破損領域重点サンプリング・シミュレーションに基づく 構造システムの信頼性解析†

奥田 昇也* 米澤 政昭**

A Structural Reliability Analysis Based on Importance Sampling Simulation Defined in Failure Region

by

Shoya OKUDA* and Masaaki YONEZAWA**

This paper is concerned with a reliability assessment of structural systems based on an improved importance sampling simulation, in which the importance sampling density is determined within the limit of the failure region. Basic random variables are assumed to be stochastically independent normal variates and the minimum reliability index β of the system to be known beforehand. The first step of the proposed method is to execute simulations, referred to the preliminary simulations, to get a rough estimate of the failure probability and data about the sample distribution. These data are utilized to determine the importance sampling density as a frequency distribution with respect to radius in polar coordinates. In the second step, the structural failure probabilities are estimated through the importance sampling simulations, samples of which are generated from the estimator of the importance sampling density determined in the first step.

The proposed method is compared in a numerical example with the Monte Carlo simulation combined with partition of the region technique and ISPUD for multi mode failure *etc.* It can be said that the proposed method is effective for the estimation of structural failure probabilities.

Key words: Structural reliability, Failure probability, Importance sampling simulation, Partition of the region

1 緒 言

シミュレーションによる構造システムの信頼性解析法は、コンピュータが手軽に利用できるようになった今日、複雑な解析の手法を用いることなく構造信頼性解析を行うことのできる有効な手法の1つである。しかし構造システムの信頼性解析は、非常に小さい構造破損確率を推定する場合が多く、通常のモンテカルロ・シミュレーションによって、精度のよい推定量を得るためには、莫大な数のサンプルベクトル（以下、サンプルとする）を生成する必要がある、計算時間が増加するという問題がある。そこで重点サンプリング法や領域分割法などの分散減少法を用いて、構造破損確率の推定量の分散を減少させることは、シミュレーション法において不可欠である^{1)~9)}。

重点サンプリング法は、破損領域にサンプルを集中して生成するように、重点サンプリング密度関数を構成し、これに基づくサンプルを生成する。重点サンプリング密度関数の構成法として、ISPUD法²⁾、適応サンプリング法⁴⁾、多破損モード重点サンプリング法等がある。構造破損確率を推定するシミュレーションにおいては、破損領域のみにサンプルを生成し、かつ構造システムの基本確率変数の多次元確率密度関数（以下で密度関数とする）に比例するような重点サンプリング密度関数が理想的であるが⁴⁾、このような重点サンプリング密度関数を厳密に

構成する方法は現在のところ皆無に近いが、その中で、G. L. Ang⁵⁾らによって提案されたカーネル関数法は、通常のモンテカルロ・シミュレーションによって、破損領域に生成されるサンプルの度数分布に対応した離散的重点サンプリング密度の構成法を示唆しており注目される。

本研究では、破損領域に限定して定義される重点サンプリング密度のシミュレーションによる決定法を与え、それに基づく重点サンプリング・シミュレーションによって構造破損確率を推定する方法を提案する。

まず少ないサンプルを用いた予備シミュレーションによって、構造破損確率の粗い推定量を算定し、同時に得られる破損領域に落ちるサンプルの分布情報に基づいて、破損領域に限定して決定される重点サンプリング密度を度数分布の形で決定する。これに基づく重点サンプリング・シミュレーションを行い、多破損モードを有する構造システムの破損確率をより精度よく推定する。提案手法においては、重点サンプリング密度の度数分布を、極座標系の動径に関する分布で表わし、これを推定するのに領域分割法を適用する^{8),9)}。

2 重点サンプリング・シミュレーションによる 構造破損確率の推定法

構造システムの基本確率変数は、互いに独立で、時間に依存しないものと仮定し、 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ で表わされる。構造システムの状態を規定する限界状態関数

† 原稿受理 平成6年8月8日 Received Aug. 8, 1994

* 正会員 熊野工業高等専門学校機械工学科 〒519-42 熊野市有馬町, Dept. of Mech. Eng., Kumano Tech. College, Arima-cho, Kumano, 519-42

** 正会員 近畿大学理工学部経営工学科 〒577 東大阪市小若江, Dept. of Ind. Eng., Kinki Univ., Kowakae, Higashi-Osaka, 577

は, 基本確率変数の関数として $g(x)$ で定義される.

構造破損確率は, 次のように基本確率変数の密度関数 $f(x)$ の破損領域 $\{g(x) \leq 0\}$ の積分で定義される.

$$P_f = \int_{g(x) \leq 0} f(x) dx = \int_{\text{all } x} I[g(x)] f(x) dx \quad (1)$$

ここで $I[\cdot]$ は, $g(x) \leq 0$ の場合 $I[g(x)] = 1$, $g(x) > 0$ の場合 $I[g(x)] = 0$ となる指標関数である.

式(1)に重点サンプリング密度関数 $h(y)$ を導入すると, 構造破損確率は次のように表わされる.

$$P_f = \int_{\text{all } y} I[g(y)] \frac{f(y)}{h(y)} h(y) dy \quad (2)$$

ここで y は重点サンプリング密度関数 $h(y)$ に従う確率変数 Y の実現値とする.

これより構造破損確率は, 重点サンプリング密度関数 $h(y)$ に関する $I[g(y)] f(y) / h(y)$ の期待値として表わされる. すなわち

$$P_f = E \left[I[g(Y)] \frac{f(Y)}{h(Y)} \right] \quad (3)$$

重点サンプリング密度関数 $h(y)$ に従うサンプル $y^{(i)}$, ($i=1, 2, \dots, N$) を生成するシミュレーションによって, 構造破損確率の推定量とその分散は, 次式によって計算される.

$$P_{fe} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_f^{(i)} \quad (4)$$

$$\text{Var}(P_{fe}) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N [P_f^{(i)} - P_{fe}]^2 \quad (5)$$

$$P_f^{(i)} = I[g(y^{(i)})] \frac{f(y^{(i)})}{h(y^{(i)})} \quad (6)$$

ここで N はサンプル数である.

3 破損領域重点サンプリング密度の推定

3.1 破損領域重点サンプリング密度関数

式(2)において新たに重点サンプリング密度関数として $h(y) I[g(y)]$ を考え, 次式を満足するようにこれを決定すると

$$\int_{\text{all } y} h(y) I[g(y)] dy = 1 \quad (7)$$

構造破損確率 P_f は, $h(y) I[g(y)]$ に関する $f(y) / h(y)$ の期待値で表わすことができる. すなわち

$$P_f = \int_{\text{all } y} \frac{f(y)}{h(y)} h(y) I[g(y)] dy = E \left[\frac{f(Y)}{h(Y)} \right] \quad (8)$$

$h(y) I[g(y)]$ に従うサンプル $y^{(i)}$, ($i=1, 2, \dots, N$) をシミュレーションによって生成できれば, 構造破損確率の推定値とその分散を, 式(9), 式(4)と式(5)によって推定できる.

$$P_f^{(i)} = \frac{f(y^{(i)})}{h(y^{(i)})} \quad (9)$$

集合 $\{y | g(y) \leq 0\}$ に対しては, $h(y) I[g(y)] = h(y)$ が成立するので, $h(y)$ を破損領域に限定して定義されるように決定すれば, これに基づくサンプルは, 最も有効に構造破損確率の推定に利用される. このように破損領域のみに限定して決定される密度関数 $h(y)$ を破損領域重点サンプリング密度関数と呼ぶことにする.

基本確率変数 Y が標準正規確率変数の場合, 多変数システムの破損確率積分の取扱いを容易にするために破損確率の定義式(1)を極座標系(動径 R , 偏角 $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k-1})$)に変換して表わすと式(10)を得る.

$$P_f = \int_{\text{all } r} r^{k-1} f(\cdot) dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} I[g(r, \Theta)] \cos^{k-2} \theta_1 d\theta_1 \cdots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta_{k-2} d\theta_{k-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{k-1} \quad (10)$$

$$f(\cdot) = f(r \cos \theta_1, \dots, \cos \theta_{k-1}) \cdots f(r \sin \theta_1) \quad (11)$$

ここで $f(\cdot)$ は多次元正規確率密度関数であり, 動径 r を用いて表わし, $f_r(r)$ とおく.

$$f_r(r) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} r^2\right) \quad (12)$$

式(10)をすべての偏角 θ_j , ($j=1, 2, \dots, k-1$) に関して積分すると, 次式を得る.

$$P_f = \int_{\text{all } r} f_r(r) \hat{I}[g(r)] d\Delta(r) \quad (13)$$

$$d\Delta(r) = \frac{2\pi^{k-1} r^{k/2}}{\Gamma(k/2)} dr \quad (14)$$

ここで $\hat{I}[g(r)]$ は, $I[g(R, \Theta)]$ の偏角 θ_j , ($j=1, 2, \dots, k-1$) に関する積分結果を表わす r のみの指標関数で, $d\Delta(r)$ は $R=r$ における微小超体積要素である.

動径 r の関数 $h_r(r)$ を式(13)に導入する.

$$P_f = \int_{\text{all } r} \frac{f_r(r)}{h_r(r)} h_r(r) \hat{I}[g(r)] d\Delta(r) \quad (15)$$

新たに重点サンプリング密度関数として $h_r(r) \hat{I}[g(r)]$ を考え,

$$\int_{\text{all } r} h_r(r) \hat{I}[g(r)] d\Delta(r) = 1 \quad (16)$$

を満足するものとする, 構造破損確率は, $h_r(r) \hat{I}[g(r)]$ に関する $f_r(r) / h_r(r)$ の期待値で表わされる. すなわち

$$P_f = E \left[\frac{f_r(R)}{h_r(R)} \right] \quad (17)$$

重点サンプリング・シミュレーションに基づく構造破損確率式(17)の推定量とその分散は, $h_r(r) \hat{I}[g(r)]$ に従うサンプル $r^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, N$) を生成し, 式(18), 式(4)と式(5)で計算される.

$$P_f^{(i)} = \frac{f_r(r^{(i)})}{h_r(r^{(i)})} \quad (18)$$

重点サンプリング密度関数 $h_r(r) \hat{I}[g(r)]$ は破損領域に限定して定義される破損領域重点サンプリング密度関数である.

3.2 シミュレーションによる破損領域重点サンプリング密度の決定法

破損領域重点サンプリング密度関数 $h_r(r) \hat{I}[g(r)]$ を度数分布で表わすために, 原点を中心に半径 r_j と r_{j+1} , ($j=1, 2, \dots, c$) の同心超球で囲まれた区間の積分の和として式(16)を書換えると式(19)を得る.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^c \int_{r_j}^{r_{j+1}} h_r(r) \hat{I}[g(r)] d\Delta(r) \\ = \sum_{j=1}^c h_r(r_j) \hat{I}[g(r_j)] \Delta(r_j) = 1 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\Delta(r_j) = \frac{2\pi^{k/2}}{k\Gamma(k/2)} (r_{j+1}^k - r_j^k) \quad (20)$$

ここで $h_r(r_j)\hat{I}[g(r_j)]$ は、 j 番目の区間の破損領域重点サンプリング密度、 $\Delta(r_j)$ は、原点を中心に半径 r_j , r_{j+1} の同心超球で囲まれた j 番目の区間の超体積⁶⁾、 c は区間数である。

$h_r(r_j)$, ($j=1, 2, \dots, c$) は、式 (19) を満足するようにシミュレーションによって決定する。区間数 c もまた式 (19) を満たすように選ぶ。特に $h_r(r)$ が

$$h_r(r) = \frac{f_r(r)}{P_f} \quad (21)$$

で与えられる場合、式 (18)、式 (4) と式 (5) より構造破損確率の推定量の分散がゼロとなる (付録参照)。したがって式 (21) は動径 r で表わされた理想的な重点サンプリング密度関数の形状を表わすが、あらかじめ P_f が未知であるので、 P_f の代わりに次式のように構造破損確率の粗い推定量 P_{fe}^o を用いて $h_r(r_j)$ の決定する方法をここでは提案する。

$$h_r(r_j) = \frac{f_r(r_j)}{P_{fe}^o}, \quad (j=1, 2, \dots, c) \quad (22)$$

以下 $h_r(r_j)$ を決定する手順を示す。

通常のモンテカルロ・シミュレーションにより、基本確率変数の密度関数に従うサンプル数 $N1$ のシミュレーションを行い、破損領域に入るサンプルの総数を M 、そのうち j 番目の区間の破損領域に入るサンプル数を M_j , ($j=1, 2, \dots, c$) とすると、構造破損確率の粗い推定量は次式で与えられる。このシミュレーションを予備シミュレーションと呼ぶことにする。

$$P_{fe}^o = \frac{M}{N1} = \sum_{j=1}^c \frac{M_j}{N1} \quad (23)$$

式 (19) と式 (22) より次の関係を得る。

$$\sum_{j=1}^c f_r(r_j)\hat{I}[g(r_j)]\Delta(r_j) = P_{fe}^o \quad (24)$$

また式 (23) と式 (24) より

$$f_r(r_j)\hat{I}[g(r_j)]\Delta(r_j) = \frac{M_j}{N1}, \quad (j=1, 2, \dots, c) \quad (25)$$

式 (23)、式 (25) を式 (22) に代入して、 $h_r(r_j)$ は次式で与えられる。

$$h_r(r_j) = \frac{M_j}{M\hat{I}[g(r_j)]\Delta(r_j)}, \quad (j=1, 2, \dots, c) \quad (26)$$

$h_r(r_j)$ の概念図を Fig. 1 に示す。

$\hat{I}[g(r_j)]$ は一般に解析的に算定できないので補足シミュレーションで推定する。

補足シミュレーションによる $\hat{I}[g(r_j)]$, ($j=1, 2, \dots, c$) の推定は次のように行う。

j 番目の区間に対応する動径 r_j を指定し、これに、 k 個の標準正規乱数によって生成される方向ベクトル $\mathbf{a}^{(i)}$, ($i=1, 2, \dots, L$) のサンプルを掛けて、 j 番目の区間に一樣なサンプルを L 個生成する。 j 番目の区間の破損領域に入った個数 L_j の総数 L に対する割合が $\hat{I}[g(r_j)]$ の推定値となる。

以上より、破損領域重点サンプリング密度の度数分布

Fig. 1. Frequency distribution of the importance sampling density defined in the limit of the failure region.

$h_r(r_j)$, ($j=1, 2, \dots, c$) が決定される。破損領域重点サンプリング密度の度数分布を構成するのに必要なサンプルの総数は、 $N1$ (予備シミュレーション) + $N2$ [(補足シミュレーション) = $c \times L$] である。

効率的に M , M_j と $\hat{I}[g(r_j)]$, ($j=1, 2, \dots, c$) を求めるために、本研究では、予備シミュレーションおよび補足シミュレーションは、信頼性指標 β を半径とする超球 (β 領域と呼ぶ) をサンプリング対象から除外する領域分割法を適用する。 β 領域外部のサンプリング対象領域は、Fig. 2 に示すように原点を中心に一定間隔 w の同心超球で囲まれた区間に分けられる (区間数 c)。区間 $r_{j+1} - r_j = w$, ($j=1, 2, \dots, c$) は一定とする。Fig. 2 は複数の限界状態関数, $g_l(\mathbf{x})=0$, ($l=1, 2, \dots$) が存在している多破損モードの場合のサンプリング対象領域を表わす。

破損領域重点サンプリング密度の度数分布の累積相対度数分布 $H_r(r_j)$ は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} H_r(r_j) &= \sum_{i=1}^j h_r(r_i)\hat{I}[g(r_i)]\Delta(r_i) \\ &= \sum_{i=1}^j \frac{M_i}{M} \end{aligned} \quad (27)$$

破損領域重点サンプリング密度の度数分布に従うサンプルの生成法を要約すると、まず各区間の相対度数 M_j/M の累積値を計算する。つぎに逆関数法を適用し一様乱数 $u^{(i)}$ に対応する $H_r(r_j)$ の逆関数 $r_j^{(i)}$ を求める。ただし $r_j^{(i)}$ は区間の中点をとるものとする。

破損領域重点サンプリング密度の度数分布 $h_r(r_j)$, (j

Fig. 2. Intervals of sampling region outside the β -sphere.

$=1, 2, \dots, c$) は、限られた領域 (1 番目の区間から c 番目の区間までの領域) で定義されている. このため破損領域重点サンプリング密度の度数分布に基づく推定量は、厳密には構造破損確率の不偏推定量とならない. しかし c を十分大きくとれば区間外の領域は、構造破損確率の算定に無視できる領域であるため、破損領域重点サンプリング密度の度数分布に基づく構造破損確率の推定量は、不偏推定量とみなせる. そしてその分散はゼロとなることも容易に示される. (付録参照)

4 シミュレーション計算例

4.1 計算条件

シミュレーションで用いた正規乱数は、一様乱数を Box-Müller 法により変換して生成した. ただし一様乱数は、あらかじめ IBM3090-170S のサブルーチンを利用して生成した約100万個の乱数列を外部記憶装置に記録したものをを用いた. 一様乱数の等確率性, 系列相関および, 連の検定については有意水準 5% で棄却されないことを確認している. 使用した計算機と言語は, ACOS410, FORTRAN-77 である.

構造破損確率の推定を行った構造システムの限界状態関数を次式に示す.

$$(1 + X_2 - X_1^2) < 0 \cup (1 - X_2 - X_1^2) < 0 \quad (28)$$

この限界状態関数は、矩形断面を有する梁の図心に軸力 X_1 とモーメント X_2 が同時にはたらく場合の構造破損を判別するものである. 基本確率変数 X_1, X_2 は、それぞれ $N(0.1, 0.1^2), N(0.05, 0.2^2)$ に従う正規確率変数であり、構造破損確率は 2.3×10^{-6} と算定されている.

この限界状態関数の β は 2 つあり、 $\beta_1 = 4.66, \beta_2 = 5.16$ で、 β 領域の半径として $\beta = 4.66$ を採る. β 領域の確率 P の値は、 χ^2 累積分布より解析的に求められ ($1 - 1.92538 \times 10^{-5}$) となる.

4.2 破損領域重点サンプリング密度の度数分布

β 領域の外部のどの範囲までを考慮して破損領域重点サンプリング密度の度数分布を決定するかは、限界状態関数と基本確率変数の分布特性によって変わると考えられる. サンプル数 $N_1 = 200, 1000$ の予測シミュレーションを実行した結果、 $\beta + 1.3 < r$ の範囲には、サンプルが全く生成されなかった. そこで β 領域の外部の動径の範囲 $\beta < r \leq \beta + 1.3$ をサンプリングの対象範囲とし、これを区間数 $c = 10$ に分割し、区間幅を $w = 0.13$ とした. 各 N_1 に対して、破損領域に生成されるサンプル数

Fig. 3. Importance sampling densities.

M は、それぞれ 22, 116 であった.

各区間の $\hat{I}[g(r_j)]$ を推定する補足シミュレーションのサンプル数は、 $L = 100$ とした. したがってすべての区間の $\hat{I}[g(r_j)]$, ($j = 1, 2, \dots, c$) を求めるのに要するサンプル数は、 $N_2 (= c \times L) = 1000$ 個である. 以上によって決定された破損領域重点サンプリング密度の度数分布 $h_r(r_j)$, ($j = 1, 2, \dots, c$) を Fig. 3 に示す. また参考文献 2 の P_f の算定値 2.3×10^{-6} を厳密解とみて、式 (21) で与えられる理論的重点サンプリング密度関数も併せて Fig. 3 に示す. これより $N_1 = 1000$ で推定した破損領域重点サンプリング密度は、理論的重点サンプリング密度関数とほぼ一致していることがわかる.

4.3 シミュレーション結果

上で決定した破損領域重点サンプリング密度の度数分布 $h_r(r_j)$, ($j = 1, 2, \dots, c$) を用いて、サンプル数 N の重点サンプリング・シミュレーションを実行し、構造破損確率の推定量とその分散を求めた.

提案手法に基づいて推定量を得るのに要した総サンプル数 $N_t = \{N + N_1 (= 1000) + N_2 (= 1000)\}$ に対して、多破損モード重点サンプリング法²⁾、および領域分割シミュレーション^{8), 9)}に基づく構造破損確率の推定量とその変動係数の収束の様子を Fig. 4, Fig. 5 に比較して示す. 提案手法による推定量は、総サンプル数に対して厳密解への収束が他の手法に比べ速く、その変動係数も小さい値になることが示される.

つぎに総サンプル数 $N_t = \{N (= 500) + N_1 (= 200, 1000) + N_2 (= 1000)\}$ に相当する場合について、各手法に基づく構造破損確率の推定量の結果を Table I に示す.

Fig. 4. Comparison of the failure probability estimates.

Fig. 5. c.o.v.'s of the failure probability estimates.

Table I. Comparison of the failure probability estimates.

Total sample size N_t	1700	2500
Proposed method	$P_{fe}=2.27 \times 10^{-6}$ c. o. v. = 1.74×10^{-2} $N=500$, $N_1=200$, $N_2=1000$	$P_{fe}=2.30 \times 10^{-6}$ c. o. v. = 1.10×10^{-2} $N=500$, $N_1=1000$, $N_2=1000$
ISPUD for multi mode failure (I.S.M.)	$P_{fe}=2.01 \times 10^{-6}$ c. o. v. = 6.37×10^{-2} $N=1700$, $N_1=0$, $N_2=0$	$P_{fe}=2.23 \times 10^{-6}$ c. o. v. = 6.65×10^{-2} $N=2500$, $N_1=0$, $N_2=0$
Monte Carlo with partition of the region (M.C.P.)	$P_{fe}=2.32 \times 10^{-6}$ c. o. v. = 6.55×10^{-2} $N=1700$, $N_1=0$, $N_2=0$	$P_{fe}=2.25 \times 10^{-6}$ c. o. v. = 5.49×10^{-2} $N=2500$, $N_1=0$, $N_2=0$
Exact ²⁾	$P_f=2.30 \times 10^{-6}$	

c. o. v. : coefficient of variation of P_{fe} .

同じ総サンプル数に対して、提案手法は構造破損確率の推定精度もよくその変動係数の小さい推定量を与えることがわかる。

5 結 論

本研究では、構造破損確率の粗い推定量を用いて、破損領域のみに限定して定義される重点サンプリング密度を構成し、これを用いた重点サンプリング・シミュレーションによる構造破損確率の推定法を提案した。

提案手法は、重点サンプリング密度を破損領域に落ちるサンプルの分布特性に基づいて構成するので、重点サンプリング・シミュレーションにおいて、サンプルに無駄が生じない。また重点サンプリング密度を極座標系の動径に関する度数分布として構成するので、多変数構造システムの問題を変数の数にかかわらず、1変数の問題に帰着して、効率的に重点サンプリング・シミュレーションを実行できる。

提案手法は、少ないサンプルで多破損モードを有する構造システムの破損確率の推定量の精度の向上ならびに推定量の分散減少効果について効果的である。

本研究に対して、ご助言をいただいた大阪府立大学工学部室津義定教授、IBM3090-170S の一様乱数データ作成にご協力いただいた近畿大学理工学部経営工学科玉城眞吉氏に謝意を表します。

付 録

提案手法による構造破損確率の推定量が不偏推定量であり、その分散はゼロとなることを以下に示す。

(1) 構造破損確率の推定量の期待値

(a) 重点サンプリング密度関数が、式(21)で与えられる場合：

構造破損確率の推定量は次式から求められる。

$$P_{fe} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f_r(r^{(i)})}{h_r(r^{(i)})} \quad (\text{A-1})$$

推定量の期待値は

$$\begin{aligned} E\{P_{fe}\} &= E\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f_r(r^{(i)})}{h_r(r^{(i)})}\right\} \\ &= E\left\{\frac{f_r(r)}{h_r(r)}\right\} = \int_{\text{all } r} \frac{f_r(r)}{h_r(r)} h_r(r) \hat{I}[g(r)] d\Delta(r) \end{aligned}$$

$$= \int_{\text{all } r} f_r(r) \hat{I}[g(r)] d\Delta(r) = P_f \quad (\text{A-2})$$

したがって構造破損確率の推定量は不偏推定量となる。

(b) 重点サンプリング密度が式(26)で与えられる場合：式(26)の $h_r(r_j)$, ($j=1, 2, \dots, c$) に従って N 個のサンプルを生成すると j 番目の区間に落ちるサンプル数は、 $N \cdot M_j/M$ 個であるので、式(A-1)の期待値は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} E\{P_{fe}\} &= E\left\{\frac{1}{N} \left[\sum_i^{NM_j/M} \frac{f_r(r_i^{(j)})}{h_r(r_i^{(j)})} + \dots + \sum_i^{NM_c/M} \frac{f_r(r_i^{(c)})}{h_r(r_i^{(c)})} \right]\right\} \quad (\text{A-3}) \end{aligned}$$

ここで j 番目の総和記号 $\sum(\cdot)$ に付した NM_j/M は $(\cdot)$ を i について、 NM_j/M 個のサンプルの総和をとることを示す。次の関係式

$$\begin{aligned} &\int_{\text{all } r} h_r(r) \hat{I}[g(r)] d\Delta(r) \\ &= \int_{r_1}^{r_2} h_r(r_1) \hat{I}[g(r_1)] d\Delta(r_1) + \dots \\ &\quad + \int_{r_j}^{r_{j+1}} h_r(r_j) \hat{I}[g(r_j)] d\Delta(r_j) + \dots \\ &\quad + \int_{r_c}^{r_{c+1}} h_r(r_c) \hat{I}[g(r_c)] d\Delta(r_c) = 1 \quad (\text{A-4}) \end{aligned}$$

$$\int_{r_j}^{r_{j+1}} h_r(r_j) \hat{I}[g(r_j)] d\Delta(r_j) = \frac{M_j}{M} \quad (\text{A-5})$$

を用い、式(A-3)の j 番目の区間の期待値

$$\begin{aligned} &E\left\{\frac{1}{N} \left[\sum_i^{NM_j/M} \frac{f_r(r_i^{(j)})}{h_r(r_i^{(j)})} \right]\right\} \\ &= E\left\{\frac{f_r(r_j)}{h_r(r_j)} \frac{M_j}{M}\right\} \\ &= \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{f_r(r_j)}{h_r(r_j)} \frac{h_r(r_j)}{\left\{\frac{M_j}{M}\right\}} \hat{I}[g(r_j)] d\Delta(r_j) \\ &= P_f^j \quad (\text{A-6}) \end{aligned}$$

を得る。ここで P_f^j は j 番目の区間の破損確率成分である。

構造破損確率を各区分ごとに表わすと、

$$\begin{aligned} P_f &= \int_{\text{all } r} f_r(r) \hat{I}[g(r)] d\Delta(r) \\ &= \int_{r_1}^{r_2} f_r(r_1) \hat{I}[g(r_1)] d\Delta(r_1) + \dots + \\ &\quad \int_{r_c}^{r_{c+1}} f_r(r_c) \hat{I}[g(r_c)] d\Delta(r_c) + \varepsilon \\ &= \sum_{j=1}^c P_f^j + \varepsilon \quad (\text{A-7}) \end{aligned}$$

となる。ここで ε は、区間外の領域における破損確率成分である。以上より式(A-3)の値は式(A-6)と式(A-7)より、次式で表わされる。

$$E\{P_{fe}\} = \sum_{j=1}^c P_f^j = P_f - \varepsilon \quad (\text{A-8})$$

区間数 c を十分大きくとることにより区間外の領域

の破損確率成分 ε はゼロとみなせる。これより構造破損確率の推定量は不偏推定量となる。

(2) 構造破損確率の推定量の分散

(a) 重点サンプリング密度関数が破損領域にのみ定義され、式(21)で与えられる場合:

構造破損確率の推定量の分散は次式で表わされる。

$$\text{Var}\{P_{je}\} = E\{(P_{je})^2\} - [E(P_{je})]^2 \quad (\text{A-9})$$

式(A-9)の第2項は式(A-2)より

$$[E(P_{je})]^2 = P_j^2 \quad (\text{A-10})$$

式(A-9)の第1項は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} E\left\{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f_r(r^{(i)})}{h_r(r^{(i)})}\right)^2\right\} \\ = \frac{1}{N^2} \left[E\left\{\sum_{i=1}^N \left(\frac{f_r(r^{(i)})}{h_r(r^{(i)})}\right)^2\right\} \right. \\ \left. + E\left\{2 \sum_{i < j} \frac{f_r(r^{(i)})}{h_r(r^{(i)})} \cdot \frac{f_r(r^{(j)})}{h_r(r^{(j)})}\right\} \right] \quad (\text{A-11}) \end{aligned}$$

式(A-11)の第1項は次のようになる。

$$\begin{aligned} E\left\{\sum_{i=1}^N \left(\frac{f_r(r^{(i)})}{h_r(r^{(i)})}\right)^2\right\} &= NE\left\{\left(\frac{f_r(r)}{h_r(r)}\right)^2\right\} \\ &= N \int_{\text{all } r} \left(\frac{f_r(r)}{h_r(r)}\right)^2 h_r(r) \hat{I}[g(r)] d\Delta(r) \\ &= NP_j \int_{\text{all } r} \frac{f_r(r)}{h_r(r)} \frac{f_r(r)}{P_j} \hat{I}[g(r)] d\Delta(r) \\ &= NP_j \int_{\text{all } r} \frac{f_r(r)}{h_r(r)} h_r(r) \hat{I}[g(r)] d\Delta(r) \\ &= NP_j \int_{\text{all } r} f_r(r) \hat{I}[g(r)] d\Delta(r) = NP_j^2 \quad (\text{A-12}) \end{aligned}$$

式(A-11)の第2項は次のようになる。

$$\begin{aligned} E\left\{2 \sum_{i < j} \frac{f_r(r^{(i)})}{h_r(r^{(i)})} \frac{f_r(r^{(j)})}{h_r(r^{(j)})}\right\} \\ = N(N-1) \left[\int_{\text{all } r} \frac{f_r(r)}{h_r(r)} h_r(r) \hat{I}[g(r)] d\Delta(r) \right]^2 \\ = N(N-1) P_j^2 \quad (\text{A-13}) \end{aligned}$$

以上より構造破損確率の推定量の分散はゼロとなる。

$$\text{Var}\{P_j\} = \frac{1}{N^2} (NP_j^2 + N(N-1)P_j^2) - P_j^2 = 0 \quad (\text{A-14})$$

(b) 重点サンプリング密度が式(26)で与えられる場合:

式(A-9)の第2項は式(A-8)より P_j^2 となる。

式(A-11)の第1項は次式で表わされる。

$$E\left\{\sum_{i=1}^N \left(\frac{f_r(r^{(i)})}{h_r(r^{(i)})}\right)^2\right\} = E\left\{\sum_{i=1}^{NM_j/M} \left(\frac{f_r(r_i^{(i)})}{h_r(r_i^{(i)})}\right)^2\right\}$$

$$\begin{aligned} +, \dots, + \sum_{i=1}^{NM_j/M} \left(\frac{f_r(r_j^{(i)})}{h_r(r_j^{(i)})}\right)^2 \\ +, \dots, + \sum_{i=1}^{NM_c/M} \left(\frac{f_r(r_c^{(i)})}{h_r(r_c^{(i)})}\right)^2 \quad (\text{A-15}) \end{aligned}$$

式(A-15)の j 番目の区間の期待値は次のようになる。

$$\begin{aligned} E\left\{\sum_{i=1}^{NM_j/M} \left(\frac{f_r(r_j^{(i)})}{h_r(r_j^{(i)})}\right)^2\right\} \\ = P_j^{(j)} N \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{f_r(r_j)}{h_r(r_j)} \frac{f_r(r_j)}{P_j^{(j)}} \hat{I}[g(r_j)] d\Delta(r_j) \\ = P_j^{(j)} NE\left[\frac{f_r(r_j)}{h_r(r_j)}\right] = NP_j^{(j)} P_j \quad (\text{A-16}) \end{aligned}$$

式(A-11)の第1項は式(A-15)と式(A-16)から次のようになる。

$$\begin{aligned} E\left\{\sum_{i=1}^N \left(\frac{f_r(r^{(i)})}{h_r(r^{(i)})}\right)^2\right\} \\ = NP_j \sum_{j=1}^c P_j^{(j)} = NP_j (P_j - \varepsilon) = NP_j^2 \quad (\text{A-17}) \end{aligned}$$

また式(A-11)の第2項は式(A-13)と同じく $N(N-1)P_j^2$ となる。以上より構造破損確率の推定量の分散はゼロとなる。

(平成5年12月2日 日本材料学会第11回材料・構造信頼性シンポジウムにて講演)

参考文献

- 1) R. Y. Rubinstein, Chap. 4 (1981) John Wiley and Sons, New York.
- 2) G. I. Schuëller, R. Stix, Structural Safety, **4**, 293 (1987).
- 3) 米澤政昭, 奥田昇也, 乗本 学, シミュレーション, **9**, 278 (1990).
- 4) C. G. Bucher, Structural Safety, **5**, 119 (1988).
- 5) G. L. Ang, A. H-S. Ang and W. H. Tang, Proc. of ICOSAR' 89, 1193 (1990).
- 6) M. G. Kendall, A course in the Geometry of n -Dimensions, p. 18 and p. 35 (1961) Charles Griffiein, London.
- 7) Ang, A. H-S. and Tang, W. H., Probability Concepts in Engineering Planning and Design, vol. 2, Decision, Risk and Reliability, p. 284 (1984) John Wiley and Sons.
- 8) Masaaki Yonezawa, Shoya Okuda, Reliability and optimization of structural systems, V, IFIP Transaction B-12, 261 (1993).
- 9) 米澤政昭, 奥田昇也, シミュレーション, **4**, 335 (1993).