレットング疲労強度は、接触面圧 (接触荷重) の増加とともに必ずしも低下するとは限らず、逆に上昇する場合もあった。

Fig. 8 に接触荷重とフレットング疲労限、摩擦力、接線力係数および相対すべり振幅の関係をまとめて示

Fig. 8. Summary of the effect of contact load on fatigue strength and mechanical factors in fretting fatigue test.

す。図からおのおのの試験条件における接触荷重とフレットング疲労強度の関係は以下のように考えられる。

(1) はりの振幅 $S_{a,b}=4\ \mu\text{m}$ で円柱接触片を用いた場合 (▲)

接触荷重の増加にともなって接触片のすべりが抑制されて、その結果接触面の損傷が軽度になり接線力係数は低下する。このことはフレットングき裂の発生 (あるいは接触表面の窒化けい素粒子の抜け等による応力集中源の発生) の抑制を示唆している。一方、摩擦力は両接触荷重条件において差がなく、このことはフレットングき裂の伝ば速度に差がないことを意味している。したがってフレットング疲労強度は接触荷重の増加にともない上昇したものと推察される。

(2) はりの振幅 $S_{a,b}=4\ \mu\text{m}$ で球形接触片を用いた場合 (△)

接触荷重の増加にともない相対すべり振幅および摩擦力ともに大きな変化はなく、したがってフレットング疲労強度にも変化が現れなかったものと考えられる。

(3) はりの振幅 $S_{a,b}=20\ \mu\text{m}$ で球形接触片を用いた場合 (○)

(1) の場合と同様の原因で、接触荷重の増加にともない相対すべり振幅が大幅に減少し、接線力係数も接触荷重の増加にともない減少する傾向を示した。一方、摩擦力は接触荷重の増加にともない大幅に増加した。すなわち、相対すべり振幅の減少にともなうフレットングき裂発生抑制効果と、摩擦力増大によるき裂伝ば速度加速の効果との競合 (相殺) が起こり、結

果的に接触荷重の増加にともなう疲労強度の変化は若干の低下にとどまったものと考えられる。

このように、窒化けい素のフレッティング疲労強度は、金属材料の場合のように主として摩擦力のみに依存するのではなく、相対すべり振幅（主としてフレッティングき裂発生挙動に影響）と摩擦力（主としてフレッティングき裂伝ば挙動に影響）の両者が影響を及ぼしているものと考えられる。このような相違は、金属材料の場合、疲労強度は停留き裂により決まるのに対し、セラミックスの場合、停留き裂現象がなく、き裂発生により疲労強度が決まっているためと推察される。

3・5 相対すべり振幅を一定とし接触荷重を変化させた試験結果について

前述のように、セラミックスのフレッティング疲労強度には摩擦力のみではなく、相対すべり振幅も強く影響を及ぼしている。このことをさらに詳細に検討するため、試験片と接触片間の相対すべり振幅を直接制御することが可能な圧電バイモルフを利用した試験装置 B を用い、フレッティング疲労試験を行った。試験は、Table II 中 (No. 7~9) にその条件を示しているように、相対すべり振幅を $3\mu\text{m}$ とし、接触荷重を 9.8, 29.4 および 49.0 N の 3 水準に変化させた。

試験結果より、フレッティング疲労寿命線図を Fig. 9 に示す。接触荷重 P が 29.4 N の場合と $P=49.0$ N の場合を比較すると、接触荷重の増加にともなうフレッティング疲労強度が低下していることが明らかである。しかし、 $P=9.8$ N の場合は、その疲労強度は $P=29.4$ N の場合とほぼ同等の値であった。

Fig. 10 に、接触荷重とフレッティング疲労限、摩擦力および接線力係数の関係を示す。摩擦力は接触荷重の増加にともなうほぼ直線的に増加している。これに対して接線力係数は、接触荷重 P が 29.4 N の場合の平均で約 0.4, $P=49.0$ N の場合の平均で 0.36 程

Fig. 9. S-N curves for fretting fatigue with spherical contact pad under a constant relative slip amplitude of $S_a=3\mu\text{m}$.

Fig. 10. Summary of the effect of contact load on fatigue strength and frictional force in fretting test under a constant relative slip amplitude of $S_a=3\mu\text{m}$.

度でほとんど差がなかったが、 $P=9.8$ N の場合は約 0.68 とかなり高めの値を示した。この値は、本供試材の摩擦係数 $\mu=0.74$ とほぼ同等の値である。

Fig. 11 にそれぞれの試験条件において 2×10^5 s で試験を打切った場合の、フレッティング損傷面の SEM による観察例を示す。接触荷重 P が 29.4 N の場合と 49.0 N の場合の損傷領域中央には固着域の痕跡が確認できる。一方、接触荷重が 9.8 N の場合、固着域の痕跡は認められない。また、 $P=49$ N の場合

Fig. 11. SEM observations of fretted surfaces of the specimens tested under a constant relative slip amplitude of $S_a=3\mu\text{m}$ up to 2×10^5 s.

では、固着域をはさんで対称の位置に弧状のき裂の痕跡が認められる。Hertzの弾性接触理論⁹⁾により計算される各接触荷重条件での接触円直径 $2a$ は、 $P=9.8\text{ N}$ の場合で約 $90\text{ }\mu\text{m}$ 、 $P=29.4\text{ N}$ の場合で約 $130\text{ }\mu\text{m}$ 、 $P=49\text{ N}$ の場合で約 $155\text{ }\mu\text{m}$ である。損傷域寸法はこれらの大きさと比べるとかなり大きい、これは前述のように、試験中接触領域において摩耗が進行した結果であると考えられる。

以上の結果より、接触荷重が 29.4 N と 49 N の場合はいずれも試験切りの時点で固着域の痕跡が観察され、また、試験中の接線力係数も摩擦係数に比べるとかなり小さな値であったことより、すべりは接触領域内の限られた部分であったものと考えられる。一方、接触荷重 P が 9.8 N の場合は損傷の形態および接線力係数が摩擦係数とほぼ一致していることから、すべりはいわゆる全体すべりの状態であったものと考えられる。

以上のように、相対すべり振幅が同一であっても、接触荷重により、接触領域長さに対する相対すべり振幅の比が変化するため、接触領域の局部的すべり摩耗形態が変化し、フレッティング疲労強度に影響を及ぼしているようであり、前述の“フレッティング疲労強度には摩擦力のみではなく相対すべり振幅も強く影響を及ぼしている”という表現中の相対すべり振幅は接触領域におけるすべり形態すなわちフレッティング摩耗状態と言い換えるのがより正確であろう。

4 結 言

窒化けい素のフレッティング疲労強度は、金属材料の場合とは異なり、接触面圧を低下させて必ずしも向上しない場合がある。これは面圧の低下にともない、相対すべり振幅が増大するためである。また、相対すべり振幅を同一にした場合でも、接触荷重の低下によ

りフレッティング疲労強度が向上しない場合がある。これは、接触荷重とともに接触領域長さが変化するのにともない、接触領域長さに対する相対すべり振幅の比が変化し、したがって、接触部での局部的すべり状態すなわちフレッティング摩耗状態が異なるためと考えられる。このように窒化けい素のフレッティング疲労強度は、金属材料の場合と異なり、摩擦力のみならず、相対すべり振幅の影響、より正確にいえば、接触領域の局部的すべり状態の影響を強く受ける。

(平成5年9月22日 日本材料学会第7回破壊力学シンポジウムにて講演)

参 考 文 献

- 1) 岡根正樹, 佐藤豊一, 武藤睦治, 鈴木省伍, 日本機械学会論文集, A-59, 1384 (1993).
- 2) 岡根正樹, 佐藤豊一, 武藤睦治, 鈴木省伍, 日本機械学会論文集, A-59, 2220 (1993).
- 3) 岡根正樹, 岸 恭弘, 武藤睦治, 鈴木省伍, 日本機械学会論文集, A-60, 1 (1994).
- 4) ASTM STP1159, "Standardization of Fretting Fatigue Test Methods and Equipment", ed. M. H. Attia and R. B. Waterhouse (1992).
- 5) 西岡邦夫, 平川賢爾, 日本機械学会論文集, A-37, 1051 (1971).
- 6) 佐藤建吉, 藤井 孟, 日本材料強度学会誌, 18, 98 (1984).
- 7) 武藤睦治, 西田友久, 坂本 勲, 材料, 37, 649 (1988).
- 8) 永田晃則, 松田 健, 柏谷英夫, 日本機械学会論文集, A-53, 196 (1987).
- 9) H. Hertz, Über die Berührung fester elastischer Körper, J. für die reineu. angew. Mathem., 92, 156 (1881).
- 10) R. D. Mindlin and H. Deresiewicz, Journal of Applied Mechanics, Sep., 327 (1953).