マトリックスき裂と層間はく離を考慮した FRP 積層板の損傷モデル†

白 秋 実*, 村 上 澄 男**
金 川 靖**, 田 中 行 平*

A Damage Model for FRP Laminates with Matrix Microcracks and Delamination

by

Q. S. Bai*, Sumio MURAKAMI**, Yasushi KANAGAWA**,
and Kohhei TANAKA*

A damage model for fiber-reinforced plastics (FRP) laminates with matrix microcracks and delamination is developed based on continuum damage mechanics (CDM) and modified lamination theory. The anisotropic damage state in each lamina due to matrix microcracks and the delaminations at each interface are described by different damage variables of second rank tensor. The elastic constitutive relations of matrix damaged laminae are derived first by use of the effective stress and the hypothesis of strain equivalence. Then the constitutive relation of each lamina is introduced into the modified lamination theory incorporating the effect of delamination. The resulting model is applied to CFRP angle-ply laminates, and both damage variables are identified by the measured densities of matrix cracks and delaminations, respectively. Comparison between the predictions and the experimental measurements shows the applicability of the present model to describe the influence of matrix cracks and delamination on the mechanical properties of angle-ply CFRP laminates.

Key words: FRP, Composite, Matrix crack, Delamination, Continuum damage mechanics, Lamination theory, Damage variable, Anisotropic damage, Interlaminar shear, Stiffness reduction.

1 緒 言

層間はく離は、マトリックスの微小き裂が十分に発達した後に起こることが、多くの実験結果から明らかになっている。層内損傷と層間損傷のメカニズムは異なっているが、両者はともに積層板の弾性係数と残留強度に大きな影響を与える。^{1)~3)}近年、マトリックスき裂による FRP 積層板の弾性係数と残留強度の低下について、多くの研究がなされているが、^{4)~6)}未だ FRP 積層板の面内挙動に及ぼすマトリックスき裂と層間はく離の両方の影響を考慮に入れた研究は少ない。

例えば、Talreja は、直交積層板を均一な直交異方性材料として取扱い、2 階のテンソルの損傷変数を用いて、層内と層間の損傷を記述した。^{7), 8)}さらに熱力学に基づき、損傷変数によって弾性係数の低下を記述した。しかし、この理論では、実験により決めなければならない材料定数が多く、また、異なる性質をもつ単層板内の全てのマトリックスき裂を平均化する方法の妥当性については、議論の余地が残っている。

一方、Allen らは、層内損傷と層間損傷の両方を考慮に入れた積層板の損傷モデルを提案した。^{9), 10)}このモデルでは、それぞれの損傷の効果を別々の 2 階のテンソルで表現している。この理論では、単層板間の変位の不連続性を仮定し、積層板内の損傷を平均化する手法とこの変位の不連続性の仮定を用いて、積層板の構成式

を導いた。すなわち、まず層内損傷変数を導入して、損傷に依存する単層板の構成式を導き、次いで積層理論に単層板の構成式を組み込むことによって積層板の構成式を導いた。しかし、Allen らの損傷モデルでは、層間の変位の不連続性と、各層の弾性係数の不整合により発生する層間応力との間の関係が特定されていないため、積層板の挙動に及ぼす各層の弾性係数の不整合の影響を記述することができない。

これまで著者らは、層内にマトリックスき裂のある FRP 積層板の損傷モデル¹¹⁾と、層間のせん断変形の影響を考慮に入れた修正積層理論¹²⁾を提案した。本論文では、これらの理論をさらに拡張し、層内のマトリックスき裂と層間はく離の両方を考慮した、連続体損傷力学 (CDM)^{13)~16)}に基づいた積層板の損傷モデルに発展させる。そしてこのモデルから得られた解析結果と CFRP 斜交積層板の実験結果とを比較し、理論の妥当性を検討する。

2 損傷モデルの提案

FRP 積層板の損傷は主にマトリックスき裂と層間はく離に支配されると仮定する。各層におけるマトリックスき裂の影響と各層間におけるはく離の影響は異なるので、積層板全体を 1 つの均一な直交異方性材料として扱うのは現実的ではなく、積層構造を考慮すべきであろう。

後の議論において、マトリックスき裂のある単層板の

† 原稿受理 平成 8 年 10 月 18 日 Received Oct. 18, 1996

* 名古屋大学大学院 〒464-01 名古屋市千種区不老町, Graduate Student, Nagoya Univ., Chikusa-ku, Nagoya, 464-01

** 正 会 員 名古屋大学工学部機械工学科 〒464-01 名古屋市千種区不老町, Dept. of Mech. Eng., Nagoya Univ., Chikusa-ku, Nagoya, 464-01

Fig. 1. Rectangular coordinates of a laminate and a lamina.

構成式を定式化した後に、この単層板の構成式を、修正積層理論¹²⁾に組み込むことにより、積層板の損傷モデルを導びく。

2・1 損傷変数の定義

Fig. 1 に示すように、積層板直交座標系 (x_1, x_2, x_3) をとる。ここで、 x_1 - x_2 平面は積層板平面に一致する。後の議論において、各層に対して Fig. 1 (b) に示すような単層板直交座標系 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ を導入する。

損傷の直交異方性は次のような 2 階のテンソルの損傷変数によって表現する。

$$D = \sum_{k=1}^3 D_k n_k \otimes n_k \quad (1)$$

ここで、 D_k と n_k は損傷テンソル D の k 番目の主値とそれに対応する方向を表している。 D_k の値は、 n_k に垂直な方向における荷重負担面積の減少と解釈できる。

単層板における損傷の影響と層間での損傷の影響は異なるため、これらの損傷モードに対する損傷変数は別々に定義されなければならない。例えば、 i 番目の単層板のマトリックスき裂に対しては $D^{(M)(i)}$ ($i=1, 2, \dots, N$)、 j 番目の中間層の層間はく離に対しては $D^{(D)(j)}$ ($j=1, 2, \dots, N-1$)。ここで、 N は積層板を構成する単層板の数である。また、上付き添字 (i) と下付き添字 (j) はそれぞれ単層板と層間の性質を表すのに用いている。

損傷のない単層板は直交異方性であり、単層板におけるマトリックスき裂は平面応力下では主に繊維方向に平行または垂直に進展するので、単層板の損傷変数の主方向は単層板の 2 つの対称軸に一致すると仮定する。したがって、 i 番目の単層板でのマトリックスき裂に対応する損傷変数は、単層板座標系において次のように表現できる。

$$D^{(M)(i)} = \left(D_1^{(i)} n_1^{(i)} \otimes n_1^{(i)} + D_2^{(i)} n_2^{(i)} \otimes n_2^{(i)} \right) \quad (2)$$

$$(i=1, 2, \dots, N)$$

ここで、 $D_1^{(i)}$ と $D_2^{(i)}$ は単層板平面 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ における損

傷変数の主値である。下付きの $\bar{1}, \bar{2}$ は単層板平面 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ における単層板の主方向を表している。マトリックスき裂の効果は、単層板の有効弾性係数を導くときに考慮する。

一方、はく離が生じた層間において、全ての層間のはく離は層間で生じ、したがって界面に垂直な方向の損傷変数のみが非零となる。すなわち、

$$D_{(j)}^{(D)} = (D_3)_{(j)} n_3 \otimes n_3 \quad (j=1, 2, \dots, N-1) \quad (3)$$

ここでは積層板の面内挙動のみ考えているため、以降の定式化においては面内挙動に対する損傷の影響のみを考える。

2・2 マトリックスき裂のある単層板の損傷モデル

各単層板における面内挙動を連続体損傷力学^{13)~16)}に基づきモデル化する。

まず、損傷を受けていない i 番目の単層板の弾性構成式は次のように表現できると仮定する。

$$\epsilon^{(i)} = C^{(i)-1} \sigma^{(i)} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (4)$$

ここで、 $C^{(i)}$ は損傷を受けていない単層板の 4 階の剛性テンソルである。

連続体損傷力学の常法により、 i 番目の単層板のマトリックスき裂の異方的効果は、式 (2) の損傷変数を用いて次のような有効応力¹⁶⁾の形で表現できる。

$$\tilde{\sigma}^{(i)} = \frac{1}{2} \left[\left(I - D^{(M)(i)} \right)^{-1} \sigma^{(i)} + \sigma^{(i)} \left(I - D^{(M)(i)} \right)^{-1} \right] \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

または、

$$\tilde{\sigma}^{(i)} = M^{(i)} \sigma^{(i)} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (6)$$

$$M^{(i)}_{\bar{r}\bar{s}\bar{k}\bar{l}} = \frac{1}{2} \left(\Phi_{\bar{r}\bar{k}}^{(i)} \delta_{\bar{l}\bar{s}} + \delta_{\bar{r}\bar{k}} \Phi_{\bar{l}\bar{s}}^{(i)} \right)$$

$$\Phi^{(i)} = \left(I - D^{(M)(i)} \right)^{-1} \quad (7)$$

ここで、 $\sigma^{(i)}$ と $\tilde{\sigma}^{(i)}$ はそれぞれ単層板座標系における i 番目の単層板の外部応力と有効応力である。また、 $M^{(i)}$ は損傷効果テンソルである。

連続体損傷力学におけるひずみ等価性の仮説を用いると、マトリックスき裂により損傷を受けた i 番目の単層板の弾性構成式は次式となる。

$$\epsilon^{(i)} = C^{(i)-1} \tilde{\sigma}^{(i)} = C^{(i)-1} M^{(i)} \sigma^{(i)} = \tilde{C}^{(i)-1} \sigma^{(i)} \quad (8)$$

すなわち、

$$\tilde{C}^{(i)-1} = C^{(i)-1} M^{(i)} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (9)$$

ここで、 $\tilde{C}^{(i)-1}$ は i 番目の単層板の有効弾性コンプライアンスである。

式 (9) の $\tilde{C}^{(i)-1}$ は対称テンソルではないため、ひずみエネルギー関数を用いることができない。テンソル $\tilde{C}^{(i)-1}$ を次のように対称化する。

$$\left(\tilde{C}^{(i)-1} \right)_{pq} = \frac{1}{2} \left[\left(\tilde{C}^{(i)-1} \right)_{pq} + \left(\tilde{C}^{(i)-1} \right)_{qp} \right] \quad (10)$$

したがって、式 (9) は次式のように書き改められる。

$$\tilde{C}^{(i)-1} = \frac{1}{2} \left(C^{(i)-1} M^{(i)} + M^{(i)} C^{(i)-1} \right) \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (11)$$

i 番目の損傷を受けてない単層板のコンプライアンス

は次式となる.

$$[\tilde{C}^{0(i)-1}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1^0} & -\nu \frac{0}{12} & 0 \\ -\nu \frac{0}{12} & \frac{1}{E_2^0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}^0} \end{bmatrix} \quad (12)$$

したがって、単層板座標系における式 (11) の有効弾性コンプライアンス $\tilde{C}^{(i)-1}$ は下の式 (13) のように表現できる. 式 (13) の有効弾性コンプライアンスを用いることにより、マトリックスき裂のある単層板を等価な均一弾性体として、取り扱うことが可能となる.

2・3 層間はく離の損傷モデル

層間はく離は層間の結合を弱め、層間のせん断剛性の低下をもたらす. 積層板の力学的挙動に及ぼす層間はく離の影響を調べるため、Fig 2 に示す層間に厚さ δ の中間層をもつ積層板のモデルを考える. 一般に積層板は薄板として用いられることが多く、積層板の面内の力学挙動が非常に重要である. したがって、本論文ではそれぞれの損傷が積層板の面内の力学挙動に及ぼす影響のみを取り上げる.

これらの中間層の層間はく離の状態はそれぞれ異なり、式 (3) の損傷変数を用いて次式のように表わせる.

$$[\tilde{C}^{(i)-1}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-D_1)E_1^0} & \frac{\nu \frac{0}{12}}{(1-D_1)E_1^0} + \frac{\nu \frac{0}{21}}{(1-D_2)E_2^0} & 0 \\ \frac{\nu \frac{0}{12}}{(1-D_1)E_1^0} + \frac{\nu \frac{0}{21}}{(1-D_2)E_2^0} & \frac{1}{(1-D_2)E_2^0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}^0} \left(\frac{1}{1-D_1} + \frac{1}{1-D_2} \right) \end{bmatrix}^{(i)} \quad (13)$$

$$D_{(j)}^{(D)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (D_3)_{(j)} \end{bmatrix} \quad (j=1,2,\dots,N-1) \quad (14)$$

ここで、 $(D_3)_{(j)}$ は j 番目の層間はく離の総面積 $A_{D(j)}$ と中間層の面積 A_1 との比と定義することができる. すなわち、

$$(D_3)_{(j)} = \frac{A_{D(j)}}{A_1} \quad (15)$$

層間はく離が起ると、層間の接着面積が減少し、中間層のせん断弾性係数が低下する.

2・2 節における有効応力に基づいた議論と同様に、 j 番目の中間層の有効せん断弾性係数 $\tilde{G}_{(j)}$ は、損傷変数 $(D_3)_{(j)}$ の線形関数で与えられ、次式となる.

$$\tilde{G}_{(j)} = [1 - (D_3)_{(j)}] G_{(j)}^0 \quad (16)$$

Fig. 2. A laminate model with interlayers.

ここで、 $G_{(j)}^0$ は j 番目の中間層の損傷を受けてない初期のせん断弾性係数である.

この有効せん断係数 $\tilde{G}_{(j)}$ を積層理論に組み込むことにより、積層板の弾性挙動に及ぼす層間はく離の影響を容易に記述できる.

2・4 積層板損傷モデル

マトリックスき裂と層間はく離を持つ積層板の損傷モデルを発展させるため、式 (13) に示した単層板の有効コンプライアンスを修正積層理論¹²⁾に組み込む. 層間のせん断弾性係数を式 (16) の有効せん断係数で置き換えることにより、層間はく離の効果を理論の枠組みに導入する.

Fig. 2 に示される積層板において、 i 番目の単層板に作用する面内応力 $\sigma^{(i)}$ は、外部応力 $\sigma_{Ex}^{(i)}$ と隣接する単層板による拘束応力 $\Delta \sigma^{(i)}$ との和として表される.

$$\sigma^{(i)} = \sigma_{Ex}^{(i)} + \Delta \sigma^{(i)} \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (17)$$

また、積層板座標系 (x_1, x_2) では

$$\sigma_{pq}^{(i)} = \sigma_{Ex pq}^{(i)} + \Delta \sigma_{pq}^{(i)} \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (p,q=1,2) \quad (18)$$

ここで、応力 $\Delta \sigma^{(i)}$ および $\Delta \sigma_{pq}^{(i)}$ は、層間応力によって生ずる付加応力と呼ばれ、隣接する単層板の間の剛性の不整合の度合いを表している.

この負荷の下で、積層板座標系 (x_1, x_2) での i 番目の単層板のひずみは、次式で与えられる.¹²⁾

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mn}^{(i)} &= (T_\varepsilon)_{mnkl}^{(i)} \varepsilon_{kl}^{(i)} = (T_\varepsilon)_{mnkl}^{(i)} (\tilde{C}^{(i)-1})_{klpq} \sigma_{pq}^{(i)} \\ &= (T_\varepsilon)_{mnkl}^{(i)} (\tilde{C}^{(i)-1})_{klpq} (T_\sigma)_{pqrs}^{(i)} \sigma_{rs}^{(i)} \\ &= (T_\varepsilon)_{mnkl}^{(i)} (\tilde{C}^{(i)-1})_{klpq} (T_\sigma)_{pqrs}^{(i)} ((\sigma_{Ex})_{rs} + \Delta \sigma_{rs}^{(i)}) \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、バー付きの添字は、テンソルが単層板座標系 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ で定義されていることを意味している. $(T_\varepsilon)_{mnkl}^{(i)}$

は座標変換テンソルで, i 番目の単層板の面内ひずみを単層板座標系 $(\bar{x}_1^{(i)}, \bar{x}_2^{(i)})$ から積層板座標系 (x_1, x_2) に変換する. それに対し, テンソル $(T_\sigma)_{\bar{p}\bar{q}rs}^{(i)}$ は, i 番目の単層板の面内応力を積層板座標系 (x_1, x_2) から単層板座標系 $(\bar{x}_1^{(i)}, \bar{x}_2^{(i)})$ に変換する.

層間の変形により, 隣接した二つの単層板の面内変形はもはや同じではない. 修正積層理論によると, i 番目と $(i+1)$ 番目の単層板の間のひずみの相違は, 付加応力の関数として, 次式で表される.

$$\{\Delta \varepsilon_{mn(i)}\} = \frac{1}{2} \{\varepsilon_{mn}^{(i)} - \varepsilon_{mn}^{(i+1)}\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{(i)} - \varepsilon_{11}^{(i+1)} \\ \varepsilon_{22}^{(i)} - \varepsilon_{22}^{(i+1)} \\ \varepsilon_{12}^{(i)} - \varepsilon_{12}^{(i+1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\eta_{(i)}}{2} \left(\frac{\partial^2 \Delta \sigma_{11}^{(i)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Delta \tau_{12}^{(i)}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) t^{(i)} \\ \frac{\eta_{(i)}}{2} \left(\frac{\partial^2 \Delta \sigma_{22}^{(i)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Delta \tau_{12}^{(i)}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) t^{(i)} \\ \frac{\eta_{(i)}}{4} \left(\frac{\partial^2 \Delta \sigma_{11}^{(i)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Delta \sigma_{22}^{(i)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Delta \tau_{12}^{(i)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Delta \tau_{12}^{(i)}}{\partial x_2^2} \right) t^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$+ \left\{ \frac{\eta_{(i)}}{\eta_{(i-1)}} \Delta \varepsilon_{mn(i-1)} \right\} \quad (20)$$

式 (20) に式 (19) を代入することにより, 付加応力の微分方程式は次式となる.

$$\{(T_\varepsilon)_{mnkl}^{(i)} (\tilde{C}_{(i)}^{-1})_{\bar{k}\bar{l}\bar{p}\bar{q}} (T_\sigma)_{\bar{p}\bar{q}rs}^{(i)} ((\sigma_{Ex})_{rs} + \Delta \sigma_{rs}^{(i)})$$

$$- (T_\varepsilon)_{mnkl}^{(i+1)} (\tilde{C}_{(i+1)}^{-1})_{\bar{k}\bar{l}\bar{p}\bar{q}} (T_\sigma)_{\bar{p}\bar{q}rs}^{(i+1)} ((\sigma_{Ex})_{rs} + \Delta \sigma_{rs}^{(i+1)})\}$$

$$= \begin{bmatrix} \eta_{(i)} \left(\frac{\partial^2 \Delta \sigma_{11}^{(i)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Delta \tau_{12}^{(i)}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) t^{(i)} \\ \eta_{(i)} \left(\frac{\partial^2 \Delta \sigma_{22}^{(i)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Delta \tau_{12}^{(i)}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) t^{(i)} \\ \frac{\eta_{(i)}}{2} \left(\frac{\partial^2 \Delta \sigma_{11}^{(i)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Delta \sigma_{22}^{(i)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \Delta \tau_{12}^{(i)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Delta \tau_{12}^{(i)}}{\partial x_2^2} \right) t^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$+ \left\{ \frac{2\eta_{(i)}}{\eta_{(i-1)}} \Delta \varepsilon_{mn(i-1)} \right\} \quad (21)$$

ここで, $\eta_{(j)}$ は次式で定義されるパラメータである.

$$\eta_{(j)} = \frac{\delta_{(j)}}{G_{(j)}} \quad (j=1, 2, \dots, N-1) \quad (22)$$

式 (22) 中の $\delta_{(j)}$ および $G_{(j)}$ は, それぞれ j 番目の中間層の厚さとせん断弾性係数である. j 番目の中間層のせん断弾性係数 $G_{(j)}$ は, 直接層間にはく離の影響を受けるので, $\eta_{(j)}$ は j 番目の層間のはく離の状態に依存する. 式 (22) のせん断弾性係数 $G_{(j)}$ を式 (16) の有効せん断係数で置き換えると, 式 (14) の関数 $D_{(j)}^{(0)}$ と同様にパラメータ $\eta_{(j)}$ は次式のように表される.

$$\eta_{(j)} = \left(\frac{1}{1 - (D_3)_{(j)}} \right) \frac{\delta_{(j)}}{G_{(j)}^0} = \eta_{(j)}^0 \left(\frac{1}{1 - (D_3)_{(j)}} \right)$$

$$(j=1, 2, \dots, N-1) \quad (23)$$

ここで, $G_{(j)}^0$ および $\eta_{(j)}^0$ は, 層間にはく離が生じる前の, j 番目の層間のせん断弾性係数および $\eta_{(j)}$ を表す.

疲労による損傷の実験的観察によると, 層間にはく離は

積層板の各界面においてほぼ均一に分布している.²⁾これにより, 損傷変数 $(D_3)_{(j)}$ ($j=1, 2, \dots, N-1$) は, j 番目の層間の面内で一定と仮定できる.

式 (21) と適当な境界条件により付加応力が決定でき, 最終的には式 (19) から各単層板の応力-ひずみ関係が得られる.

すなわち, 積層板の構成関係はそれぞれの単層板の平均値として与えられ, 次式によって表される.

$$\{\varepsilon_{mn}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{\varepsilon_{mn}^{(i)}\}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ (T_\varepsilon)_{mnkl}^{(i)} (\tilde{C}_{(i)}^{-1})_{\bar{k}\bar{l}\bar{p}\bar{q}} (T_\sigma)_{\bar{p}\bar{q}rs}^{(i)} ((\sigma_{Ex})_{rs} + \Delta \sigma_{rs}^{(i)}) \right\}$$

$$(m, n, k, l, p, q, r, s = 1, 2) \quad (24)$$

この定式化においては, 圧縮応力の下でのき裂の閉口の効果は考慮されていない. この効果を組み込むためには, ここで用いた有効応力の拡張が必要となる.^{14), 16)}

3 理論の適用性の検討

3.1 斜交積層円管に対する損傷モデル

前節で拡張した損傷モデルを, Fig. 3 に示す斜交積層円管試験片における剛性低下の予測に適用する. 積層板は, 厚さ $t=0.125\text{mm}$ の一方向単層板 8 層からなり, この単層板の面内の単層板座標系 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ に関する力学的初期特性は, 次のようである.

$$E_1^0 = 147600\text{MPa}, E_2^0 = 7980\text{MPa}, G_{12}^0 = 4790\text{MPa}$$

$$\nu_{12}^0 = 0.25, G_{(j)}^0 = 1000\text{MPa} \quad (j=1, 2, \dots, N-1) \quad (25)$$

斜交積層材に対しては, 隣接する 2 つの単層板の繊維配向角は積層板の主軸に関して対称であるため, 層間応力は, その符号を除いて, 隣接する層間の層間応力と等しくなると仮定する. この層間応力により, 隣接する単層板の各組における付加応力の絶対値は等しく, その符号は逆となる. 特に, 2 つの表層の単層板の付加応力の大きさは, 他の単層板の付加応力の半になる. つまり,

$$\Delta \sigma_{pq}^{(i)} = (-1)^{i+1} \Delta \sigma_{pq} \quad (i=2, 3, \dots, N)$$

$$\Delta \sigma_{pq}^{(1)} = -\Delta \sigma_{pq}^{(N)} = \frac{1}{2} \Delta \sigma_{pq} \quad (p, q=1, 2) \quad (26)$$

本試験片は同じ材料の単層板からできており, 各単層板の損傷状態は各層間と同様にほぼ等しいと考えられ, 次式と表せる.

Fig. 3. A tubular shape laminate.

$$\tilde{C}_{k\bar{l}\bar{p}\bar{q}}^{(i)-1} = \tilde{C}_{k\bar{l}\bar{p}\bar{q}}^{-1} \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (27)$$

$$\eta_{(j)} = \eta \quad (j=1,2,3,\dots,N-1) \quad (28)$$

式(26)~(28)の仮定と、層内応力およびひずみが $\bar{x}_1$ のみの関数であるという境界条件によって、式(21)から付加応力 $\Delta\sigma_{mn}^{(i)}$ が得られる。¹²⁾

$$\Delta\sigma_{11} = C_1 e^{P_1 x_1} + C_2 e^{-P_1 x_1} - \frac{2}{\eta t P_1^2} \left(A_{1112} - \frac{B_{1122} A_{2212}}{B_{2222}} \right) \tau_{Ex12} \quad (29)$$

$$\Delta\sigma_{22} = -\frac{1}{B_{2222}} (B_{2211} \Delta\sigma_{11} + A_{2212} \tau_{Ex12}) \quad (30)$$

$$\Delta\tau_{12} = C_3 e^{P_2 x_1} + C_4 e^{-P_2 x_1} - \frac{4}{\eta t P_2^2} (A_{1211} \sigma_{Ex11} + A_{1222} \sigma_{Ex22}) \quad (31)$$

ここに、

$$A_{mnrs} = (T_\varepsilon)_{mnkl}^{(1)} (\tilde{C}^{-1})_{k\bar{l}\bar{p}\bar{q}} (T_\sigma)_{pqrs}^{(1)} - (T_\varepsilon)_{mnkl}^{(2)} (\tilde{C}^{-1})_{k\bar{l}\bar{p}\bar{q}} (T_\sigma)_{pqrs}^{(2)} \quad (32a)$$

$$B_{mnrs} = (T_\varepsilon)_{mnkl}^{(1)} (\tilde{C}^{-1})_{k\bar{l}\bar{p}\bar{q}} (T_\sigma)_{pqrs}^{(1)} + (T_\varepsilon)_{mnkl}^{(2)} (\tilde{C}^{-1})_{k\bar{l}\bar{p}\bar{q}} (T_\sigma)_{pqrs}^{(2)} \quad (32b)$$

($m, n, k, l, p, q, r, s = 1, 2$)

ここで、上付き添字1は奇数番目の単層板に、上付き添字2は偶数番目の単層板に対応している。式(28)~(30)中の P_1 と P_2 は次式で定義される。

$$P_1 = \sqrt{\frac{2}{\eta t} \left(B_{1111} - \frac{B_{1122} B_{2211}}{B_{2222}} \right)}$$

$$P_2 = \sqrt{\frac{4 B_{1212}}{\eta t}} \quad (33)$$

式(29)、(30)は、斜交積層円管における付加応力と外部荷重との関係を示し、層内損傷の効果は式(11)および(13)で定義された式(32)中の $(\tilde{C}^{(i)-1})_{k\bar{l}\bar{p}\bar{q}}$ によって表現されている。一方、層間損傷の効果は、式(16)で定義された $\eta_{(j)}$ 中の $\tilde{G}_{(j)}$ によって表されている。式(29)~(31)と式(19)を組み合わせることにより、各層全ての応力とひずみが得られ、また、このように式(24)から斜交積層円管の平均の応力-ひずみ関係が得られる。

Fig. 3に示される積層円管試験片の両端($x_1 = \pm l$)では、次の関係が成り立つ。

$$\Delta\sigma_{11}(-l) = \Delta\sigma_{11}(l) = 0$$

$$\Delta\tau_{12}(-l) = \Delta\tau_{12}(l) = 0 \quad (34)$$

したがって、式(29)~(34)から次の関係が得られる。

$$C_1 = C_2 = \frac{2 \left(A_{1112} - \frac{B_{1122} A_{2212}}{B_{2222}} \right) \tau_{Ex12}}{\eta t P_1^2 (e^{-P_1 l} + e^{P_1 l})} \quad (35a)$$

$$C_3 = C_4 = \frac{4 (A_{1211} \sigma_{Ex11} + A_{1222} \sigma_{Ex22})}{\eta t P_2^2 (e^{-P_2 l} + e^{P_2 l})} \quad (35b)$$

以降の議論の便宜上、積層板の損傷変数を各単層板や各中間層の損傷変数の平均値として意味付け、次式で定義する。

$$D_M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D_2^{(i)} \quad (36)$$

$$D_D = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} D_3^{(j)} \quad (37)$$

筆者らの観察結果によれば、²⁾ほとんど全てのマトリックスクラックは繊維方向に沿っているため、層内損傷変数 $D_1^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, N$)の繊維方向成分は0と仮定する。層間はく離の影響が無視できて、 $D_{3(j)} \approx 0$ ($j=1, 2, \dots, N-1$)と仮定すると、層間はく離の平均密度は

$D_D \approx 0$ となる。したがって、式(28)の中間層のパラメータ η は近似的に $\eta \approx \eta_0 = 1 \times 10^{-5}$ とおける。¹²⁾ここで、 η_0 は非損傷状態での η の値である。次いで、式(13)、(29)~(31)および(24)から、弾性係数 E_1 および G_{12} とマトリックスき裂による中間層の損傷変数 D_M との関係が得られる。本理論により計算された $[\pm 45^\circ]_4$ 斜交積層円管試験片の弾性係数 E_1/E_1^0 、 G_{12}/G_{12}^0 の減少をFig. 4に示す。以下の図の弾性係数は、円管の全長($2l = 60\text{mm}$)における平均値である。

一方、中間層の損傷がなければ、損傷変数 D_M は0のままである。各中間層での層間はく離の密度は比較的均一で、 $D_3^{(j)} = D_D$ ($j=1, 2, \dots, N-1$)となるため、正規化された弾性係数 E_1/E_1^0 、 G_{12}/G_{12}^0 に及ぼす層間はく離の影響は式(13)、(23)、(37)、(29)~(31)および(24)から求められる。損傷変数 D_D の増加に伴う弾性係数の低下に及ぼす η_0 の影響をFig. 5, 6に示す。

3・2 疲労試験と損傷変数の同定

積層複合材の弾性係数に及ぼすマトリックスき裂と層間はく離の影響を明らかにするため、 $[\pm 45^\circ]_4$ 斜交積層円管試験片の疲労試験を行い、内部損傷の発達と弾性係数の低下を観察した。繰り返し引張応力 σ_{Ex11} はFig. 3に示した円管試験片の x_1 軸方向に負荷され、また疲労試験における応力振幅 σ_{Ex11}^a 、平均応力 σ_{Ex11}^m 、応力速度 $\dot{\sigma}_{Ex11}$ は以下に示す通りである。

$$\sigma_{Ex11}^a = \sigma_{Ex11}^m = 62.5\text{MPa}$$

$$\dot{\sigma}_{Ex11} = 100\text{MPa/s} \quad (38)$$

疲労試験中の内部損傷の発達を評価するため、弾性係数 E_1 と G_{12} を連続的に測定した。また、疲労の各段階のCFRP $[\pm 45^\circ]_4$ 斜交積層試験片のそれぞれを試験片軸に垂直に切断し、厚さ2mmの薄片を8枚切り出した。各切断面を鏡面研磨した後、その損傷状態を光学的表面顕微鏡により観察した。この観察により得られる損傷の情報は、各切断面におけるマトリックスき裂と層間はく離の数と幅だけで、き裂の深さと形状は不明である。損傷変数は微小き裂の面積の関数であるため、2種類の微小き裂の面積を求める必要がある。

超音波顕微鏡観察によると、CFRP $[\pm 45^\circ]_4$ 斜交積層複合材の微小き裂は繊維方向に発達し、比較的一様な

Fig. 4. Reduction of elastic moduli due to matrix cracks.

Fig. 5. Relation between the normalized Young's modulus and damage variable D_D .

Fig. 6. Relation between the normalized shear modulus and damage variable D_D .

形状をしている。そこで、各き裂の形状は近似的に方形¹⁷⁾とみなし、き裂長さ L_k と幅 W_k に次式の関係があると仮定する。

$$L_k = \lambda_k W_k \quad (39)$$

ここで、 L_k と W_k は k 番目のき裂の長さ L_k と幅 W_k で、 λ_k は両者のアスペクト比である。観察結果によると、大半の層間はく離に対するアスペクト比 λ_k は10~20の間の値をとる。また、層間はく離はマトリックスき裂が界面と交差する領域で発生するため、マトリックスき裂の λ_k は層間はく離のものより大きいと仮定する。

CFRP $[\pm 45^\circ]_4$ 斜交積層円管試験片の実験結果において、マトリックスき裂と層間はく離は、それぞれ各層と各層間で比較的均等に分布している。したがって、損傷変数は、2種類の損傷密度の平均値の関数と定義できる。さらに、ほとんど全てのマトリックスき裂は繊維方向に沿って進展するため、層内の損傷変数の成分 $D_{I1}^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, N$) は近似的に0と仮定する。

各切断面で観察されたき裂の数と幅を基に、 l 番目の層におけるマトリックスき裂の全面積 A_{Ml} と、 n 番目の中間層における層間はく離の全面積 A_{Dn} は、以下のように求められる。

$$A_{Ml}^{(l)} = \sum_{i=1}^8 \sum_{k=1}^{N_{Ml}} \lambda_{Ml} W_k \quad (40)$$

$$A_{Dn}^{(n)} = \sum_{i=1}^8 \sum_{k=1}^{N_{Dn}} \lambda_{Dn} W_k^2 \quad (41)$$

ここで、 λ_M と λ_D はマトリックスき裂と層間はく離のアスペクト比、 N_{Ml} は l 番目の切断片で観察された l 番目の層におけるマトリックスき裂の数、 N_{Dn} は n 番目の切断片で観察された n 番目の中間層における層間はく離の数、 W_k は切断片で観察された k 番目のマトリックスき裂の幅である。このとき、マトリックスき裂密度 D_{MCD} は次式となる。

$$D_{MCD} = \frac{\sum_{l=1}^8 A_{Ml}^{(l)}}{V} \quad (42)$$

ここで、 V は8枚の切断片の全体積である。また、式(15)、(37)によって定義された、層間はく離に対する損傷変数は次式となる。

$$D_D = \frac{\sum_{n=1}^7 A_{Dn}^{(n)}}{7A_I} \quad (43)$$

ここで、7は中間層の数である。Fig. 4とFig. 7の結果を用いて、 D_{MCD} は式(36)の D_M と後に関連付けられる。

繰返し負荷に伴う縦弾性係数 E_1 の低下と微視的な損傷密度 D_{MCD} と D_D の増加の様子をFig. 7に示す。また、Fig. 8はせん断剛性 G_{12} の低下を示している。両図の結果は、アスペクト比を $\lambda_M = \lambda_D = 15$ としたときのマトリックスき裂密度と層間はく離の損傷密度であり、幅0.13mm以上の層間はく離に対しては、層間はく離が切断片を貫通するとした。負荷状態は次のように、応力振幅と平均応力は62.5MPaで、応力速度は100MPa/sである。

積層材の層内と層間の損傷は同時に発達するので、微視的損傷による積層材の剛性の低下を厳密に評価するには、両者を考慮する必要がある。Fig. 7より、マトリックスき裂密度 D_{MCD} とFig. 9に示す層間はく離の面積の割合 D_D が得られる。

Fig. 9において、疲労初期の段階では層間はく離はほとんど成長しないが、マトリックスき裂密度 D_{MCD} が0.5に達する、あるいは層間はく離の面積割合 D_D が0.02となるA点を越えると急激に発達する。

式(13)、(23)、(37)、(29)~(31)および(24)より、縦弾性係数 E_1 は D_M と D_D の関数として次式で表される。

$$E_1 = f_1(D_M, D_D) \quad (44)$$

また、実測の縦弾性係数 E_1 は、マトリックスき裂密度 D_{MCD} と層間はく離の面積の割合 D_D に支配される。Fig. 7の実験結果から、以下の関係が推測できる。

$$E_1 = f_2(D_{MCD}, D_D) \quad (45)$$

式(44)および(45)は損傷変数 D_M とマトリックスき裂密度 D_{MCD} を関係付けるものである。Fig. 4およびFig. 7の結果より得られる両者の関係をFig. 10に示す。

3・3 弾性係数低下の評価

$[\pm 45^\circ]_4$ 斜交積層円管に対する縦弾性係数の低下とこのモデルで予測した損傷変数 D_M の関係をFig. 11およびFig. 12に示す。図中で、prediction 2は、マトリックスき裂密度 D_{MCD} の影響だけを考慮した、 $D_D=0$ の解析

Fig. 7. Variation of Young's modulus and damage density during fatigue process.

Fig. 8. Variation of shear modulus during fatigue process.

Fig. 9. Relation between the density of matrix cracks and the fraction of delamination area.

結果で、用いた中間層のパラメータは $\eta \approx \eta^0 = \delta / G^0 = 1 \times 10^{-5}$ である。また prediction1 は、マトリックスの損傷 D_M と層間はく離 D_D の両方を考慮した解析結果である。Fig. 9 における D_{MCD} と D_D の関係と、Fig. 10 における D_M と D_{MCD} の関係をこの解析で用いた。

Fig. 11 および Fig. 12 から分かるように、マトリックスき裂の増加、すなわち D_M の増加に伴い、縦弾性係数は初め徐々に低下する。しかし、マトリックスき裂密度 D_{MCD} が一定のレベルの A 点に達すると、Fig. 9 で示したように層間はく離の進展が加速し、積層材の縦弾性係数の急激な低下をもたらす。さらに、 $[\pm 45^\circ]_4$ 斜交積層

Fig. 10. Experimental relation between the damage variable and the matrix crack density.

Fig. 11. Relation between Young's modulus and damage variable.

Fig. 12. Relation between shear modulus and damage variable.

円管における層間はく離は、約 15% の縦弾性係数 E_1 の低下と 70% 以上のせん断剛性 G_{12} の低下を引き起こす。

D_M の増加に伴い縦弾性係数 E_1 は顕著な減少を示すが、せん断剛性 G_{12} は D_M の増加に対して比較的鈍感である。せん断荷重下では、主応力方向に配向した単層板の繊維が主に主応力を受け持つため、 G_{12} は繊維に平行なマトリックスき裂の影響を受けにくいと推測される。せん断剛性は界面の接着状態に強く依存するため、 G_{12} の顕著な減少は層間はく離の発生後に観察される。

全ての解析結果は、実験結果とよく一致し、ここで提案した積層材料に対する損傷モデルの妥当性を示している。

4 結 言

層内および層間の損傷, すなわちマトリックスき裂と層間はく離の両方の影響を考慮して, FRP 積層材の損傷モデルを拡張した. 初めに, 連続体損傷力学 (CDM) 的手法を用いて単層板の力学的挙動に及ぼす異方的なマトリックスき裂の影響をモデル化し, 次いで, 中間層のせん断変形を考慮した修正積層理論¹²⁾に, 先の損傷を持つ単層板の構成関係を組み込むと同時に, 層間はく離の効果を中間層のみかけのせん断剛性の低下として導入した.

この損傷モデルの適用性を検討するため, $[\pm 45^\circ]_4$ 斜交積層円管試験片に対する疲労試験を行い, 実験結果と解析結果を比較した. 本論文の結果を要約すると以下の通りである.

(1) 修正積層理論を用いることによって, 本損傷モデルは中間層に損傷を持つ積層材の力学的挙動に及ぼす剛性の不整合の影響を的確に表現できる.

(2) 提案したモデルは, 層内と層間に損傷のある斜交積層複合円管試験片の弾性係数 E_1 と G_{12} の変化を合理的に記述できる. 特に, 疲労の最終段階において観察される層間はく離の急速な進展によって引き起こされる弾性係数の急激な低下を記述できる.

(3) 本モデルでは, せん断剛性と中間層の厚さで特徴づけられる等価中間層の初期材料パラメータのみで, 中間層のせん断挙動の効果を表現できる.

参 考 文 献

- 1) A. L. Highsmith and K. L. Reifsnider, ASTM STP 775, K. L. Reifsnider, ed., ASTM, 103 (1982).
- 2) S. Murakami, Y. Kanagawa, T. Ishida, A. Kawasaki and Q. S. Bai, Proc. IUTAM Symposium on Microstructure-Property Interaction in Composite Materials, 265 (1995).
- 3) R. Talreja, "Fatigue of composite materials" (1987) Technomic Publishing Co., Inc.
- 4) J. Varna and L. A. Berglund, J. Composite Tech. Res., 12, 97 (1990).
- 5) C. L. Tsai and I. M. Daniel, "Damage in Composite Materials", G. Z. Voyiadjis (Ed.), p. 51 (1993) Elsevier Science Publishers.
- 6) R. Talreja, S. Yalvac, L. D. Yats and D. G. Wetters, J. Composite Mater., 26, 1644 (1992).
- 7) R. Talreja, Engng. Fracture Mech., 25(5/6), 751 (1986).
- 8) R. Talreja, J. Strain Analysis, 24 (4), 215 (1989).
- 9) C. E. Harris, D. H. Allen and E. W. Nottorf, Proc. Damage Mechanics in Composites, ASME AD-12, 17 (1987).
- 10) T. W. Coats and C. E. Harris, J. Composite Mater., 19 (3), 280 (1995).
- 11) 金川 靖, 村上澄男, 劉 彦, 白 秋実, 田中行平, 材料, 45, 206 (1996).
- 12) 白 秋実, 村上澄男, 金川 靖, 田中行平, 材料, 45, 1224 (1996).
- 13) L. M. Kachanov, "Introduction to continuum damage mechanics" (1986) Martinus Nijhoff.
- 14) J. Lemaitre and J. L. Chaboche, "Mechanics of solid materials" English translation, (1990) Cambridge University Press.
- 15) D. Krajcinovic and J. Lemaitre, "CISM course." (1987) Springer-Verlag.
- 16) S. Murakami, J. Appl. Mech., 55, 280 (1988).
- 17) 田中行平, 金川 靖, 村上澄男, 川崎敦司, 材料, 46, 638 (1997).