極値統計解析による最大き裂長さの推定における 抽出面積と分割数

— 分布形によらない推定精度の評価 —[†]

松村 隆* 市川 昌弘*

Suitable Sample Area and Number of Division in Estimation of Maximum Crack Length by Extreme Value Analysis — Evaluation of Estimation Accuracy Independent of Distribution Forms —

by

Takashi MATSUMURA* and Masahiro ICHIKAWA*

In the estimation of maximum crack length in a structural component by the statistics of extremes, one encounters the problem of how to choose the sample area S (the ratio of the sample area to the whole area) and the number of division m . In a previous paper, the present authors showed that the root mean squared error of the estimated value, $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}$ can be approximated by a linear function of $\log S$ for the case when individual crack lengths follow an exponential distribution. In the present paper, by conducting theoretical analysis and Monte Carlo simulation, it is shown that $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ can be approximated by a linear function of $\log T$ regardless of the distribution forms of individual crack lengths, where σ is the variance of the double exponential distribution which the largest crack length in each elemental area follows, and $T (=m/S)$ is the return period. It is also shown that $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ by Monte Carlo simulation is 1.1~1.9 times larger than that by the theoretical analysis. The causes for this difference are discussed.

Key words : Reliability, Maximum crack length, Remaining life, Extreme value analysis, Monte Carlo simulation

1 緒 言

構造物の安全性、信頼性を確保するために、構造物の損傷状況を把握し、余寿命を推定することは重要である。腐食余寿命の推定に対しては極値統計解析の適用が以前から行われているが、近年、疲労余寿命の推定方法としても極値統計解析の適用が研究されている。^{1)~4)}

疲労の場合には、構造物の表面に存在する分布き裂の一部分を抽出し、これより構造物に存在する最大き裂長さの推定を行う。すなわち、Fig. 1(a)のように全面積 A の中に面積 SA ($S < 1$) を抽出し、これを m 個の要素面積に等分して、各要素面積中の最大き裂長さを測定し、この測定値に適当な極値分布をあてはめて、全面積 A の中の最大き裂長さを推定する（なお、 m 個の要素を Fig. 1(b)のように離れた場合にとっても同じである）。この手法を適用する際、問題となるのが抽出面積率 S と分割数 m の決め方である。これらは、最大き裂長さの推定精度に影響を与えるパラメータであるが、その決定の指針は得られていない。

著者らは、この問題について検討を行ってきた。いま全面積中の最大き裂長さを $X_{\max}$ とし、その推定値を $\bar{X}_{\max}$ とすると、 $\bar{X}_{\max}$ の平均二乗誤差の平方根 (Root

Mean Squared Error; $RMSE$) $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}$ は推定精度の一つの尺度である。 $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}$ は推定値と真値の差の二乗平均の平方根、すなわち

$$\sqrt{V(\bar{X}_{\max})} = [E\{(\bar{X}_{\max} - X_{\max})^2\}]^{1/2} \quad (1)$$

である。前報では、き裂長さの原分布が指数分布の場合に対して、 $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}$ の値を理論式およびモンテカルロシミュレーションにより求め、 $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}$ が $\log S$ の一次式で近似できることを見いだした。前報のこの結果より、 $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}$ と二重指数分布の標準偏差 σ の比 $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ はき裂長さの原分布の形に関係なく、 $\log S$ の一次式で近似できることが予想される。なぜならば指数分布の場合、 σ は S や m にあまり影響を受けないからである。

本報でははじめに、上記の予想の妥当性をしらべる。ただし、再帰期間（全面積と要素面積の比）を T とすると、 $S = m/T$ の関係より、 $\log S$ の一次式は $\log T$ の一次式ともなるので、本報では $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ と $\log S$ の関係の代わりに、 $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ と $\log T$ の関係をしらべた。つぎに、原分布が指数分布の場合について、 $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ の値をモンテカルロシミュレーションにより詳しく求め、理論値と比較し、両者がどれくらい違う

[†] 原稿受理 平成6年7月8日 Received July 8, 1994

* 正会員 電気通信大学機械制御工学科 〒182 調布市調布ヶ丘, Dept. of Mech. & Control Eng., Univ. of Electro-Communications, Chofugaoka, Chofu, 182

(a) Example 1.

(b) Example 2.

Fig. 1. Sample area divided into m elemental areas.

か、また、その違いの原因は何かを検討した。

2 理論解析による $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ の評価

極値統計による極値の推定は、各要素中の最大値が近似的に極値の漸近分布に従うということを前提にしている。この前提をさらに強め、各要素中の最大値が厳密に極値の漸近分布に従う（すなわち、各要素中の最大値は極値の漸近分布に従う母数団からの抽出値である）と仮定すると、 $V(\bar{X}_{\max})$ を理論的に求めることができる。いま、極値の漸近分布として二重指数分布を考え、また直線のあてはめを MVLUE 法で行うと、平均二乗誤差 $V(\bar{X}_{\max})$ は理論的には次式で与えられる。

$$V(\bar{X}_{\max}) =$$

$$[A(m, m) \cdot y^2 + B(m, m) \cdot y + C(m, m)] \cdot \alpha^2 \quad (2)$$

ここで、 $A(m, m)$ 、 $B(m, m)$ 、 $C(m, m)$ は MVLUE 法の係数。また y は

$$y = -\ln\left[-\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)\right] \quad (3)$$

であり、 α は二重指数分布の尺度パラメータで、二重指数分布の標準偏差 σ と次式の関係がある。

$$\alpha = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma \quad (4)$$

式(2)に式(4)を代入し、 $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}$ と σ の比を求めると次式となる。

$$\frac{\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}}{\sigma} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sqrt{[A(m, m)y^2 + B(m, m)y + C(m, m)]} \quad (5)$$

式(5)を用いて $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ を計算した。分割数 m と再帰期間 T の値は次のようにとった。

m : 4, 8, 12, 16, 20, 23 分割の 6 通り。

T : 10000, 5000, 2000, 1000, 500, 200, 100, 50, 30 ($m=20, 23$ のみ), 20 ($m=4, 8, 12, 16$ のみ), 10 ($m=4, 8$ のみ) の 11 通り。

計算結果は Fig. 2 のようになった。図中の直線は各分割数 m に対して最小二乗法により求めた近似直線であり、計算点は直線に非常によくのっており、 $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ は $\log T$ の一次式で精度よく近似できることがわかる。

Fig. 2 より、 m = 一定ならば T が小さいほど $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ は小さくなること、また T = 一定ならば m が大きいほど $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ は小さくなることがわかる。これは、 m = 一定なら T が小さいほど、また T = 一定なら m が大きいほど抽出面積率 S が大きくなることから理解できる。Fig. 2 中の点線は S = 一定の曲線である。これより、 S = 一定ならば m を大きくする（すなわち、 T を大きくする）方が $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ は小さくなることがわかる。ただし、実際には可能な分割数 m には上限がある。なぜなら、 m をあまり大きくすると一要素面積中のき裂数が少なくなり、極値統計解析の前提が成立しなくなるからである。

つぎに、 $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ を $\log T$ の一次式で近似したときの係数を m の関数で表す。Fig. 2 において個々の分割数 m に対して最小二乗法により求めた近似直線の傾きを a 、切片を b とし、Fig. 3, 4 にこれらを ■ 印で示す。図中の曲線は、各種関数のあてはめを行い、相関係数が最も大きくなった関数を用いて描いた曲線であり、

Fig. 2. Relationship between $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ and T (by theory).

Fig. 3. Relationship between a and m (by theory).

Fig. 4. Relationship between b and m (by theory).

Fig. 5. Comparison between Eq. (5) and Eq. (8).

a , b の各点は、曲線に非常によくのっていることがわかる。この関数は次式で表される。

$$a = 1.85919 \times m^{-0.588452} \quad (6)$$

$$b = 0.192570 - 0.0818389 \times \log m \quad (7)$$

よって $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ の近似式は、式(6), (7)より

$$\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma = (1.85919 \times m^{-0.588452}) \times \log T + 0.192570 - 0.0818389 \times \log m \quad (8)$$

となる。

Fig. 5 は、式(5)による理論値と式(8)の近似直線を比較したものである。図より、式(5)は式(8)によって精度よく近似できることがわかる。

3 モンテカルロシミュレーションによる

$\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ の評価

3.1 シミュレーションの目的

2章では $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ の値を理論式(式(5))により計算した。この理論式は各要素面積中の最大き裂長さが正確に二重指数分布に従う(すなわち、二重指数分布からの抽出値である)ことを前提としている。しかし、実際には、この前提は厳密には成立しない。そこで本章では $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ の値をモンテカルロシミュレーションにより求め、理論値と比較する。シミュレーションを行うには、き裂長さの原分布を与える必要があるが、ここでは指数分布の場合についてシミュレーションを行う。なお、き裂長さの原分布が指数分布の場合には、最大値の漸近分布は二重指数分布になる。¹¹⁾

3.2 シミュレーションの方法

シミュレーションは計算機により次の手順で行った。

① き裂を発生させる全面積を、あらかじめ再帰期間 T の数で分割しておく。例えば、再帰期間 T が 10000 の場合、縦に 100、横に 100 として格子状に分割する(格子の合計 10000 個)。この一つの格子が一要素面積に相当する。

② 全面積に、き裂総数 N の数だけき裂を発生させる。き裂がどの要素面積に入るかは一様乱数により決める。また、き裂長さは指定した分布型に従うものとする。

③ 発生させた N 個のき裂の最大き裂長さ $X_{\max, i}$ (i は i 回目のシミュレーションを意味する)を求める。

④ 全面積の中から分割数 m 個分の要素面積を一様乱数によって抽出する。抽出した各要素面積中の最大き裂長さ $\bar{X}_{\max, j}$ ($j=1 \sim m$) を求め、 $\bar{X}_{\max, j}$ を二重指数確率紙にプロットする。MVLUE 法を用いて直線をあてはめ、再帰期間 T から最大き裂長さの推定値 $\bar{X}_{\max, i}$ を求める。

⑤ 同時に、あてはめた二重指数分布の標準偏差 σ_i を計算する。 σ_i は次式により計算される。

$$\sigma_i = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sum_{j=1}^m b_j(m, m) \cdot \bar{X}_{\max, j} \quad (9)$$

$b_j(m, m)$ は、MVLUE 法の係数である。

⑥ ①~⑤を M ($=10000$) 回繰返す。

⑦ $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}$ および σ_i の平均値 σ を次式より計算し、これより $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ を求める。

$$\sqrt{V(\bar{X}_{\max})} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (\bar{X}_{\max, i} - \bar{X}_{\max})^2}{M}} \quad (10)$$

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^M \sigma_i}{M} \quad (11)$$

シミュレーションで用いた分割数 m 、き裂総数 N 、再帰期間 T の値と、その他の条件を以下に示す。

- ① き裂長さの分布形(原分布): 平均長さ 1 mm の指数分布。
- ② 分割数 m : 4, 8, 12, 16, 20, 23 分割の 6 通り。
- ③ き裂総数 N : 1000, 10000, 100000 の 3 通り。
- ④ 再帰期間 T : 10000, 5000, 2000, 1000, 500, 200, 100, 50, 30 ($m=20, 23$ のみ), 20 ($m=4, 8, 12, 16$ のみ), 10 ($m=4, 8$ のみ) の 11 通り。
- ⑤ 一要素面積の平均き裂数 n : 10 以上。
- ⑥ 繰返し数 M : 10000 回。

一要素面積中の平均き裂数 n について $n \geq 10$ という条件を設けたのは、 n がある程度以下になると各要素面積中の最大き裂長さの分布が極値分布で近似できなくなり、極値統計解析の手法の前提が成立しなくなるためである。今回のシミュレーションでは、各要素面積中の最大き裂長さ $\bar{X}_{\max, j}$ を二重指数確率紙にプロットした時に相関係数をあわせて計算し(シミュレーションの手順④)、シミュレーション終了後相関係数の平均値を求めた。本論文では、相関係数の平均値が 0.9 以上の場合を二重指数分布にはほぼ従っているとした。その結果、 $n \geq 10$ とすれば、相関係数の平均値が 0.9 以上となるこ

とがわかった。上記の条件を満たす組合わせのシミュレーションを行い、分割数 m と再帰期間 T に対する $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}/\sigma$ の値の計算を行った。

3.3 結果と考察

シミュレーションの結果を、き裂総数 $N=1000$, 10000, 100000 の各場合に対して Fig. 6 (a)~(c) に示す。Fig. 6 より次のことがわかる。

(1) 再帰期間 T と分割数 m のそれぞれが等しい場合、 $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}/\sigma$ はき裂総数 N にほとんど依存しない (Fig. 6 の (a), (b), (c) の 3 つの図を重ねてみると、ほとんど完全に一致する)。

(2) $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}/\sigma$ と T の関係はシミュレーションの場合も片対数グラフ上でほとんど直線となる。

(a) $N=1000$.

(b) $N=10000$.

(c) $N=100000$.

Fig. 6. Relationship between $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}/\sigma$ and T (by simulation).

つぎに、前述の理論式による結果 (Fig. 2) を Fig. 6 と比較すると、次のことがわかる。

(1) シミュレーションの結果と理論式による結果は傾向的によく似ている。

(2) $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}/\sigma - \log T$ のグラフの傾きは、同じ m に対してシミュレーションと理論とではほぼ等しい。

(3) しかし、定量的にみると、 $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}/\sigma$ はシミュレーションの値の方が理論値よりも大きく、前者は後者の約 1.1~1.9 倍である。

上記 (3) の違いは重要であるので、その原因を考察する。標準偏差 σ について理論解析とシミュレーションの結果を Table I に示す。この表から、理論解析およびシミュレーションによる σ の値は、ほぼ等しくなっていることがわかる。よって、理論解析とシミュレーションとで $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}/\sigma$ の値が異なる原因は、 σ ではなく $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}$ にあることがわかる。

Table I. σ by theory and simulation.

($N=100000$, $m=4$)

T	σ Theory	σ Simulation
10000	1.24	1.28
5000	1.26	1.28
2000	1.27	1.28
1000	1.28	1.28
500	1.28	1.28
200	1.28	1.28
100	1.28	1.28
50	1.28	1.28
20	1.28	1.28
10	1.28	1.28

つぎに $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}$ の値がシミュレーションと理論とで異なる程度を定量的にくわしく調べる。Fig. 7 (a)~(c) は、き裂総数 $N=1000$, 10000, 100000 の各場合に対して、横軸に再帰期間 T 、縦軸にシミュレーションによる $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}$ の値を $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}$ の理論値で割った値 ($\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}$ (simulation) / $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}$ (theory)) をとって示したものである。Fig. 7 (a)~(c) より次のことがわかる。

(1) 分割数 m を固定して考えた場合、再帰期間 T が小さくなるほど $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}$ (simulation) / $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}$ (theory) は大きくなる。

(2) 再帰期間 T を固定して考えた場合、分割数 m が大きくなるほど $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}$ (simulation) / $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}$ (theory) は大きくなる。

(3) 再帰期間 T と分割数 m が等しい場合、 $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}$ (simulation) / $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}$ (theory) はき裂総数 N にほとんど依存しない。

Fig. 8 は、最大き裂長さの推定の一例である (き裂総数 $N=100000$, 分割数 $m=23$, 再帰期間 $T=200$ の場合)。

図中の A 点は抽出面積中の最大き裂長さ、B 点は MVLUE 法によって推定された最大き裂長さである。この図のように、推定された最大き裂長さ (B 点) が

抽出面積中の最大き裂長さ (A 点) より短くなっている場合には, 最大き裂長さの推定値は当然全面積中の最大き裂長さより短いから, 精度よく最大き裂長さを推定できない. 上記の例と同様のケースは, 10000 回中に約 800 回あった. 仮に, このようなケース (約 800) を除いてシミュレーションの場合の $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}$ を再計算すると 1.60 (除かない場合は 1.63) となる. また, $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}(\text{simulation})/\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}(\text{theory})$ の値も 1.63 (除かない場合は 1.66) となり, 理論値に近づくことがわかる.

以上のように推定された最大き裂長さが, 抽出面積中

Fig. 7. $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}(\text{simulation})/\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}(\text{theory})$.

Fig. 8. Undesirable case.

の最大き裂長さより短くなるような場合は, $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ の理論解析では考慮されておらず, これが, シミュレーションと理論とで $V(\bar{X}_{\max})$ の値が異なる原因の一つであると考えられる. また, 理論では各要素面積に同数のき裂が存在していると仮定しているが, シミュレーションではき裂の位置を一樣乱数で決めているので, 一般に同数とはならないことも原因の一つと考えられる.

つぎに, 2 章と同様に $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ のシミュレーションの結果を $\log T$ の一次式で近似したときの係数を m の関数で表す. 上記で述べたように再帰期間 T と分割数 m が等しい場合, $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ はき裂総数 N にほとんど依存しないので, 傾き a と切片 b はき裂総数 N ごとに求めるのではなく, 分割数 m ごとにまとめて最小二乗法により求めた. Fig. 9, 10 に最小二乗法による a, b の値を ■ 印で示す. 図中の曲線はこれに各種関数のあてはめを行い, 相関係数が最も大きくなった関数を用いて描いた曲線である. a, b の各点は, 曲線に非常によくのっていることがわかる. この関数は次式で表される.

$$a = 2.03081 \times m^{-0.647730} \quad (12)$$

$$b = 0.114928 + 0.385589 \times \log m \quad (13)$$

よって $\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma$ の近似式は, 式 (12), (13) より

$$\sqrt{V(\bar{X}_{\max})}/\sigma = (2.03081 \times m^{-0.647730}) \times \log T + 0.114928 + 0.385589 \times \log m \quad (14)$$

となる. Fig. 11 は, き裂総数 $N=10000$ の場合のシミュレーションの結果と式 (14) の近似式を比較したものであり, シミュレーション結果は近似直線によくのって

Fig. 9. Relationship between a and m (by simulation).

Fig. 10. Relationship between b and m (by simulation).

Fig. 11. Comparison of $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}/\sigma$ by simulation and Eq. (14).

いることがわかる。

4 結 論

最大き裂長さの推定に極値統計解析を適用する場合に、再帰期間 T と分割数（要素面積の数） m の選び方が問題となる。この問題の解決を目的として理論解析とモンテカルロシミュレーションを行った。これより次の結論が得られた。

(1) 全面積中の最大き裂長さの推定値 $\hat{X}_{\max}$ の平均二乗誤差の平方根を $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}$ とし、各要素面積中の最大

き裂長さが従う二重指数分布の標準偏差を σ とすると、 $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}/\sigma$ の理論値は、個々のき裂長さの原分布の形に関係なく、 $\log T$ の一次式で精度よく近似できる（ T は再帰期間）。この近似式は、式 (8) で表される。

(2) き裂長さの原分布が指数分布の場合に対して、モンテカルロシミュレーションで求めた $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}/\sigma$ も $\log T$ の一次式で近似できるが、理論式から求めた値に比べ、1.1～1.9 倍大きい。この違いの原因は σ ではなく $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}$ の値が理論解析とシミュレーションとで異なるためである。

(3) 抽出面積率 $S(=m/T)$ が同じならば、分割数 m を大きくするほど（したがって、再帰期間 T を大きくするほど）、 $\sqrt{V(\hat{X}_{\max})}/\sigma$ は小さくなる。ただし、可能な分割数 m には上限がある。

（平成 5 年 12 月 2 日 日本材料学会第 12 回材料・構造信頼性シンポジウムにて講演）

参 考 文 献

- 1) P. M. Azis, Corrosion, **12**, 495 (1956).
- 2) 石川雄一, 防食技術, **29**, 502 (1980).
- 3) 小松正倫, 柘植宏之, 明石正恒, 正村克身, 石本裕保, “装置材料の寿命予測入門” (1984) 丸善.
- 4) 今川博之, 松野健三, 材料, **38**, 823 (1989).
- 5) 北川英夫, 中曽根祐司, 島崎 剛, 飯田峰昭, 材料, **34**, 314 (1984).
- 6) 桜井茂雄, 宇佐美三郎, 宮田 寛, 日本機械学会論文集, A-53, 451 (1987).
- 7) 桜井茂雄, 宇佐美三郎, 梅沢貞夫, 宮田 寛, 材料, **35**, 170 (1986).
- 8) M. Ichikawa, T. Takamatsu, T. Matsumura and T. Sawada, JSME Int. J. A-36, 121 (1993).
- 9) 市川昌弘, 徐 勇, 日本機械学会材料力学講演会講演論文集, No. 920-72, 714 (1992).
- 10) J. Lieblein, National Advisory Committee for Aeronautics, Tech. Note 3053, Washington D. C. (1954).
- 11) E. J. Gumbel, Statistics of Extremes, Columbia Univ. Press (1958).