種々の階層における塑性理論の発展

6. ひずみ勾配依存性構成式と塑性不安定解析†

富田 佳宏*

Recent Advances and Multi-Hierarchical Perspectives in Plasticity Theory

VI : Strain Gradient Dependent Constitutive Equation and Plastic Instability Analysis

by

Yoshihiro TOMITA *

Key words : Elastic-plastic materials, Strain gradient dependent constitutive equation, Variational principle, Finite element method, Perturbation analysis, Size effect, Composite material

1 ま え が き

一般に延性材料が大きな変形を受けると、変形に伴う幾何学的な形状変化ならびに微視的な構造変化を伴った軟化により一部の領域の剛性が低下し、そこで全体の変形の大部分を吸収するようになり、様々な様式の塑性不安定現象が発生する。^{1), 2)} 全体の変形に伴って、剛性が低下した領域が局所化し、最終的な崩壊に至る。このとき、局所化した領域は、材料の微視的な構造、変形によって形成された微視組織、材料のひずみ速度依存性と変形によって発生した非可逆仕事による熱の伝導等のいわゆる特徴長さに依存した有限の大きさをもつ。^{3), 6)} このような不安定現象の発生とその局所化過程の解明は、各種材料の最終強度を知る上で、あるいは成形性を評価する上で、さらには複合材等の設計において重要である。

変形の局所化現象の材料の特徴長さ依存性の研究は、Cosserat 材や非局所的な応答をする多くの材料の研究^{7), 8)} まで溯ることが出来る。しかしながら、最近注目を集めている、応力、ひずみといった局所的な量に加えて、材料の微視的な構造あるいは組織の形成効果を導入できる形式に一般化された構成式を用いた研究は、Aifantis^{3), 4)} にはじまるものと、Fleck ら⁹⁾ の研究に由来するものがある。前者では、材料の微視的構造と巨視的変形挙動の関係を詳細に検討し、得られた高次の変形勾配項を含んだ形式の構成式^{3), 4)} を用いている。一方、後者は、Ashby¹⁰⁾ の幾何学的に必要な転位の考え方により導出された、ひずみの 1 次勾配を含む形式の構成式⁹⁾ を用いている。構成式に高次のひずみ勾配項の導入に関して、本連載講座において解説¹¹⁾ が行われているので、参照されたい。このような構成式を用いることによって、不安定発生後の変形の局所化領域等の寸法依存性あるいはその内部の構造について検討を加えることができるようになった。また、有限要素法を用いた数値シミュレーションにおいて、得られた結果の解析に用いたメッシュ依存性を

排除することが可能となるので^{2), 12), 13)} シミュレーション上からも画期的なことといえよう。

本稿では、いわゆる材料の特徴長さを導入した形式の構成式とそれによって支配される材料の境界値問題に対応した変分原理、それを指導原理とする有限要素法について言及する。さらに、摂動法を用いた変形の不安定解析と平面ひずみ状態における不安定現象の特徴^{14) ~ 16)} 切削におけるチップ形成評価¹⁷⁾ ならびに Marciniak & Kuczynski 理論¹⁸⁾ を用いた薄板の成形性評価に及ぼす初期不整の影響¹⁹⁾ 等について最近の研究を紹介する。ついで、有限要素法を用いた研究として、変形の局所化の寸法依存性、粒子強化複合材の強度の粒子径、体積含有率、配置依存性等について、筆者らの研究^{12), 13), 20) ~ 22)} を中心に紹介する。

2 構 成 式

ここでは、通常の構成式にひずみ勾配項を導入した構成式について紹介する。いま、変形をしている弾塑性体を考える。変形速度勾配 L_{ij} の対称成分 D_{ij} と反対称成分 W_{ij} を弾性成分 D_{ij}^e , W_{ij}^e と塑性成分 D_{ij}^p , W_{ij}^p に分解する。

$$D_{ij} = D_{ij}^e + D_{ij}^p, W_{ij} = W_{ij}^e + W_{ij}^p \quad (1)$$

弾性応答は等方的であると仮定して、Hooke の法則による構成式によって表す。

$$\hat{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e D_{kl}^e, \quad C_{ijkl}^e = 2G \left\{ \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right\} \quad (2)$$

ここで、 G はせん断弾性係数、 ν はポアソン比を表す。構成式を記述するための適切な客観性を有する応力速度については、多くの議論がなされているが、²⁴⁾ 本稿では、Cauchy の応力 σ_{ij} の Jaumann 速度 $\hat{\sigma}_{ij}$ を用いることにする。

つぎに、等方硬化材に対する、塑性ひずみ速度に対して、ひずみ勾配依存性構成式を示す。Mises の流れ法則

† 原稿受理 平成 11 年 2 月 15 日 Received Feb. 15, 1999

* 正 会 員 神戸大学工学部機械工学科 〒657-8501 神戸市灘区六甲台町, Dept. of Mech. Eng., Kobe Univ., Nada-ku, Kobe, 657-8501

を適用すると、塑性ひずみ速度 D_{ij}^p は以下のように表すことが出来る。

$$D_{ij}^p = \frac{\dot{\gamma}}{2\tau} \sigma'_{ij}, \quad (3)$$

$$\tau = J_2^{1/2} = \left(\frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \right)^{1/2}, \quad \dot{\gamma} = (2D_{ij}^p D_{ij}^p)^{1/2}$$

ここで、 σ'_{ij} は Cauchy の応力の偏差成分を表し、 τ は相当せん断応力、 $\dot{\gamma}$ は相当塑性せん断ひずみ速度を表す。

ひずみ速度無依存性材料に対して、降伏関数は

$$f = \sqrt{J_2} - \bar{\tau} = 0 \quad (4)$$

によって定義される。ひずみ勾配依存性材料の場合、Zbib と Aifantis¹⁴⁾ は、流れ応力 $\bar{\tau}$ は以下のように表した。

$$\bar{\tau} = \kappa(\gamma) - c_1 \gamma_{,ii} - c_2 \gamma_{,i} \gamma_{,i} - c_3 \gamma_{,iii} \quad (5)$$

ここで、 $\kappa(\gamma)$ は通常の硬化関数であり、第2項以降がひずみ勾配依存性を表している。また、係数 c_1 – c_3 は、ひずみ γ に依存した、ひずみ勾配依存性の程度を表す係数である。さらに一般的な場合については、Zbib と Aifantis¹⁴⁾ を参照されたい。式 (4) と (5) から、適合条件式 $\dot{f}=0$ は次のようになる。

$$\bar{h} \dot{\gamma} - c_1 \dot{\gamma}_{,ii} - 2c_2 \gamma_{,i} \dot{\gamma}_{,i} - c_3 \dot{\gamma}_{,iii} - \frac{\hat{\sigma}_{ij} \sigma'_{ij}}{2\sqrt{J_2}} = 0 \quad (6)$$

$$\bar{h} = \kappa' - c'_1 \gamma_{,ii} - c'_2 \gamma_{,i} \gamma_{,i} - c'_3 \gamma_{,iii} \dots$$

ここで、 $\bar{h}$ はひずみ勾配依存性加工硬化係数、記号に付したプライムは γ による偏微分を表す。

式 (1), (2), (3) より、弾塑性構成式を得る。

$$\hat{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e \left(D_{kl} - \frac{\dot{\gamma}}{2\tau} \sigma'_{kl} \right) \quad (7)$$

上式の $\dot{\gamma}$ は、式 (6) によって与えられる。このように、ひずみ速度 $\dot{\gamma}$ を独立変数として取り扱うことにより、以下で示す変分原理の表現を簡潔化し、通常の要素を用いて有限要素法を定式化できる。

ひずみ速度依存性材料に対するひずみ勾配依存性構成式の導出は、式 (5) の流れ応力をひずみ速度依存性に置き換え若干の修正を加えることにより可能となる。

$$\bar{\tau} = \kappa(\gamma, \dot{\gamma}) - c_1 \gamma_{,ii} - c_2 \dot{\gamma}_{,ii} - c_3 \gamma_{,iii} - c_4 \dot{\gamma}_{,iii} \quad (8)$$

この場合、式 (7) と同様の構成式を導出できる。

$$\hat{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e \left(D_{kl} - \frac{1}{2\mu} \sigma'_{kl} \right) \quad (9)$$

ここで、式 (3) の相当せん断応力 τ を用いて、粘性係数は $\mu = \tau/\dot{\gamma}$ となる。大きな非弾性変形で、弾性変形が無視できる場合、 $D_{ij} = D_{ij}^p$ となる。このとき、式 (9) は以下のように粘塑性構成式として表すことが出来る。

$$\sigma_{ij} = 2\mu D_{ij} - p\delta_{ij}, \quad p = -\sigma_{ii}/3 \quad (10)$$

3 変分原理と有限要素方程式

3・1 変分原理

本節では、上記構成式に対応した変分原理を示し付加的な境界条件式を導出する。このような問題については、Muhlhaus と Aifantis²⁶⁾ が、式 (5) で $c_2 = 0$ とした場合について言及している。ここでは、式 (5) で、 $c_2 = 2c$ 、 $c_2 = c_3 = 0$ と特殊化した構成式で支配される材料に対する変分原理を示す。この時、降伏条件ならびに適合条件は

次のようになる。

$$f = \sqrt{J_2} - \kappa(\gamma) + 2c\gamma_{,ii} = 0 \quad (11)$$

$$(\kappa' - 2c'\gamma_{,ii})\dot{\gamma} - 2c\dot{\gamma}_{,ii} - \frac{\hat{\sigma}_{ij}\sigma'_{ij}}{2\tau} \quad (12)$$

式 (12) は独立変数として取り扱うせん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}$ に対する微分方程式を表している。式 (7) と (12) は、ひずみ速度に依存しない材料に対する構成式を表す。このような材料に対する、完全な境界条件を導出するために、以下に示す汎関数を考えよう。

$$G(v_i, \dot{\gamma}) = \frac{1}{2} \int_V U^e dV - \int_{S_i} \dot{P}_i v_i dS + \int_V c\dot{\gamma}_{,i} \dot{\gamma}_{,i} dV + \frac{1}{2} \int_V (\kappa' - 2c'\gamma_{,ii}) \dot{\gamma}^2 dV$$

$$U^e = C_{ijkl}^e \left(D_{ij} - \frac{\dot{\gamma}}{2\tau} \sigma'_{ij} \right) \left(D_{kl} - \frac{\dot{\gamma}}{2\tau} \sigma'_{kl} \right) \quad (13)$$

$$- F_{ijkl} D_{ij} D_{kl} + \sigma_{ij} v_{k,i} v_{k,j}$$

$$F_{ijkl} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \delta_{kl} + \sigma_{kj} \delta_{li} + \sigma_{li} \delta_{kj} + \sigma_{kl} \delta_{ij})$$

ここで、 $\dot{P}_i$ は境界 S_i 上で規定される表面力の変化速度、 V は体積を表す。平衡状態において、 $\dot{\gamma} \geq 0$ の場合、汎関数 $G(v_i, \dot{\gamma})$ は、 $v_i, \dot{\gamma}$ の微小な変分に対して停留する。式 (13) を $v_i, \dot{\gamma}$ について変分をとり、停留条件を求めると、

$$\delta G = \int_V [\delta D_{ij} \hat{\sigma}_{ij} - \delta D_{ij} F_{ijkl} D_{kl} + \delta v_{k,i} \sigma_{ij} v_{k,j}] dV - \int_{S_i} \delta v_i \dot{P}_i dS - \int_V \left(\frac{\hat{\sigma}_{ij} \sigma'_{ij}}{2\tau} \right) \delta \dot{\gamma} dV + \int_V (\kappa' - 2c'\gamma_{,ii}) \dot{\gamma} \delta \dot{\gamma} dV - \int_V (2c\dot{\gamma}_{,ii}) \delta \dot{\gamma} dV + \int_S 2c(\dot{\gamma}_{,i} n_i) \delta \dot{\gamma} dS = 0 \quad (14)$$

式 (14) の最初の2つの項は、通常の材料の弱形式の平衡方程式を表す。²⁵⁾ 続く3つの項は、式 (12) の適合条件式を、最後の項は、ひずみ勾配項の導入に伴って生じた S 上での $\dot{\gamma}$ に対する付加的な境界条件を表す。^{26), 27)}

$$c\dot{\gamma}_{,i} n_i = 0 \quad (15)$$

これは、境界 S を通過するひずみ速度 flux が零となることを表している。ここで、 $c = 0$ の場合、上記変分原理は、通常の弾塑性体に対する変分原理²⁵⁾ に対応したものとなる。このように、汎関数式 (13) を $v_i, \dot{\gamma}$ について変分をとり停留条件を求めると、対応する Euler の式としてひずみ勾配依存性材料の基礎式が導出されることが示された。つぎに、この変分原理を指導原理として、通常の材料に対するのと同様に有限要素法を定式化する。

3・2 有限要素法

上記変分原理では、変数は、変位速度 v_i とせん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}$ である。また、汎関数式 (13) に含まれるこれらの変数の最高次の導関数はいずれも1次である。従って、変数 $v_i, \dot{\gamma}$ ならびにその勾配 $v_{i,j}, \dot{\gamma}_{,i}$ も、通常の C^0 連続性を有する有限要素形状関数 ϕ_N とその勾配 $\phi_{N,i}$ 、有限要素節点 N のこれらの値、 $v_{N,i}, \dot{\gamma}_N$ を用いて表すことが出来る。

$$v_i = \phi_N v_{Ni}, \quad v_{i,j} = \phi_{N,j} v_{Ni} \quad (16)$$

$$\dot{\gamma} = \phi_N \dot{\gamma}_N, \quad \dot{\gamma}_{,i} = \phi_{N,i} \dot{\gamma}_N$$

式 (16) を式 (13) に代入し、整理すると、有限要素近似

された, 汎関数表示が得られる.

$$\begin{aligned}
 G &\equiv \Sigma G^e \\
 G^e &= \frac{1}{2} K_{NiMk}^1 v_{Ni} v_{Mk} + K_{NiM}^2 v_{Ni} \dot{\gamma}_M \\
 &+ \frac{1}{2} K_{NM}^3 \dot{\gamma}_N \dot{\gamma}_M - v_{Ni} \dot{f}_{Ni} \\
 K_{NiMk}^1 &= \int_{V_e} \{ (C_{ijkl}^e - F_{ijkl}) \phi_{N,j} \phi_{M,l} + \sigma_{ij} \phi_{N,i} \phi_{M,j} \delta_{ki} \} dV \\
 K_{NiM}^2 &= - \int_{V_e} \frac{G}{\tau} \sigma'_{ij} \phi_{N,j} \phi_{M,i} dV \\
 K_{NM}^3 &= \int_{V_e} \{ (G + \kappa' - 2c' \gamma_{,ii}) \phi_N \phi_M + 2c \phi_{N,i} \phi_{M,i} \} dV \\
 \dot{f}_{Ni} &= \int_{S_e} \phi_N \dot{P}_i dS
 \end{aligned} \quad (17)$$

上式で総和 Σ はすべての要素について行われる. 式 (17) を, 節点変位速度 v_{Ni} と節点せん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}_M$ について微分し, 停留条件を求めると, 以下の有限要素方程式を得る.

$$\begin{aligned}
 K_{NiMk}^1 v_{Mk} + K_{NiM}^2 \dot{\gamma}_M &= \dot{f}_{Ni} \\
 K_{NiM}^2 v_{Ni} + K_{NM}^3 \dot{\gamma}_N &= 0
 \end{aligned} \quad (18)$$

マトリクス K_{NiMk}^1 , K_{NiM}^2 , K_{NM}^3 は, それぞれ, 通常の剛性マトリクス, 節点変位速度と節点せん断ひずみ速度の連成を表すマトリクスおよび節点せん断ひずみ速度剛性マトリクスを表す. また, $\dot{f}_{Ni}$ は等価節点力ベクトルを表す. 有限要素方程式 (18) を, 通常の方法²⁵⁾ によって, 系全体の方程式を構築することが出来る. なお, 表面における節点せん断ひずみ速度には, 式 (15) の拘束が付く.

4 解析的手法による不安定現象の解析

ここで, ひずみ勾配依存性構成式に支配される材料の一般的な変形状態からの不安定現象の発生に関する研究を紹介する. 変形速度勾配 L_{ij}^0 , 応力 σ_{ij}^0 で表現される一般的な変形をしている材料を考える. このような材料に対して, 時間 t と空間位置 x_j に依存した変位速度と圧力の摂動

$$\begin{aligned}
 v_i &= v_i^0 + \tilde{v}_i(x_j, t), \quad v_i^0 = L_{ij}^0 x_j \\
 p &= p^0 + \tilde{p}(x_j, t), \quad |\tilde{v}_i| \ll 1, |\tilde{p}| \ll 1
 \end{aligned} \quad (19)$$

を与えた場合, 材料が不安定になる条件を検討する. 議論を簡潔にするために, 材料の挙動を支配する構成式として, 式 (8), (10) で表される構成式を用いる. このとき, 摂動状態に対して平衡方程式, 非圧縮性の条件式と構成式は, 以下のようになる.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_{ij,j} &= 0, \quad \tilde{D}_{ii} = 0, \\
 \tilde{\sigma}_{ij} &= -\tilde{p} \delta_{ij} + 2\tilde{\mu} D_{ij}^0 + 2\mu^0 \tilde{D}_{ij}, \\
 \tilde{\mu} &= \frac{\tilde{\tau}}{\dot{\gamma}_0} - \frac{\tau^0}{\dot{\gamma}^0} \dot{\gamma}, \quad \dot{\gamma} = \frac{2D_{ij}^0 \tilde{D}_{ij}}{\dot{\gamma}^0}
 \end{aligned} \quad (20)$$

さらに, ひずみ勾配依存性材料に対して, 流れ応力 $\tilde{\tau}$ は

$$\tilde{\tau} = H^0 \dot{\gamma} + S^0 \dot{\gamma} + c_1^0 \dot{\gamma}_{,ii} + c_2^0 \dot{\gamma}_{,ii} + c_3^0 \dot{\gamma}_{,iii} + c_4^0 \dot{\gamma}_{,iii} \quad (21)$$

H と S はひずみ硬化およびひずみ速度感度パラメータと呼ばれ, それぞれ

$$H = \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \dot{\gamma}}, \quad S = \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \dot{\gamma}} \quad (22)$$

v_j, p が急変する面の単位法線ベクトルを n_i としたとき, 式 (19) で表される摂動が, 次のように表される場合を考える.

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}_j &= v_j^* \exp[iq(x_i n_i) + \omega t], \\
 \tilde{p} &= p^* \exp[iq(x_i n_i) + \omega t]
 \end{aligned} \quad (23)$$

ここで, $i = \sqrt{-1}$, v_j^*, p^* は振幅, q は波数, ω は摂動の成長速度で, 問題の固有値を表す. 式 (23) を用いると, 変形速度勾配の摂動 $\tilde{L}_{kl}$ とそれに対応する対称部分 $\tilde{L}_{kl}$ と反対称部分 $\tilde{L}_{kl}$ は次のように表すことができる.

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}_{kl} &= iq \exp[iq(n_j x_j) + \omega t] v_k^* n_l \\
 \tilde{D}_{kl} &= \frac{iq}{2} \exp[iq(n_j x_j) + \omega t] (v_k^* n_l + n_k v_l^*) \\
 \tilde{W}_{kl} &= \frac{iq}{2} \exp[iq(n_j x_j) + \omega t] (v_k^* n_l - n_k v_l^*)
 \end{aligned} \quad (24)$$

式 (24) から非圧縮性の条件は, 以下のようになる.

$$v_j n_j = 0, \quad S_j = \frac{v_j^*}{|v^*|} \quad (25)$$

v_j は, v_j^* 方向の単位ベクトルの成分である. 式 (20) ~ (24) を用いて平衡方程式と非圧縮性の条件式を表すと以下のようになる.¹⁴⁾

$$\left[\frac{4q^2}{\dot{\gamma}^2} A(D_{kl} n_l D_{rs} n_s) + q^2 \mu \delta_{kr} \right] v_r^* + iq p^* n_k = 0, \quad n_k v_k^* = 0$$

$$A = \frac{H}{\omega} + S - c_1 \frac{q^2}{\omega} - c_2 q^2 + c_3 \frac{q^4}{\omega} + c_4 q^4 - \mu \quad (26)$$

なお, 上式の表示を簡潔にするために, 変数に付される指標 "0" を省略している. 式 (26) で, v_r^* と p^* に対して非自明解が存在する条件を表す ω に対する特性方程式から, 解が不安定になるか否かを判定できる. すなわち, ω の 1 つの固有値の実部が正である場合, 与えた摂動が拡大し, 不安定が発生する. さらに, 対応する特性方向は, ω を単位法線方向 n_k に対して最大化することにより決定できる.

Zbib と Aifantis¹⁴⁾ は, 平面ひずみ問題に対して, 角度 θ を最大主ひずみ速度方向に対する v_j^* 方向の相対角度として

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= -D_{22}, \quad D_{33} = 0, \quad \dot{\gamma} = 2D_{11} \\
 \sigma'_{11} &= -\sigma'_{22}, \quad \sigma'_{33} = 0, \quad \tau = \sigma'_{11} \\
 (n_1, n_2) &= (-\sin \theta, \cos \theta)
 \end{aligned} \quad (27)$$

の場合に, 上記議論を特殊化し, 次に示す特性方程式を得ている.

$$\omega = \frac{H - c_1 q^2 + c_3 q^4}{S + \mu \cot^2 2\theta - c_2 q^2 + c_4 q^4} \quad (28)$$

式 (28) で表す ω の性質を検討することによって, 一般変形状態が不安定となり周期的な摂動がせん断帯形の不安定に成長する条件を求めることができる. 特に塑性体のとき, $S = c_2 = c_4 = 0$, 式 (28) は

$$\omega = \frac{H - c_1 q^2}{\mu \cot^2 2\theta} \quad (29)$$

上式で分母は正であるので, ω が正の固有値を有するためには, $H < c_1 q^2$ でなければならない. このとき, 不安定

となり不均一な外乱が成長する。ひずみ勾配に依存しない材料の場合、 $c_1 = 0$ 、正のひずみ硬化を示す材料においては不安定が発生しないこと²³⁾と対照的であり、これは材料のひずみ勾配依存性の影響である。式(29)で ω を最大化すると、 $\theta_c = \pm\pi/4$ が得られる。このように、 θ_c はひずみ勾配に依存しない。

粘塑性材料に対して、式(28)を、角度 θ に対して最大化すると、次式を得る。

$$\omega = -\frac{H - c_1 q^2 + c_3 q^4}{S - c_2 q^2 + c_4 q^4} \quad (30)$$

たとえば、 $c_2 = c_4 = 0$ 、 $c_1 > 0$ 、 $c_3 > 0$ の場合、正の加工硬化率 $H > 0$ の場合においても不安定が成長する。他の場合については、Zbib と Aifantis¹⁴⁾を参照されたい。

次に、上記不安定解析を切削における変形の局所化とチップ生成の解析に適用した結果を示す。¹⁷⁾Dudzinski と Molinari²⁸⁾に従って、図1に示すように、せん断領域に対して法線方向に y 軸をとった場合、切削に関係したすべての量は y と時間 t のみの関数であると近似している。このとき、適合条件式、運動方程式、エネルギー平衡方程式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{G} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + v_n \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) + \dot{\gamma}^p, \\ \frac{\partial \tau}{\partial y} &= \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v_n \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \rho C_v \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_n \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) &= \tau \dot{\gamma}^p + \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (31)$$

ここで、 γ と γ^p 、 τ と θ はそれぞれせん断ひずみ、塑性せん断ひずみ、せん断応力と温度を表す。 v と v_n は、材料の速度のせん断領域に沿う成分とそれに垂直な成分である。 G 、 c_v 、 ρ と λ は、せん断弾性係数、比熱、密度および熱伝導率である。ひずみ勾配依存性の構成式として、先に筆者ら^{2), 12)}が用いたと同じ形式のひずみ、ひずみ速度、温度依存性構成式

$$\tau = \kappa(\gamma^p, \dot{\gamma}^p, \theta) - c\dot{\gamma}^p_{,yy} \quad (32)$$

が導入されている。式(31)と(32)の解析結果によると、せん断ひずみ、温度上昇は、定常状態に近付くまではゆるやかである。しかしながら、せん断帯が発生すると、解が劇的に変化する。このような場合に対して、前記摂動解析が適用され、摂動の急激な成長を伴わない限界の波長 l_{cr} が存在することが示された。 l_{cr} 以下では、熱伝導やひずみ勾配が大きくプロセスは安定で、連続的なチップが形成される。 l_{cr} 以上の波長では、プロセスは不安定になり、せん断帯形不連続チップが形成される。式(32)の右辺第一項が

$$\kappa(\gamma^p, \dot{\gamma}^p, \theta) = \mu(\dot{\gamma}^p)^m \theta^v \quad (33)$$

となる場合に対して限界の波長 l_{cr} が求められ、以下のよう解析的表示が得られている。¹⁷⁾

$$l_{cr} = \sqrt{-\frac{1}{m+v} \left(\frac{m\kappa\Theta + c\gamma_0\dot{\gamma}}{\tau_0\dot{\gamma}} \right)} \quad (34)$$

ここで、 μ 、 m 、 v 、 τ_0 、 γ_0 および Θ は、材料の粘性、ひずみ速度感度指数、熱硬化指数、初期降伏応力、基準ひずみ

図1 切削過程のモデル

および初期温度を示す。 l_{cr} が小さくなると、局所化が激しくなる。ひずみ速度 $\dot{\gamma}$ 、初期降伏応力 τ_0 が増加すると断熱せん断帯に近い変形になる。一方、熱伝導率 λ 、ひずみ勾配項の係数 c が大きくなると、断熱せん断帯の発生を防止あるいは遅らせる。これらは切削実験によって得られた結果に良く対応している。²⁹⁾

最後に、薄板の成形限界線図(FLD)の評価に及ぼす材料のひずみ勾配依存性について紹介する。¹⁹⁾FLDは、Hill³⁰⁾の幾何学的に完全な板に対する研究にはじまり、幾何学的初期不整を導入したMarciniak と Kuczynski 理論¹⁸⁾、いわゆるMK理論、Storen と Rice³¹⁾による比例負荷下での局所化解析等が、現在のFLD解析の源流となる研究である。いずれもその後の多くの研究者によって一般化され、成形性の予知に広く用いられている。^{32), 33)}MK理論における問題点は、得られた成形性が仮定した初期不整に強く依存することである。

Majlessi ら¹⁹⁾は、Hill³⁰⁾の垂直異方性を有する薄板を考え流れ応力には、

$$\bar{\sigma} = \sigma_0(\bar{\epsilon}_0 + \bar{\epsilon})^n \bar{\dot{\epsilon}}^m - c\bar{\epsilon}_{,ii} \quad (35)$$

の形式のひずみ勾配項を導入した構成式を用いて、MK理論によりFLDを求めた。式(35)で、 σ_0 、 $\bar{\epsilon}_0$ 、 n 、 m 、 c は材料定数である。解析条件として、図2(a)に示すように、薄板の面内に x 、 y 軸を、それに垂直に z 軸をとり、ひずみ比 $\beta = \epsilon_2/\epsilon_1 = 0.1$ 、 $n = 0.245$ 、 $\sigma_0 = 186.5\text{MPa}$ 、 $\bar{\epsilon}_0 = 0.01$ 、垂直異方性パラメータ $R = 1.2$ 、 $h_{A0} = 1.0\text{mm}$ 、 $c = 0.10$ ならびに、初期板 h_{Bi} と初期不整係数 f を与えている。

$$\begin{aligned} h_{Bi} &= \frac{h_{A0} + h_{B0}}{2} + \left(\frac{h_{A0} - h_{B0}}{2} \right) \cos \left[\left(1 + \frac{x_i}{\omega_0} \right) \pi \right] \\ f &= h_{B0}/h_{A0} \end{aligned} \quad (36)$$

ここで、 h_{B0} 、 h_{A0} は、それぞれ初期の不整中心での板厚と一様な領域における板厚を表す。図2(b)に、得られた限界ひずみと初期不整係数の関係を示している。図示のように、ひずみ勾配依存性材料の場合、小さい不整に対する限界ひずみの収束性はよい。これは、ひずみ勾配依存性はFLD評価において、一種の調整の役割をしていると見なすことが出来る。

5 有限要素法による不安定問題の解析

5.1 変形の局所化の寸法依存性評価

第3章において述べた有限要素法を用いて変形の局所

図2 限界ひずみと初期不整の関係¹⁹⁾
(a) 解析モデル, (b) 限界ひずみの初期不整依存性

図3 1次元変形の局所化のシミュレーション
(a) 解析モデル, (b) 3つの変形状態におけるせん断帯内のせん断ひずみの分布。破線は, Zbib と Aifantis¹⁵⁾ による解析結果, 実線はシミュレーション結果¹²⁾を表す。

化の寸法依存性を検討した研究を紹介しよう。なお、本節において示すシミュレーション結果は、ひずみ勾配項の評価を、増分変形直前の段階におけるひずみ値を用いて得られたものである。しかしながら、このようにして得られた結果は、非常に大きなひずみ勾配が存在する場合を除いて妥当なものであることを確認している。³⁴⁾

まずはじめに、図3(a)に示すせん断を受ける平面ひずみ状態にあるブロックの変形の局所化挙動を検討した結果を示す。¹²⁾この問題では、変形は方向にのみ変化する1次元問題として取り扱っている。図3(b)は、3つの変形段階におけるせん断ひずみの分布を示している。¹²⁾比較のために、Zbib と Aifantis¹⁵⁾による解析結果も合わせて示している。非常に変形が局所化した段階においても両者の対応はよい。ひずみ勾配を含まない構成式を用いた場合⁴⁹⁾のように、変形の局所化領域の幅が要素の大きさになるようなことはない。

図4 異なる大きさの平面ひずみブロックに生じる変形の局所化のシミュレーション²⁾
(a) 有限要素変形メッシュ形状と相当塑性ひずみ分布, (b) せん断帯内の相当塑性ひずみ分布, L はブロックの大きさ, $n, \bar{n}$ は、せん断帯に垂直な方向の座標とせん断帯中心の座標値

図5 粒子強化複合材のシミュレーションモデル

図4(a)は、寸法が異なる平面ひずみブロックに対して引張り変形を加えた場合に発生する変形の局所化のシミュレーション結果で、^{2), 12), 20), 35)}変形した有限要素メッシュと相当塑性ひずみ分布を示している。中央から変形の局所化が発生するように、初期形状不整を与えている。せん断帯のような変形の局所化は、材料の特性ならびに、

(a)

(b)

(c)

図6 複合材の応力-ひずみ関係²²⁾

(a) 強化材の体積分率依存性, (b) 強化材の粒子径依存性, (c) 強化材粒子の配置依存性 $\bar{\sigma} = P/L$, σ_{ys} は母材の降伏応力を表す。

高速変形の場合は熱の発生とその拡散によって決まる。変形が準静的に進行する場合、変形の局所化領域の大きさは、試料寸法に殆ど依存しないことが知られている。さらに、せん断帯内部の相当塑性ひずみの分布もほぼ等しくなっていることがわかる。この研究は、有限要素法を用いて、せん断帯内のひずみ分布を再現したはじめての研究として評価されている。³⁶⁾ 高速変形の場合、^{20), 21), 35)} 熱の発生とその拡散があるので、結果は図4に示すほど単純ではなく、局所化領域の発生位置は、試料寸法に大きく依存したものとなる。しかしながら、せん断帯の幅ならびに内部のひずみ分布等に付いては、図4と同様の傾向を示している。^{20), 21), 35)}

5・2 粒子強化複合材の変形挙動

強化材粒子の配置に周期性を仮定し、母材、強化材から成る基本単位領域を解析対象とし、母材の変形応答をひずみ勾配依存性/非依存性構成式で表し、強化材の体積含有率、粒子径、配置をパラメトリックに変更した場合の複合材の変形挙動をシミュレーションによって検討した結果を示す。²²⁾

強化材の体積含有率が6.25, 11.1, 25.0%の複合材を対象とし、強化材の粒子径は全て12.0 μm とした。図5にシミュレーションモデルを、図6(a)に、強化材の体積含有率を変化させた場合の、複合材の平均応力-ひずみ関係を示す。母材と強化材の剛性の差が著しいため変形のほとんどが母材領域で生じ、強化材の体積含有率が増加すると、母材領域の大きなひずみの発生に伴うひずみ勾配の増大により、ひずみ勾配項の影響がより顕著になり、その結果、変形抵抗の増加が著しくなる。ついで、体積含有率一定の下で粒子径の異なる複合材のシミュレーションを行い、その変形挙動を検討した結果を示す。図(b)は、強化材の体積含有率を25.0%とし、粒子径 d を変化させた場合の平均応力-ひずみ関係を示している。ひずみ勾配依存性がない材料では、粒子径によらず複合材の応力-ひずみ曲線は一致し、相当粘塑性ひずみの分布形は相似となる。²²⁾ 一方、ひずみ勾配依存性材料では、粒子径 d が小さいものほど変形抵抗が増大している。この場合も、粒子径が小さくなると、変形勾配の大きな領域が増大し、変形抵抗が増大する効果が確認され、実験結果⁴⁷⁾を再現できることを示している。最後に、図6(c)の挿入図に示す二つの配置パターンA, Bについてシミュレーションを行い、強化材配置が複合材の変形挙動に及ぼす影響を検討した結果を示す。強化材の体積含有率は25.0%, 強化材粒子径は12.0 μm である。相当塑性ひずみ分布²²⁾をみると、異種材界面近傍から生じた高変形域が結合した帯状の変形域が形成され、この領域の大きさが強化粒子の配置に強く依存し、それが複合材の変形抵抗差となって表れる。同様の研究が、Kroner,⁴⁸⁾ Hill,³⁷⁾の理論の枠組みの下で解析的に検討が加えられている。^{27), 38)}

6 あとがき

ひずみ勾配依存性構成式と対応する変分原理を示し、数値シミュレーションに用いられる有限要素法について説明を加えた。摂動解析を中心に、材料の一様変形から

生じる変形の局所化挙動の評価法、幾つかの具体的な問題への適用例を示した。さらに、有限要素法を用いた研究として、変形の局所化領域の寸法依存性ならびに粒子強化複合材の強化粒子寸法ならびに配置依存性強度の評価について言及した。本稿では、筆者の研究室で行なった研究を中心に紹介した。従って、多くの重要な研究を看過している可能性がある。また、特徴長さを導入した構成式を用いた、損傷を受けている材料に対する研究^{39)~41)}、金属間化合物の強度評価⁴²⁾、金属以外の材料に対する研究^{43), 44)}については言及していない。有限要素解析結果のメッシュ依存性との関連については、筆者の解説⁴⁵⁾、Fleck 他⁹⁾の研究に関連した、最近の研究については、Hwang と Inoue⁴⁶⁾の展望を参照されたい。

最後に、本稿でとりあげた研究に協力頂いた、中尾哲也、比護 剛、藤本岳洋君に感謝する。さらに、文部省科学研究費による援助に深く感謝する。

参 考 文 献

- 1) 富田佳宏, 材料, **39**, 833 (1990).
- 2) Y. Tomita, Appl. Mech. Rev., **46**, 171 (1994).
- 3) E. C. Aifantis, Trans. ASME, Eng. Mat. Tech., **106**, 326 (1984).
- 4) E. C. Aifantis, Int. J. Plasticity, **3**, 211 (1987).
- 5) A. Needleman, Trans. ASME, J. Appl. Mech., **56**, 1 (1989).
- 6) Z. P. Bazant, M. T. Kazemi, Int. J. Fract., **44**, 111 (1990).
- 7) K. Kroner, Int. J. Solids Struct., **3**, 731 (1967).
- 8) A. C. Eringen and D. G. B. Edelen, Int. J. Engng. Sci., **10**, 233 (1972).
- 9) N. A. Fleck, G. M. Muller, M. F. Ashby and J. W. Hutchinson, Acta Metall. Mater., **42**, 475 (1994).
- 10) M. F. Ashby, "Strengthening Methods in Crystals", A. Kelly and R. B. Nicholson eds., p.137 (1971) Elsevier, Amsterdam.
- 11) 長谷部忠司, 材料, **48**, 963 (1999).
- 12) Y. Tomita and T. Nakao, IUTAM Symposium, Finite Inelastic Deformations, Theory and Applications, D. Besdo and E. Stein eds., 19 (1991).
- 13) Y. Tomita, Theoretical and Applied Mechanics 1992, S. R. Bodner, J. Singer, A. Solan and Z. Hashin eds., 81 (1993) Elsevier Science Publishers B.V.
- 14) H. M. Zbib and E. C. Aifantis, Res. Mechanica, **23**, 261 (1988).
- 15) H. M. Zbib and E. C. Aifantis, Res. Mechanica, **23**, 279 (1988).
- 16) H. M. Zbib and E. C. Aifantis, Res. Mechanica, **23**, 293 (1988).
- 17) J. Huang, J. W. Sutherland and E. C. Aifantis, Proc. Plasticity 99, A. Khan ed., 353 (1999).
- 18) Z. Marciniak and K. Kuczynski, Int. J. Mech. Sci., **9**, 609 (1967).
- 19) A. Majlessi, Yu-Wei Wang and E. C. Aifantis, Proc. Plasticity 99, A. Khan ed., 381 (1999).
- 20) Y. Tomita and T. Higo, Int. J. Mech. Sci., **35**, 985 (1993).
- 21) Y. Tomita, Modelling Simul. Mater. Sci. Eng., **2**, 701 (1994).
- 22) 藤本岳洋, 富田佳宏, 日本機械学会論文集, A-64, 2694 (1998).
- 23) J. R. Rice, Theoretical and Applied Mechanics 1976, W. Koiter ed, 207 (1976).
- 24) 後藤 学, 塑性と加工, **27**, 25 (1986).
- 25) 富田佳宏, "数値弾塑性力学" (1990) 養賢堂.
- 26) H. B. Muhlhaus and E. C. Aifantis, Int. J. Solids Struct., **28**, 845 (1991).
- 27) H. M. Zbib, Materials Instabilities, Theory and Applications, R. C. Batra and H. M. Zbib eds, AMD-Vol.183/MD-Vol.50, ASME 19 (1994).
- 28) D. Dudzinski and A. Molinari, Int. J. Mech. Sci., **39**, 369 (1997).
- 29) R. Komanduri, T. A. Schroeder, J. Hazra, B. F. von Turkovich and D. G. Flom, Trans. ASME, J. Engng. Indst., **104**, 121 (1982).
- 30) R. Hill, J. Mech. Phys. Solids, **1**, 19 (1952).
- 31) S. Stören and J. R. Rice, J. Mech. Phys. Solids, **25**, 421 (1975).
- 32) 後藤 学, 機械の研究, **33**, 369, 497, 600 (1981).
- 33) 山口克彦, 塑性と加工, **27**, 151 (1986).
- 34) Y. Tomita and T. Fujimoto, M. S. R. Int., **1**, 254 (1995).
- 35) Y. Tomita, JSME. Int. J., **38A**, 145 (1995).
- 36) E. C. Aifantis, Computational Material Modeling, A. K. Noor and A. Needleman eds, AD-Vol.42/PVP-Vol.294, ASME, 199 (1994).
- 37) R. Hill, J. Mech. Phys. Solids, **13**, 89 (1965).
- 38) H. T. Zhu, H. M. Zbib and E. C. Aifantis, AMD-Vol.202/MD-Vol.61, Micro. and Constitutive Modelling of Composite Mat. ASME, No.11, 103 (1995).
- 39) I. Vardoulakis and E. C. Aifantis, Acta Mechanica, **87**, 197 (1991).
- 40) R. de Borst, J. Pamin, R. H. J. Peerling and L. J. Sluys, Comp. Mech., **17**, 130 (1995).
- 41) V. Tvergaard and A. Needleman, Int. J. Solids. Struct., **32**, 1063 (1995).
- 42) F. T. Meisssonier, E. P. Busso and N. P. O'Dowd, Proc. Plasticity 99, A. Khan ed., 181 (1999).
- 43) H. M. Zbib and E. C. Aifantis, Appl. Mech. Rev., ASME, **42**, 295 (1989).
- 44) F. Oka, A. Yashima, T. Adachi and E. C. Aifantis, Applied Mechanics Review, ASME, **45**, 140 (1992).
- 45) 富田佳宏, 塑性と加工, **36**, 2 (1995).
- 46) K. C. Hwang and T. Inoue, MSR. Int., **4**, 227 (1998).
- 47) 牛込 進, 山本君二, 副田知美, 鉄と鋼, **75**, 1549 (1989).
- 48) E. M. Kroner, Acta Metall., **9**, 155 (1961).
- 49) Y. Tomita, A. Shindo and T. Sasayama, Int. J. Mech. Sci., **32**, 613 (1990).