層間変形を考慮した積層理論[†]

白 秋 実* 村 上 澄 男**
金 川 靖** 田 中 行 平*

A Lamination Theory Incorporating the Effect of Interlayer Deformation

by

Q. Sh. BAI*, Sumio MURAKAMI**, Yasushi KANAGAWA**
and Kohhei TANAKA*

The effect of transverse shear deformation induced by interlaminar stress on the in-plane behavior of angle-ply laminates is investigated. A laminate model is developed by incorporating the transverse deformation of interlayers. A linear shear slip theory is employed to describe the relation between interlaminar stress and the transverse shear deformation of the interlayer. The classical lamination theory based on a perfect bonding assumption is elaborated by allowing for interlayer shear slip. The resulting theory is applied to a series of angle-ply laminates tubes. It was observed that the transverse shear deformation affects significantly the mechanical behavior of the angle-ply laminates, especially for the laminates with weak interface bonding.

Key words : Lamination theory, Angle-ply laminate, Stiffness mismatch, Interlaminar stress, Equivalent interlayer

1 緒 言

積層間の完全接着を仮定した古典積層理論は、現在でも工学の分野で広く用いられているが、近年、その理論の限界がいくつか指摘されている。すなわち、一般の斜交積層板では、異なる繊維配向角を持つ単層板間の剛性の不連続により、層間応力が発生し、その応力が積層板における層間はく離を引き起こす^{1)~3)}。さらに層間応力により、面外変形が生じる。この面外変形は、薄い斜交積層板における面内変形よりも一般にかなり小さいが、局所的な微細構造変化をもたらす、層内での剛性の不連続や、層間応力集中とその緩和を引き起こす。したがって、局所的な損傷挙動の影響に加え、変形による層間応力もまた、積層板全体の剛性に大きな影響を及ぼす。

さらに、斜交積層円筒試験片に対する著者らの実験結果によれば、層間の損傷が存在しない場合でも、古典積層理論によって計算された弾性係数は、測定結果よりも大きな値を与える。このように斜交積層板、特に垂直方向の剛性の低い積層板や、層間に欠陥や損傷のある積層板に対しては、面外変形が顕著となり完全接着の仮定は適切ではない。

このような古典積層理論の限界を除くため、これまでこの理論の改良の方法がいくつか提案されている。はじめに、Toledano と Murakami^{5),6)} は、層間すべり変形のある厚い異方性積層板について研究し、仮想仕事の原理と Reissner の混合変分原理を用いて、界面でのすべりに

よる剛性の低下を考慮した積層理論を発展させた。しかし、彼らの理論では層間応力は外力の結果生じたものであり、層内での剛性の不連続によって引き起こされる層間応力は考慮されていない。Sun, Shi⁷⁾ らは、変位関数に対する高次理論と数値解析により積層複合平板の解析を行い、複合平板の変形と応力の解を得た。しかし、その変位場の仮定の限界から、層間応力による隣接 2 層の変位の不連続性は考慮されていない。Liu, Xu, Lu^{8),9)} らは、不完全接着のある複合積層板への積層理論の拡張を行い、層間応力による隣接 2 層間の変位の不連続性をその理論に導入した。この理論は、面外変形のある積層板の取扱いに対する一つの有効な方法を与えたが、解析が複雑なため一般的な積層板に対しては適切ではない。

なお、Whitney, Reddy^{10),11)} らも積層板における面外せん断変形の効果を検討しているが、彼らの論文は積層板の応力と変形の解析ではなく、横荷重によるその曲げと曲げ振動の解析を主な目的としている。

本論文では、面外変形のある中間層を持つ積層モデルを用いることによって古典積層理論に層間変形を組み込み、簡単な積層理論を展開するとともにその適用性を検討する。

2 古典積層理論の修正

2・1 層間の面外変形を考慮した積層板モデル

積層板の面外ひずみ ϵ_{13} , ϵ_{23} は、隣接 2 層間の剛性の不連続による層間応力 τ_{13} , τ_{23} によって生じる。Fig. 1

[†] 原稿受理 平成 8 年 2 月 26 日 Received Feb. 26, 1996

* 名古屋大学大学院 〒464-01 名古屋市中種区不老町, Graduate Student, Nagoya Univ., Chikusa-ku, Nagoya, 464-01

** 正 会 員 名古屋大学工学部機械工学科 〒464-01 名古屋市中種区不老町, Dept. of Mech. Eng., Nagoya Univ., Chikusa-ku, Nagoya, 464-01

Fig. 1. Model of two-layer laminate.

に示す積層モデルを用い、各単層板の τ_{13} , τ_{23} の影響は中間層に含まれ、層間応力 τ_{13} , τ_{23} は厚さ δ の中間層の面外変形によってだけ生じると仮定する。ここでは、この中間層のことを等価中間層と呼ぶ。層間応力は中間層の面外変形を引き起こし、この中間層の変形によって隣接する単層板の変位に不連続が生じる。

Fig. 1 に示すように、試験片座標系の直交座標 (x_1 , x_2 , x_3) をとる。ここに、 x_1 - x_2 平面は積層板の中央面にとる。

初めに、議論の簡単化のため Fig. 1 に示す 2 層積層板について考える。積層板における各単層板の面内応力は、外力による応力 σ_{ij} ($i, j=1, 2$) と、隣接する層によって規定される拘束応力 $\Delta\sigma_{ij}$ ($i, j=1, 2$) との和からなる。本論文では、以降この拘束応力のことを、付加応力と呼ぶ。

Fig. 1 に示す積層板では、各単層板のひずみ ϵ_{13} , ϵ_{23} は考慮しないため、単層板内の応力とひずみは、 x_1 と x_2 のみの関数であると仮定できる。そこで、試験片座標系 (x_1 , x_2) で、上側と下側の単層板の面内応力は以下のように表現できる。

$$\sigma_{ij}^u = \sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij} \quad (i, j=1, 2) \quad (1a)$$

$$\sigma_{ij}^l = \sigma_{ij} - \Delta\sigma_{ij} \quad (i, j=1, 2) \quad (1b)$$

σ_{ij}^u と σ_{ij}^l はそれぞれ、上側と下側の単層板の応力である。次にそれぞれの単層板に Fig. 1 のような単層板座標系 ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$), ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$) を設定すると、各単層板座標系での、上側、下側単層板内の応力は、次のようになる。

$$\bar{\sigma}_{ij}^u = \bar{T}_{ijkl}^u \sigma_{kl} = \bar{T}_{ijkl}^u (\sigma_{kl} + \Delta\sigma_{kl}) \quad (i, j, k, l=1, 2) \quad (2a)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^l = \bar{T}_{ijkl}^l \sigma_{kl} = \bar{T}_{ijkl}^l (\sigma_{kl} - \Delta\sigma_{kl}) \quad (i, j, k, l=1, 2) \quad (2b)$$

ここで $\bar{T}_{ijkl}^u$ と $\bar{T}_{ijkl}^l$ は、試験片座標系 (x_1 , x_2) からそれぞれの単層板座標系 ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$), ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$) への 4 階の変換テンソルであって、次のように与えられる。

$$\bar{T}_{ijkl}^u = \beta_{ik}(\bar{\theta}) \beta_{jl}(\bar{\theta}) \quad (i, j, k, l=1, 2) \quad (3a)$$

$$\bar{T}_{ijkl}^l = \beta_{ik}(\bar{\theta}) \beta_{jl}(\bar{\theta}) \quad (i, j, k, l=1, 2) \quad (3b)$$

$$[\beta_{ij}(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (3c)$$

ここで θ は繊維と x_1 軸のなす角度である。

それぞれの単層板座標系 ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$), ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$) での各単層板の応力-ひずみ関係は、次のようになる。

$$\bar{\epsilon}_{ij}^u = S_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl}^u \quad (i, j, k, l=1, 2) \quad (4a)$$

$$\bar{\epsilon}_{ij}^l = S_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl}^l \quad (i, j, k, l=1, 2) \quad (4b)$$

ここで S_{ijkl} は、それぞれの単層板座標系 ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$), ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$) でのコンプライアンステンソルである。

試験片座標系 (x_1 , x_2) での各単層板のひずみは

$$\epsilon_{ij}^u = T_{ijkl}^u \bar{\epsilon}_{kl}^u, \quad \epsilon_{ij}^l = T_{ijkl}^l \bar{\epsilon}_{kl}^l \quad (5)$$

となる。ここで、 T_{ijkl}^u , T_{ijkl}^l は、単層板座標系 ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$), ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$) から試験片座標系 (x_1 , x_2) への変換テンソルであって、次式によって与えられる。

$$[T_{ijkl}^u] = [\bar{T}_{ijkl}^u]^{-1}, \quad [T_{ijkl}^l] = [\bar{T}_{ijkl}^l]^{-1} \quad (6)$$

式 (1)~(5) によれば、単層板座標系 ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$), ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$) における上側、下側単層板内の応力は、次式によって与えられる。

$$\Delta\epsilon_{mn} = \frac{1}{2}(\epsilon_{mn}^u - \epsilon_{mn}^l) = \frac{1}{2} T_{mnkl}^u S_{klpq} \bar{T}_{pqrs}^u (\sigma_{rs} + \Delta\sigma_{rs})$$

$$- \frac{1}{2} T_{mnkl}^l S_{klpq} \bar{T}_{pqrs}^l (\sigma_{rs} - \Delta\sigma_{rs}) \quad (7)$$

ここで、 $2\Delta\epsilon_{mn}$ は、等価中間層の面外せん断変形による上側と下側の単層板のひずみの差である。式 (7) はまた

$$(T_{mnkl}^u S_{klpq} \bar{T}_{pqrs}^u + T_{mnkl}^l S_{klpq} \bar{T}_{pqrs}^l) \Delta\sigma_{rs} - 2\Delta\epsilon_{mn} = - (T_{mnkl}^u S_{klpq} \bar{T}_{pqrs}^u - T_{mnkl}^l S_{klpq} \bar{T}_{pqrs}^l) \sigma_{rs} \quad (8)$$

すなわち

$$B_{mnkl} \Delta\sigma_{kl} - 2\Delta\epsilon_{mn} = -A_{mnkl} \sigma_{kl} \quad (9)$$

のように書ける。ここに、 A_{mnrs} と B_{mnrs} は次式で与えられる。

$$A_{mnrs} = T_{mnkl}^u S_{klpq} \bar{T}_{pqrs}^u - T_{mnkl}^l S_{klpq} \bar{T}_{pqrs}^l \quad (10a)$$

$$B_{mnrs} = T_{mnkl}^u S_{klpq} \bar{T}_{pqrs}^u + T_{mnkl}^l S_{klpq} \bar{T}_{pqrs}^l \quad (10b)$$

$$(m, n, k, l, p, q, r, s=1, 2, 3)$$

2・2 各層の変位の不連続と付加応力の関係

斜交積層板中間層に対する線形せん断すべり理論⁸⁾によれば、等価中間層の上側と下側表面の間の x_1 , x_2 方向の面内変位の差 Δu , Δv は

$$\Delta u(x_1, x_2, x_3) = \frac{2\tau_{13}(x_1, x_2)}{G'} \delta \quad (11a)$$

$$\Delta v(x_1, x_2, x_3) = \frac{2\tau_{23}(x_1, x_2)}{G'} \delta \quad (11b)$$

で与えられる。ここに、 δ は等価中間層の厚さで、 G' は等価中間層のせん断剛性率である。新しい物理量 η を

$$\eta = \frac{2\delta}{G'} \quad (12)$$

と定義すると、式 (11) は次のように書ける。

$$\Delta u(x_1, x_2, x_3) = \eta \tau_{13}(x_1, x_2) \quad (13a)$$

$$\Delta v(x_1, x_2, x_3) = \eta \tau_{23}(x_1, x_2) \quad (13b)$$

Fig. 1 に示したような 2 層積層板では、各層の面内応力とひずみは、 x_1 と x_2 だけの関数と仮定しており、したがって各層の面内変位もまた x_1 と x_2 だけの関数とすることができる。変位の連続性のため、上側と下側の単層板の面内変位は、等価中間層の上側表面および下側表

面の変位と等しくなければならない. 上側の単層板で, x_1 方向の変位は,

$$u^u(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) + \frac{\Delta u(x_1, x_2)}{2} \quad (14a)$$

となり, 下側の単層板の x_1 方向の変位は,

$$u^l(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) - \frac{\Delta u(x_1, x_2)}{2} \quad (14b)$$

となる. ここで $\Delta u(x_1, x_2)$ は, x_1 方向の上側と下側単層板 (あるいは等価中間層の上側表面と下側表面) の変位の差であり, u は u^u と u^l の平均値である. このとき式 (13)~(14) より,

$$u^u(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) + \frac{\eta \tau_{13}(x_1, x_2)}{2} \quad (15a)$$

$$u^l(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) - \frac{\eta \tau_{13}(x_1, x_2)}{2} \quad (15b)$$

同様に, x_2 方向の上側と下側単層板の変位は,

$$\nu^u(x_1, x_2) = \nu(x_1, x_2) + \frac{\eta \tau_{23}(x_1, x_2)}{2} \quad (16a)$$

$$\nu^l(x_1, x_2) = \nu(x_1, x_2) - \frac{\eta \tau_{23}(x_1, x_2)}{2} \quad (16b)$$

となる. ここで, ν は, ν^u と ν^l の平均値である.

式 (15)~(16) の $u^u, u^l, u, \nu^u, \nu^l, \nu$ は単層板の面内変位であり, 一方 $\eta, \tau_{13}, \tau_{23}$ は, 2つの単層板の間の等価中間層の特性と応力である. 式 (15)~(16) により, 各単層板のひずみは

$$\varepsilon_{11}^u = \frac{\partial u^u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} \quad (17a)$$

$$\varepsilon_{11}^l = \frac{\partial u^l}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} \quad (17b)$$

$$\varepsilon_{22}^u = \frac{\partial \nu^u}{\partial x_2} = \frac{\partial \nu}{\partial x_2} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} \quad (17c)$$

$$\varepsilon_{22}^l = \frac{\partial \nu^l}{\partial x_2} = \frac{\partial \nu}{\partial x_2} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} \quad (17d)$$

$$2\varepsilon_{12}^u = \frac{\partial u^u}{\partial x_2} + \frac{\partial \nu^u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial \nu}{\partial x_1} + \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_1} \right) \quad (17e)$$

$$2\varepsilon_{12}^l = \frac{\partial u^l}{\partial x_2} + \frac{\partial \nu^l}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial \nu}{\partial x_1} - \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_1} \right) \quad (17f)$$

のように与えられ, したがって次式を得る.

$$2\Delta\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^u - \varepsilon_{11}^l = \eta \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} \quad (18a)$$

$$2\Delta\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^u - \varepsilon_{22}^l = \eta \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} \quad (18b)$$

$$2\Delta\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^u - \varepsilon_{12}^l = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_2} \right) \quad (18c)$$

すなわち

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\eta}{2} \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} \\ \frac{\eta}{2} \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} \\ \frac{\eta}{4} \left(\frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_2} \right) \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Fig. 1 の2層積層板の上側単層板より微小平行六面体

Fig. 2. Lamina element taken from the upper lamina.

A-B-C-D (Fig. 2) を切り出す. このとき, Fig. 2 の積層板要素 A-B-C-D でのつり合いから, 以下の関係式を得る.

$$\left(\frac{\partial \Delta\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta\tau_{12}}{\partial x_2} \right) t - \tau_{13} = 0 \quad (20a)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Delta\tau_{12}}{\partial x_1} \right) t - \tau_{23} = 0 \quad (20b)$$

したがって,

$$\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial^2 \Delta\sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Delta\tau_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) t \quad (21a)$$

$$\frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial^2 \Delta\sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Delta\tau_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) t \quad (21b)$$

$$\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial^2 \Delta\sigma_{11}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Delta\sigma_{22}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Delta\tau_{12}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Delta\tau_{12}}{\partial x_2^2} \right) t \quad (21c)$$

式 (21) を式 (19) に代入して, 変形すると

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial^2 \Delta\sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Delta\tau_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) t \\ \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial^2 \Delta\sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Delta\tau_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) t \\ \frac{\eta}{4} \left(\frac{\partial^2 \Delta\sigma_{11}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Delta\sigma_{22}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Delta\tau_{12}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Delta\tau_{12}}{\partial x_2^2} \right) t \end{Bmatrix} \quad (22)$$

を得る. この式は, 隣接する2つの単層板のひずみの不連続性と各単層板の付加応力を関係付けている.

式 (22) を式 (9) に代入すると, 修正付加応力 $\Delta\sigma_{ij}$ ($i, j = 1, 2$) は次式のように得られる.

$$(B_{1111}\Delta\sigma_{11} + B_{1122}\Delta\sigma_{22} + B_{1112}\Delta\tau_{12}) - \eta \left(\frac{\partial^2 \Delta\sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Delta\tau_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) t = -(A_{1111}\sigma_{11} + A_{1122}\sigma_{22} + A_{1112}\tau_{12}) \quad (23a)$$

$$(B_{2211}\Delta\sigma_{11} + B_{2222}\Delta\sigma_{22} + B_{2212}\Delta\tau_{12}) - \eta \left(\frac{\partial^2 \Delta\sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Delta\tau_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) t = -(A_{2211}\sigma_{11} + A_{2222}\sigma_{22} + A_{2212}\tau_{12}) \quad (23b)$$

$$(B_{1211}\Delta\sigma_{11} + B_{1222}\Delta\sigma_{22} + B_{1212}\Delta\tau_{12}) - \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial^2 \Delta\sigma_{11}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Delta\sigma_{22}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Delta\tau_{12}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Delta\tau_{12}}{\partial x_2^2} \right) t = -(A_{1211}\sigma_{11} + A_{1222}\sigma_{22} + A_{1212}\tau_{12}) \quad (23c)$$

ここで, A_{ijkl}, B_{ijkl} は式 (10) で与えられる. 式 (18)~(23) は3つの未知量 $\Delta\sigma_{11}, \Delta\sigma_{22}, \Delta\tau_{12}$ に対して, 3つの式を与

える。これらを解いて、式(1)~(5)の結果とあわせると、各単層板のすべての応力とひずみを得る。

2・3 N 層の積層板への適用

つづいて、以上で導いた2層斜交積層板の理論を一般の N 層対称積層板に拡張する。Fig. 3は、 x_1 - x_2 平面に配置された N 層の単層板からなる一般的な積層板を図示する。隣接する単層板のそれぞれの層間に、等価中間層を考える。

各単層板の応力は、

$$\sigma_{mn}^{(i)} = (\sigma_{EX/mn}^{(i)} + \Delta\sigma_{mn}^{(i)}) \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (24)$$

で与えられる。ここで $(\sigma_{EX/mn}^{(i)})$ は、単層板が他の単層板と接着されていないときの、 i 番目の単層板における面内応力テンソルである。また、 $\Delta\sigma_{mn}^{(i)}$ は隣接層の拘束による付加応力である。

それぞれの隣接する単層板間の繊維角度が異なる場合や、単層板の片側あるいは両側から拘束されていることがあるため、応力 $(\sigma_{EX/mn}^{(i)})$ と付加応力 $\Delta\sigma_{mn}^{(i)}$ は単層板によって異なる。

単層板の単層板座標系 $(\bar{x}_1^{(i)}, \bar{x}_2^{(i)})$ においては、式(2)、(4)、(5)から

$$\bar{\sigma}_{mn}^{(i)} = (T_{\sigma/mnkl}^{(i)}) \sigma_{kl}^{(i)} \quad (25a)$$

$$\bar{\varepsilon}_{mn}^{(i)} = \bar{S}_{mnkl}^{(i)} (T_{\sigma/mnkl}^{(i)}) \sigma_{pq}^{(i)} = \bar{S}_{mnkl}^{(i)} (T_{\sigma/mnkl}^{(i)}) ((\sigma_{EX/pq}^{(i)} + \Delta\sigma_{pq}^{(i)})) \quad (25b)$$

を得る。ここで $\bar{\sigma}_{mn}^{(i)}$ 、 $\bar{\varepsilon}_{mn}^{(i)}$ 、 $\bar{S}_{mnkl}^{(i)}$ はそれぞれ、 i 番目の単層板の単層板座標系 $(\bar{x}_1^{(i)}, \bar{x}_2^{(i)})$ における応力、ひずみ、コンプライアンステンソルである。 $(T_{\sigma/mnkl}^{(i)})$ は式(3)と同じ4階のテンソルである。

ひずみ $\bar{\varepsilon}_{mn}^{(i)}$ を試験片座標系 (x_1, x_2) に変換すると、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mn}^{(i)} &= (T_{\varepsilon/mnkl}^{(i)}) \bar{\varepsilon}_{kl}^{(i)} = (T_{\varepsilon/mnkl}^{(i)}) (\bar{S}_{klpq}^{(i)}) (T_{\sigma/pqrs}^{(i)}) (\sigma_{rs}^{(i)} + \Delta\sigma_{rs}^{(i)}) \\ &= (T_{\varepsilon/mnkl}^{(i)}) (\bar{S}_{klpq}^{(i)}) (T_{\sigma/pqrs}^{(i)}) ((\sigma_{EX/rs}^{(i)} + \Delta\sigma_{rs}^{(i)})) \end{aligned} \quad (26)$$

となる。ここで、 $(T_{\varepsilon/mnkl}^{(i)})$ は次式で与えられる。

$$(T_{\varepsilon/mnkl}^{(i)}) = [(T_{\sigma}^{(i)})^{-1}]_{mnkl} \quad (27)$$

Fig. 3. General laminate model.

このとき、すべての単層板の平均ひずみとしての積層板のひずみは、以下のように表現できる。

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_{mn}^{(i)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (T_{\varepsilon/mnkl}^{(i)}) (\bar{S}_{klpq}^{(i)}) (T_{\sigma/pqrs}^{(i)}) ((\sigma_{EX/rs}^{(i)} + \Delta\sigma_{rs}^{(i)})) \quad (28)$$

等価中間層の面外変形のため、中間層両側の単層板の面外変形は、もはや同一ではない。 i 番目と $i+1$ 番目の単層板間のひずみの差は、

$$2\Delta\varepsilon_{mn}^{(i)} = \varepsilon_{mn}^{(i)} - \varepsilon_{mn}^{(i+1)} \quad (i=1, 2, \dots, N-1) \quad (29)$$

となる。式(26)を用いれば

$$\begin{aligned} 2\Delta\varepsilon_{mn}^{(i)} &= (T_{\varepsilon/mnkl}^{(i)}) (\bar{S}_{klpq}^{(i)}) (T_{\sigma/pqrs}^{(i)}) ((\sigma_{EX/rs}^{(i)} + \Delta\sigma_{rs}^{(i)})) \\ &\quad - (T_{\varepsilon/mnkl}^{(i+1)}) (\bar{S}_{klpq}^{(i+1)}) (T_{\sigma/pqrs}^{(i+1)}) ((\sigma_{EX/rs}^{(i+1)} + \Delta\sigma_{rs}^{(i+1)})) \\ &\quad (i=1, 2, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (30)$$

以下の誘導では、すべての $\Delta\varepsilon_{mn}^{(i)}$ 、 $\tau_{13}^{(i)}$ 、 $\tau_{23}^{(i)}$ は、1から $(N-1)$ 番目の中間層で定義される変数で、他の変数は単層板で定義されるものとする。このとき、式(19)は

$$\Delta\varepsilon_{mn}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{11}^{(i)} \\ \Delta\varepsilon_{22}^{(i)} \\ \Delta\varepsilon_{12}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\eta^{(i)}}{2} \frac{\partial \tau_{13}^{(i)}}{\partial x_1} \\ \frac{\eta^{(i)}}{2} \frac{\partial \tau_{23}^{(i)}}{\partial x_2} \\ \frac{\eta^{(i)}}{4} \left(\frac{\partial \tau_{13}^{(i)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}^{(i)}}{\partial x_1} \right) \end{Bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, N-1) \quad (31)$$

となる。ここで、 $\eta^{(i)}$ は、 i 番目の中間層に対して式(12)で定義された量である。

Fig. 3の積層板において、1番目と N 番目の単層板(Fig. 4)を除く各単層板には、両側の層間応力による付加応力が作用する。Fig. 4において、応力 τ'_{13} 、 τ'_{23} は一つの単層板とそのすぐ上の中間層との相互作用応力であり、また応力 τ_{13} 、 τ_{23} はその単層板とそれに接する下の中間層との相互作用応力である。

各単層板における微小部分での力のつり合いから、以下の式を得る。

$$\left(\frac{\partial \Delta\sigma_{11}^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta\tau_{12}^{(1)}}{\partial x_2} \right) t^{(1)} = \tau'_{13} - \tau_{13} \quad (32a)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta\sigma_{11}^{(2)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta\tau_{12}^{(2)}}{\partial x_2} \right) t^{(2)} = \tau'_{13} - \tau_{13} \quad (32b)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta\sigma_{11}^{(i)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta\tau_{12}^{(i)}}{\partial x_2} \right) t^{(i)} = \tau'_{13} - \tau_{13} \quad (32c)$$

Fig. 4. Element of i -th lamina constrained by neighboring laminae on both sides.

$$\left(\frac{\partial \Delta \sigma_{11}^{(N-1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta \tau_{12}^{(N-1)}}{\partial x_2} \right) t^{(N-1)} = \tau_{13}^{(N-1)} - \tau_{13}^{(N-2)} \quad (32d)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta \sigma_{11}^{(N)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta \tau_{12}^{(N)}}{\partial x_2} \right) t^{(N)} = -\tau_{13}^{(N-1)} \quad (32e)$$

ここで, $\tau_{ij}^{(i-1)}$ は Fig. 4 の (τ_{ij}) に相当する.

式 (32) を式 (31) に代入すると, 次式となる.

$$\Delta \varepsilon_{mn}^{(1)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\eta^{(1)}}{2} \left(\frac{\partial^2 \Delta \sigma_{11}^{(1)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Delta \tau_{12}^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) t^{(1)} \\ \frac{\eta^{(1)}}{2} \left(\frac{\partial^2 \Delta \sigma_{22}^{(1)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Delta \tau_{12}^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) t^{(1)} \\ \frac{\eta^{(1)}}{4} \left(\frac{\partial^2 \Delta \sigma_{11}^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Delta \sigma_{22}^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Delta \tau_{12}^{(1)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Delta \tau_{12}^{(1)}}{\partial x_2^2} \right) t^{(1)} \end{array} \right\} \quad (33a)$$

$$\Delta \varepsilon_{mn}^{(i)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\eta^{(i)}}{2} \left(\frac{\partial^2 \Delta \sigma_{11}^{(i)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Delta \tau_{12}^{(i)}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) t^{(i)} \\ \frac{\eta^{(i)}}{2} \left(\frac{\partial^2 \Delta \sigma_{22}^{(i)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Delta \tau_{12}^{(i)}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) t^{(i)} \\ \frac{\eta^{(i)}}{4} \left(\frac{\partial^2 \Delta \sigma_{11}^{(i)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Delta \sigma_{22}^{(i)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Delta \tau_{12}^{(i)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Delta \tau_{12}^{(i)}}{\partial x_2^2} \right) t^{(i)} \end{array} \right\} + \frac{\eta^{(i)}}{\eta^{(i-1)}} \Delta \varepsilon^{(i-1)} \quad (i=2, 3, \dots, N-1) \quad (33b)$$

$$\Delta \varepsilon_{mn}^{(N-1)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\eta^{(N-1)}}{2} \left(\frac{\partial^2 \Delta \sigma_{11}^{(N-1)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Delta \tau_{12}^{(N-1)}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) t^{(N-1)} \\ \frac{\eta^{(N-1)}}{2} \left(\frac{\partial^2 \Delta \sigma_{22}^{(N-1)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Delta \tau_{12}^{(N-1)}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) t^{(N-1)} \\ \frac{\eta^{(N-1)}}{4} \left(\frac{\partial^2 \Delta \sigma_{11}^{(N-1)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Delta \sigma_{22}^{(N-1)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Delta \tau_{12}^{(N-1)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Delta \tau_{12}^{(N-1)}}{\partial x_2^2} \right) t^{(N-1)} \end{array} \right\} \quad (33c)$$

式 (33) を式 (30) に代入すれば, $3(N-1)$ 個の未知な付加応力に対して, $3(N-1)$ 個の式を得る. 以上の式から, 各単層板のすべての付加応力が求められる. 一般的な場合, これらの微分方程式を解析的に解くことは簡単ではない. この付加応力を近似的に解くために, 差分法を用いることができ, 対称性や境界条件により, 問題をかなり簡単化することができる場合もある.

3 斜交積層円筒への適用

3・1 斜交積層板の付加応力の微分方程式

N 層の単層板から成る斜交積層板において, 各単層板が同じ形状と材料特性を持つとすると, それぞれの単層板座標系に関して

$$\bar{S}_{mnkl}^{(i)} = \bar{S}_{mnkl} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (34a)$$

$$t^{(i)} = t \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (34b)$$

を得る. 更に, 対称積層板を考えると, 各層の応力は積層板座標系に関して

$$(\sigma_{EX})_{mn}^{(i)} = (\sigma_{EX})_{mn} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (35a)$$

$$\eta^{(i)} = \eta \quad (i=1, 2, \dots, N-1) \quad (35b)$$

となる.

付加応力は層間応力により生じるため, 積層板の表面をなす 2 つの単層板を除いて, それぞれの隣接する単層板での付加応力は, 同じ大きさで反対の向きを取る必要

がある. 積層板の 2 つの表面の単層板 ($i=1, i=N$) は, 片側だけが拘束されているため, 2 つの表面における付加応力の大きさは, 同じ繊維配向角を持つ他の単層板の半分となる. そのため, N 層の一般的な斜交対称積層板では, 次の関係が成り立つ.

$$\Delta \sigma_{mn}^{(i)} = (-1)^{i+1} \Delta \sigma_{mn} \quad (i=1, 2, \dots, N-1) \quad (36a)$$

$$\Delta \sigma_{mn}^{(1)} = -\Delta \sigma_{mn}^{(N)} = \frac{1}{2} \Delta \sigma_{mn} \quad (36b)$$

式 (23) は, 付加応力 $\Delta \sigma_{ij}$ ($i, j=1, 2$) を直接求めるために用いられる.

3・2 斜交積層円筒の付加応力

斜交積層円筒 (Fig. 5) に荷重がかかるとき, 各単層板の付加応力 $\Delta \sigma_{ij}$ ($i, j=1, 2$) は, 対称軸 (例えば Fig. 5 の x_1) の方向の座標の関数となる.

式 (23) から,

$$2\eta \frac{d^2 \Delta \sigma_{11}}{dx_1^2} t = A_{1111} \sigma_{11} + A_{1122} \sigma_{22} + A_{1112} \tau_{12} + B_{1111} \Delta \sigma_{11} + B_{1122} \Delta \sigma_{22} + B_{1112} \Delta \tau_{12} \quad (37a)$$

$$0 = A_{2211} \sigma_{11} + A_{2222} \sigma_{22} + A_{2212} \tau_{12} + B_{2211} \Delta \sigma_{11} + B_{2222} \Delta \sigma_{22} + B_{2212} \Delta \tau_{12} \quad (37b)$$

$$\eta \frac{d^2 \Delta \tau_{12}}{dx_1^2} t = A_{1211} \sigma_{11} + A_{1222} \sigma_{22} + A_{1212} \tau_{12} + B_{1211} \Delta \sigma_{11} + B_{1222} \Delta \sigma_{22} + B_{1212} \Delta \tau_{12} \quad (37c)$$

ここに,

$$\begin{aligned} A_{1111} &= A_{2222} = A_{2211} = A_{1122} = A_{1212} \\ &= B_{1112} = B_{1211} = B_{2212} = B_{1222} = 0 \end{aligned} \quad (37d)$$

式 (23) を変形すると,

$$2\eta \frac{d^2 \Delta \sigma_{11}}{dx_1^2} t = A_{1112} \tau_{12} + B_{1111} \Delta \sigma_{11} + B_{1122} \Delta \sigma_{22} \quad (38a)$$

$$0 = A_{2212} \tau_{12} + B_{2211} \Delta \sigma_{11} + B_{2222} \Delta \sigma_{22} \quad (38b)$$

$$\eta \frac{d^2 \Delta \tau_{12}}{dx_1^2} t = A_{1211} \sigma_{11} + A_{1222} \sigma_{22} + B_{1212} \Delta \tau_{12} \quad (38c)$$

となり, これを解くと

$$\Delta \sigma_{11} = C_1 e^{D_1 x_1} + C_2 e^{-D_1 x_1} - \frac{1}{2\eta t D_1^2} \left(A_{1112} - \frac{B_{1122} A_{2212}}{B_{2222}} \right) \tau_{12} \quad (39a)$$

Fig. 5. Tubular laminate specimen.

$$\Delta\sigma_{22} = -\frac{1}{B_{2222}}(B_{2211}\Delta\sigma_{11} + A_{2212}\tau_{12}) \quad (39b)$$

$$\Delta\tau_{12} = C_3 e^{D_2 x_1} + C_4 e^{-D_2 x_1} - \frac{1}{\eta t D_2^2} (A_{1211}\sigma_{11} + A_{1222}\sigma_{22}) \quad (39c)$$

を得る. ここで D_1 , D_2 は

$$D_1 = \sqrt{\frac{1}{2\eta t} \left(B_{1111} - \frac{B_{1122}B_{2211}}{B_{2222}} \right)} \quad (39d)$$

$$D_2 = \sqrt{\frac{B_{1212}}{\eta t}} \quad (39e)$$

境界条件は, 円筒管の両端において, $\Delta\sigma_{11} = \Delta\tau_{12} = 0$ である. また円筒の長さを $2l$ とすると,

$$\Delta\sigma_{11}(-l) = \Delta\sigma_{11}(l) = 0 \quad (40a)$$

$$\Delta\tau_{12}(-l) = \Delta\tau_{12}(l) = 0 \quad (40b)$$

となり, これを用いると, 次式を得る.

$$C_1 = C_2 = \frac{\left(A_{1112} - \frac{B_{1122}A_{2212}}{B_{2222}} \right) \tau_{12}}{2\eta t D_1^2 (e^{-D_1 l} + e^{D_1 l})} \quad (41a)$$

$$C_3 = C_4 = \frac{(A_{1211}\sigma_{11} + A_{1222}\sigma_{22})}{\eta t D_2^2 (e^{-D_2 l} + e^{D_2 l})} \quad (41b)$$

式 (39a)~(39c) は, 斜交積層円筒での外力と付加応力の関係を与え, これらの式と式 (28) 等を用いれば, 斜交積層円筒の平均応力-ひずみ関係が得られる.

次に, 以上で提案した手法を用い, 異なる繊維配向角をもつ CFRP 斜交積層有限長円筒 $[\pm 45^\circ]_4$ の縦弾性係数 E_1 とせん断剛性率 G_{12} を計算する. 積層板は 8 つの一方方向単層板からなり, その単層板の特性は実験結果より,

$$E_1 = 148 \text{ GPa}, E_2 = 7.98 \text{ GPa}, \quad (42)$$

$$G_{12} = 4.79 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.25$$

とする. また, その試験片の形状と寸法を, Fig. 5 に示す. 計算のためには, 式 (12) で定義される材料定数 η を与える必要があるが, この値を厳密に定めることは困難である. このため, 以下の計算では従来の実験結果を参考にして

$$\eta = 5 \times 10^{-4} \text{ mm/MPa} \quad (43)$$

とした.

Fig. 6 は, 複数の円筒試験片に対する円筒の中央部分 (Fig. 5 の A-B 間の平均の値) での E_1 の結果であり, 白丸は MTS クリップゲージによる A-B 間の平均ひずみから計算した値を示す. また, Fig. 7 は試験片両端 C, D 付近の $x_1 = 25 \sim 30 \text{ mm}$ における G_{12} の結果であり, 白丸は, $x_1 = 25 \text{ mm}$ 上に貼付したゲージ長 5 mm のひずみゲージによる測定値を示す. なお, Fig. 6 の E_1 と Fig. 7 の G_{12} の検出位置が異なるのは, 両者を同一箇所測定することが不可能なことによる. また, 実際の実験では, Fig. 5 の C, D の外側にそれぞれ長さ 50 mm のつかみ部を持つ長さ 160 mm の試験片を用いた. 比較として, 古典積層理論の結果と, 実験で測定された弾性係数の値も, 他の η の値に対する計算結果も併せて図中に示している.

Fig. 6 からわかるように, 円筒の中央付近では層間

Fig. 6. Relation between Young's modulus and fiber angle in angle-ply laminates.

Fig. 7. Relation between additional shear modulus and fiber angle in angle-ply laminates.

力は非常に小さいため, この理論と実験から得た円筒の中央部分での平均の縦弾性係数は, 古典積層理論と明確な差はない. しかしながら, 両端近傍の $x_1 > 28 \text{ mm}$ では古典積層理論に比べて 4.4% 以上剛性が低下することがわかる. 一方, Fig. 7 でも, 試験片中央から離れ, 両端に近い $x_1 > 28 \text{ mm}$ の範囲で, 面外変形が積層板の弾性挙動に大きな影響を与えることがわかる.

3・3 中間層の変形特性の付加応力への影響と積層板の面内剛性

式 (12) の定数 η は, 等価中間層のせん断コンプライアンスの役割を果たしている. 斜交積層円筒の形状が一定のとき, 付加応力 $\Delta\sigma_{ij}$ ($i, j=1, 2$) は, 定数 η と外力だけの影響を受ける. 層間はく離のような層間損傷の発生や進展があれば, 中間層のせん断コンプライアンスは増加し, η の値もまた増加する.

Fig. 8 は, 異なる η に対する $\Delta\tau_{12}$ と繊維のなす角度との関係を示している. $\Delta\tau_{12}$ は自由縁付近のものである. $\eta=0$ のとき, 本手法によって得られる付加せん断応力 $\Delta\tau_{12}$ は, 古典積層理論によって得られる結果と同じである. 一方, η が増加すると, $\Delta\tau_{12}$ は減少する. また η が 0.1 mm/MPa を越えるとき, 本手法による付加せん断応力 $\Delta\tau_{12}$ は, 非常に小さくなる. 特に $\eta \rightarrow \infty$ は完全層間はく離に対応しており, このとき $\Delta\tau_{12} \rightarrow 0$ である. Fig. 8 は, $\Delta\tau_{12}$ によって $\Delta\tau_{12}$ が顕著に変化する様子を示している.

Fig. 8. Relation between additional stress and fiber angle in angle-ply laminates.

Fig. 9. Relation between normalized moduli and η in $[\pm 45^\circ]_4$ CFRP laminates.

Fig. 9 は, 異なる η に対する $[\pm 45^\circ]_4$ の剛性 E_1 と G_{12} を示す. η が増加すると, E_1 と G_{12} も増加する. また, G_{12} は E_1 より η の影響を受けやすい.

4 結 言

本論文で展開した修正積層理論では, 完全接着の仮定を用いず, 古典的な積層理論に面外変形を導入した. この理論では, パラメータ η だけが材料定数で, その値は実験によって決められる.

本研究の結論を, 要約すると次のとおりである.

(1) 層間応力による面外変形を, 古典積層理論に導入することによって展開した修正積層理論は, 斜交積層板

の挙動をよく記述する.

(2) 層間応力は中間層の厚さ, 剛性, η の値とともに変化する. その影響は積層板の中心に比べて, 自由端付近ほど大きい.

(3) 修正積層理論は, 層間損傷のない積層板に適用できるだけでなく, 層間損傷のある積層板にも適用できる. η を層間損傷の関数として定義することによって, 本理論は一般的な積層板における 3 次元損傷状態の記述の一つの方法となる.

最後に, 本研究の遂行にあたり, 懇切なご教示・ご討論を賜った同志社大学工学部・藤井 透教授に厚く御礼申し上げます.

参 考 文 献

- 1) N. J. Pagano and R. B. Pipes, International Journal of Mechanical Science, **15**, 679 (1973).
- 2) N. J. Pagano and S. R. Soni, "Interlaminar Response of Composite Materials", edited N. J. Pagano, p. 1 (1989) Elsevier.
- 3) J. W. Joo and C. T. Sun, Journal of Composite Materials, **26**, 1510 (1992).
- 4) Y. Kanagawa, S. Murakami, T. Ishida, A. Ueda and E. Tsushima, JSME International Journal, **36**, 97 (1993).
- 5) A. Toledano and H. Murakami, Journal of Applied Mechanics, **54**, 181 (1987).
- 6) A. Toledano and H. Murakami, Journal of Engineering Mechanics, **114**, 604 (1988).
- 7) L. X. Sun and Z. Y. Shi, Computers & Structures, **43**, 831 (1992).
- 8) X. Lu and D. Liu, AIAA Journal, **30**, 1063 (1992).
- 9) D. S. Liu, L. Xu and X. Q. Lu, International Journal for Numerical Method in Engineering, **37**, 2819 (1994).
- 10) J. M. Whitney, Journal of Applied Mechanics, **37**, 1031 (1970).
- 11) J. N. Reddy, Journal of Applied Mechanics, **51**, 745 (1984).
- 12) 石田孝明, 平成 5 年度学位論文, p. 48 (1994) 名古屋大学.