種々の階層における塑性理論の発展

2. 結晶塑性論とその応用[†]

高橋 寛*

Recent Advances and Multi-Hierarchical Perspectives in Plasticity Theory

II : Crystal Plasticity and Its Applications

by

Key words : Crystal plasticity, Finite element polycrystal model, Plastic anisotropy, Bauschinger effect, Latent hardening, Multiple slip work hardening

1 ま え が き

従来の連続体塑性論は、降伏曲面の存在を前提に塑性ポテンシャル理論として体系化されてきた。塑性ひずみ増分の方向は最大塑性仕事の原理から降伏曲面に垂直外向きとして与えられ、その大きさは加工硬化則から決まる。すなわち降伏曲面の大きさおよび形状変化が分かれば、その材料の構成方程式が得られる。このため降伏曲面を求めるための膨大な実験的・理論的研究がなされたが、特に次の問題が課題とされてきた。

(1) 異方性材料の降伏条件の定式化

圧延板などの繊維組織による異方性は、プレス加工における成形性評価の重要な因子である。このため現在でもなお様々な異方性降伏条件式の提案が続いている。どのような関数を採用しようと、それに含まれるパラメータの数が多ければ実験と合わせることは可能であるが、パラメータ決定のための材料試験が困難となる。

(2) 後続降伏条件の定式化

等方性材料だとしてもひずみ履歴によって降伏曲面は変化する。これはバウシinger効果とか交差効果など、加工硬化の応力空間における異方性のためである。通常等方硬化と移動硬化の組み合わせで表現することが多いが、このための新たなパラメータを導入すると、上記の実空間における塑性異方性パラメータとの識別ができない。

(3) 降伏曲面における角点

塑性座屈荷重の理論予測を実験値に一致させるために、塑性ひずみ増分方向の応力増分方向依存性を導入する必要がある。塑性ポテンシャル理論でこれを考慮するには、降伏曲面に角点の存在を仮定しなければならない。そこで角点を見つけるための困難な実験が重ねられたが、賛否両方の報告がなされている。

以上降伏条件の精緻化は様々な困難や矛盾に遭遇してきた。塑性ポテンシャル理論以外の理論も模索されたが

いずれも実験事実を理解する道具とはなり得なかった。そこで物理的な実験事実に基づく理論として、多結晶塑性論に関心が寄せられるようになった。考え方は古くから議論されてきたが、近年の計算機の進歩によりようやく現実的な問題に適用されるようになった。

多結晶モデルとは単結晶の性質を基に多結晶集合体の性質を予知しようとするものであるが、この場合次の二つの問題が課題である。

(1) 各結晶粒内の微視的応力場と、集合体全体の巨視的応力場をいかに関連づけるか。

(2) 単結晶の構成方程式をいかに与えるか。

この二つの問題について、これまでの流れと現在の状況を展望し、二、三の応用を紹介する。

2 多結晶モデル

2・1 これまでの多結晶理論

塑性変形が各結晶固有のすべり系によって生ずるものとする。一般に r 番目のすべり系において、すべり面単位法線ベクトルを $a_i^{(r)}$ 、すべり方向単位ベクトルを $b_j^{(r)}$ 、せん断ひずみ増分を $\dot{\gamma}^{(r)}$ とおく。微視的な塑性ひずみ増分は次のように表わされる。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \sum_r \dot{\gamma}^{(r)} C_{ij}^{(r)} \quad \text{where} \quad C_{ij}^{(r)} = \frac{1}{2} (a_i^{(r)} b_j^{(r)} + a_j^{(r)} b_i^{(r)}) \quad (1)$$

各結晶粒の微視的応力を σ_{ij} とおくと、せん断応力 τ は次式で与えられる。

$$\tau^{(r)} = C_{ij}^{(r)} \sigma_{ij} \quad (2)$$

各すべり系の降伏せん断応力を $k^{(r)}$ とおくと、降伏条件 (Schmid 則) は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \tau^{(r)} \dot{\gamma}^{(r)} &> 0 & \text{for } |\tau^{(r)}| &= k^{(r)} \\ \dot{\gamma}^{(r)} &= 0 & \text{for } |\tau^{(r)}| &< k^{(r)} \end{aligned} \quad (3)$$

Taylor¹⁾の等方硬化則、すなわち各すべり系の降伏せん断応力 $k^{(r)}$ は全て k に等しいと仮定すると、塑性仕事増分は次式で表わされる。

$$\dot{W}^p = \sum_r \tau^{(r)} \dot{\gamma}^{(r)} = k \dot{\Gamma} \quad \text{where} \quad \dot{\Gamma} = \sum_r |\dot{\gamma}^{(r)}| \quad (4)$$

[†] 原稿受理 平成 10 年 10 月 8 日 Received Oct. 8, 1998

* 正 会 員 山形大学工学部機械システム工学科 〒 992-0038 米沢市城南, Dept. of Mech. Systems Eng., Yamagata Univ., Jonan, Yonezawa, 992-0038

k が塑性仕事の関数であると仮定すると、同時にそれはせん断ひずみ Γ の関数でもある。すなわち

$$k = H(\Gamma) \quad (5)$$

ただし $H(\Gamma)$ は加工硬化関数である。

Taylor は、各結晶粒の塑性ひずみは全て巨視的な塑性ひずみ増分 $\dot{E}_{ij}^p$ に等しいと仮定した。この仮定は全くの直感からなされたものであるが、第一近似として現在まで広く受け入れられている。 $\dot{E}_{ij}^p$ が与えられたとして各すべり系の $\dot{\gamma}^{(p)}$ をいかに定めるかを考える。式 (1) より

$$\sum_r C_{ij}^{(r)} \dot{\gamma}^{(p)} = \dot{E}_{ij}^p \quad (6)$$

体積一定の条件があるので、上式は5個の独立な条件を与える。FCC 金属の場合12個のすべり系があるので上式を満たすすべり系の組み合わせはかならず存在するが、それをどう見い出すが問題である。Taylor は仕事が最小になるすべりが実現されると考え、次の最小すべりの原理を提案した。

“式 (6) の条件の下で、塑性仕事増分すなわち式 (4) のせん断ひずみ増分和 $\dot{\Gamma}$ を最小とするすべり系の組み合わせが実際に実現する。”

Bishop and Hill²⁾ は単結晶の降伏条件を基に、最小すべりの原理を理論的に導入した。同時に次式で表わされる最大塑性仕事の原理を証明した。

$$(\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^*) \dot{E}_{ij}^p \geq 0 \quad (7)$$

これを基に、Taylor のひずみ一定の仮定に理論的根拠を与えた。Bishop and Hill は FCC 多結晶の降伏曲面を理論的に求め、Tresca と Mises の中間の曲面を得た。

負荷の初期とか応力方向が急変する場合、または六方晶のようにすべり系の少ない金属の場合、塑性状態の結晶粒と、弾性状態の結晶粒が共存することになる。このような問題には次の弾塑性多結晶理論が必要となる。

初めに登場したのが、Eshelby³⁾ の介在物理論を応用したセルフコンシステントモデルである。多結晶の巨視的応力増分を $\dot{S}_{ij}$ とおくと、微視的応力場は次式で与えられる。

$$\dot{\sigma}_{ij} - \dot{S}_{ij} = -2G(1-\beta)(\dot{e}_{ij}^p - \dot{E}_{ij}^p) \quad (8)$$

ただし $\beta = \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)}$ 、 $\overline{\dot{e}_{ij}^p} = \dot{E}_{ij}^p$ とすると上式から $\overline{\dot{\sigma}_{ij}} = \dot{S}_{ij}$ が自動的に成立するので、Self-Consistent の条件を満たすと言われる。これは初め Kroner⁴⁾ によって提案され、Budiansky and Wu⁵⁾ によって具体的な計算が行われたことから通常 KBW モデルと呼ばれている。FCC 非硬化材単純引張り・単純ねじりの応力ひずみ曲線が計算され、いずれもひずみが大きくなるにつれ応力は一定値に漸近した。

$$\sigma_{\max}/2k = 1.536, \quad \tau_{\max}/k = 1.658. \quad (9)$$

これは Bishop and Hill の剛塑性理論における降伏応力の計算結果に完全に一致した。

しかし Hill⁶⁾ は KBW モデルは考えている結晶粒の周囲の媒質が弾性体の時のみ成立する式であると批判し、弾性定数の代わりに応力ひずみ曲線の接線係数を用いるモデルを提案した。Hutchinson⁷⁾ がこれに基づいて FCC

単純引張りの計算を行った。図3から分かるように流動応力は式(9)とくらべかなり低い。Hill モデルは周囲の媒質全体を一樣な塑性負荷状態と仮定しており、応力の下限を与えるものと考えられる。

問題は KBW モデル式 (8) において剛塑性近似 ($G \rightarrow \infty$) をすると、 $\dot{e}_{ij}^p \rightarrow \dot{E}_{ij}^p$ すなわち Taylor モデルに一致し、剛体粒子を含むような問題には適用できないことである。そこで複数の結晶粒が同時に塑性変形する多結晶体の問題を、改めて Eshelby の変態問題の考え方にしながら解いてみる。観察点 x を含む結晶粒を $m = 0$ 、荷重点 x' を含む周囲の結晶粒を $m = 1, 2, 3, \dots$ と表わすと、微視的応力場は次式で表わされる。

$$\dot{\sigma}_{ij} - \dot{S}_{ij} = -2G(1-\beta)(\dot{e}_{ij}^p - \dot{E}_{ij}^p) + \dot{S}_{ij} \quad (10)$$

ただし

$$\dot{S}_{ij}(x) = 2G \sum_{m=1}^{\infty} \left(\dot{e}_{kl}^{(m)} - \dot{E}_{kl}^p \right) \int_{a_m} \phi_{ijk}(x, x') n'_l dA'$$

$$\phi_{ijk} = \frac{(1-2\nu)(\delta_{ij}q_k - \delta_{kj}q_i - \delta_{ki}q_j) - 3q_iq_jq_k}{8\pi(1-\nu)r^2}$$

$$q_i = (x_i - x'_i)/r, \quad r^2 = \sum_i (x_i - x'_i)^2$$

この式は初め Lin⁸⁾ が熱応力解析における Duhamel のアナロジー法を用いて導入し、高橋⁹⁾ が Eshelby の考え方にしながら再導入したものである。

さて式 (10) で $G \rightarrow \infty$ とするとひずみ偏差 $\Delta \dot{e}_{kl}^{(m)} = \dot{e}_{kl}^{(m)} - \dot{E}_{kl}^p$ に関する連立方程式が得られる。もしこの係数行列が正則であると、ひずみ偏差はすべて0となり、やはり Taylor モデルに帰着する。しかし固有値解析を行ったところ正値半定符号で正則ではないことが分かった。したがって Lin - 高橋の式は剛体粒子を含む問題にも適用できるが、係数マトリックスに特異性を含むため、各すべり系のすべりの決定に際し、0/0 の不定形に悩まされることがある。

2・2 有限要素多結晶モデル

有限要素法 FEM における分割要素を結晶粒一個または結晶粒群とみなす考えかたを有限要素多結晶モデル FEPM (Finite Element Polycrystal Model) という。これによればどのような不均一変形でも結晶粒界における力と変位の連続を正しく保証することができる。また任意の境界条件に対応できる。

塑性変形の解析は、全体の変形過程を何段階かに分割し、各変形段階毎に FEM を適用する。いま現在の時刻 t^1 における座標 x_i^1 (または変位 u_i^1)、応力 σ_{ij}^1 が分かっているとして、次の時刻 $t = t^1 + \Delta t$ における座標 $x_i = x_i^1 + \dot{u}_i$ 、応力 $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^1 + \dot{\sigma}_{ij}$ を求めるものとする。FEM の定式化には時刻 t の未知の座標 x_i に基づく方法をとることとする。

一つの要素においてひずみ増分 $\dot{\epsilon}$ と節点変位増分 $\dot{u}$ が次の様にマトリックス表現できるものとする。

$$\dot{\epsilon} = B \dot{u} \quad (11)$$

Almansi ひずみが用いられているために、 B マトリックスは変形後の座標 x_i で評価されなければならない。しかし不安定問題以外の普通の問題では、各変形段階の初め

に $\mathbf{B}$ を更新 up-date すれば、各変形ステップ内では一定と仮定して十分と思われる。

Hooke の法則をマトリックスで表現する。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) + \boldsymbol{\sigma}^1 \quad (12)$$

ただし $\boldsymbol{\sigma}^1$ は一段階前の応力である。

仮想仕事の原理より次の剛性方程式を得る。

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^p \quad (13)$$

ただし $\mathbf{F}$ は節点力、

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \mathbf{F}^p = \int \mathbf{B}^T (\mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \boldsymbol{\sigma}^1) dV$$

剛性マトリックス $\mathbf{K}$ は形式上弾性と同じものなので、塑性ひずみなどによる仮想外力 $\mathbf{F}^p$ を与えれば弾性解析と全く同じように取り扱うことができる。

各すべり系のせん断ひずみ増分 $\dot{\gamma}^{(r)}$ を決定する条件は、式 (3) の降伏条件である。しかしこれには未知量 $\dot{\gamma}^{(r)}$ が陽には表われていない。特に活動すべり系の組み合わせが事前に分かっていないので、 $\dot{\gamma}^{(r)}$ の決定はかなり困難な問題と考えられてきた。ここでは実際の現象を忠実に再現する方法として、逐次累積法を提案する。

初め負荷増分が一気にかけられたとすると、材料はまず弾性的に応答するはずである。すなわち活動すべり系のせん断応力は降伏応力を越え、これが駆動力となって転位が動き始める。結晶粒が一個でも塑性変形すると、集合体全体の力のバランスが変化し塑性変形を起こした結晶粒の応力は弛緩する。一方降伏せん断応力は加工硬化によって上昇する。変形抵抗の上昇と負荷応力の減少がバランスしたところで、そのすべり系の活動がやむ。

以上の現象を数値的に再現するために、全てのすべり系に対して、一斉に次の繰り返し計算を適用する。

$$x_{(i)}^{(n)} = x_{(i-1)}^{(n)} + (\zeta^{(n)} \tau^{(n)} - k^{(n)}) \Delta \rho / (2G) \quad (14)$$

ただし $\zeta^{(n)} = \text{sign}(\tau^{(n)})$, $x_{(i)}^{(n)} = \zeta^{(n)} \dot{\gamma}^{(n)}$, $\Delta \rho$ は繰り返し計算のステップ幅である。初期値 $x_{(i)}^{(0)} = 0$ とする。繰り返し度に仮想外力 $\mathbf{F}^p$ を更新し剛性方程式を解く。したがって $\tau^{(n)}$ は逐次更新される。ここで次の累積条件を課す。“繰り返しの途中で $x^{(n)} < 0$ が発生したらそのすべり系については $x^{(n)} = 0$ とおいて、全体の繰り返し計算を続行する。”

この累積条件は、 $x^{(n)}$ が正値あるいは 0 のいずれかに収束することを保証し、それぞれ活動 active、非活動 nonactive に対応する。したがって活動か非活動かの判断を事前に行う必要はなく、収束の結果としてそれが分かることになる。実際の計算の経験によれば、 $\Delta \rho$ を過大にとると発散するが $\Delta \rho = 0.5$ 程度で効率よく収束する。

本解法において各すべり系の降伏せん断応力には何ら制約がなく、例えばグラフで与えられていてもよい。このため多結晶金属の材料試験から、単結晶内の多重すべりにおける加工硬化則を探るツールとして、FEPM を利用することができる。

2・3 数値材料試験

様々な結晶方位を持つ N 個の立方体結晶粒が 1 ブロックを形成し、これと同じブロックが図 1 に示す様に 3 次元的に無限に積み重ねられた多結晶集合体を考える。

巨視的応力 S_{ij} ・ひずみ増分 $\dot{\epsilon}_{ij}$ スピン増分 $\dot{\Omega}_{ij}$ はそれぞ

図 1 多結晶モデル

図 2 非硬化 FCC 単純引張り応力ひずみ曲線

図 3 様々な多結晶モデルの比較

れ微視的応力 σ_{ij} ・ひずみ増分 $\dot{\epsilon}_{ij}$ ・スピン増分 $\dot{\omega}_{ij}$ の 1 ブロック内の平均として定義する。塑性仕事も同様に定義されるためには、ブロック境界において余分の仕事が消費されてはいけない。このため隣接ブロック間で変位が連続であることが望ましい。そこでブロック表面の境界条件として、巨視的ひずみを与える一様変位場 $\dot{U}_i$ を与えることにする。

$$\dot{U}_i = (\dot{\epsilon}_{ji} + \dot{\Omega}_{ji}) x_j \quad (15)$$

例題として z 方向の単純引張りを考える。 z 方向に変形が一樣として次の条件から巨視的スピンを決定する。

$$\frac{\partial \dot{U}}{\partial z} = \dot{\epsilon}_{zx} + \dot{\Omega}_{zx} = 0, \frac{\partial \dot{V}}{\partial z} = \dot{\epsilon}_{yz} - \dot{\Omega}_{yz} = 0, \dot{\Omega}_{xy} = 0.$$

(16)

時間ステップとして $\dot{E}_z = \dot{\epsilon}$ ($= 0.05\%$) を選ぶ。巨視的応力のうち S_z を除いてすべて 0 とする。

結晶粒数 216 について、非硬化 FCC 単純引張りの応力ひずみ関係を図 2 に示す。結晶方位を乱数で与えそのばらつきの様子。結晶粒数が多くなればばらつきも小さくなる。図 3 に他の多結晶モデルとの比較をしめす。

3 塑性異方性

3・1 結晶方位の決定

等方性材料ならば乱数を用いて結晶方位を一樣に与える。圧延板のように集合組織を持つ異方性材料の場合は X 線回折による極点図から結晶方位を決定する。一般に

は結晶粒方位分布関数 (CODF) を推定する方法が考えられているが、ここではより直接的な方法をのべる。

たとえば FCC 金属の場合 (111) 極点図はすべり面密度を表わしている。そこでステレオ投影の単位球の表面を等面積に分割し、面積要素毎に X 線強度の積分値 ΔI を求め、これが (111) 面の数に比例していると仮定する。多結晶モデルの結晶粒の数を N とすると、すべり面の数は $4N$ であるから、 ΔI の総和が $4N$ に対応するように各要素毎の ΔI を整数化する。アルミニウム圧延板の (111) 極点図を $N=216$ とし、離散化した例を図 4 に示す。

離散化された $4N$ 個の極点の任意の一点を一つの結晶粒のすべり面方位 $\vec{a}_1$ とし、採用する。残りのすべり面方位 $\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ も極点図のどこかに潜んでいるはずなので $\vec{a}_1$ のまわりに $\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ を回転しこれに最も近い 3 個の極点の組を探す。これが見つかった所で一個目の結晶方位が決まる。続いて上で用いられた 4 個の極点を削除し、残りの極点群から第 2 の結晶方位を定める。このようにして N 個の結晶粒の方位を決定する。多結晶モデルの結晶方位から再び極点図を再生した例を図 5 に示す。

3・2 圧延板の異方性

市販のアルミニウム圧延板 (板厚 2mm) の初期圧延方向から 0° 方向、 45° 方向、 90° 方向それぞれに圧下率 50% (板厚 1mm まで) の付加圧延を施し、三種類の異方性板を用意する。この異方性板から様々な方向の引張り試験片を切り出し、流動応力と r 値を調べる。

一方それぞれの異方性板の極点図から多結晶モデルの各結晶方位を定め、様々な方向の数値引張り試験を行なう。1 ブロックの結晶粒数は 216、降伏せん断力は一定とし、のびひずみ 1% まで計算する。計算に用いた極点図と r 値および流動応力の実験と計算の比較を図 6 に示す。

3・3 格子回転

変形による塑性異方性の進展を考える。弾性変形によるひずみとスピンを無視できるとすると、負荷状態における変形 ($\dot{\epsilon}_{ij}^e, \dot{\omega}_{ij}^e$) と除荷状態における変形 ($\dot{\epsilon}_{ij}^p, \dot{\omega}_{ij}^p$) とは、形状は全く同じはずである。しかし方位は食い違いかもしいない。そこで形状をたよりに剛体回転 $\dot{\omega}_{ij}^r$ を与えて両者の方位を一致させたとすると、これは次式で与えられる。

$$\dot{\omega}_{ij}^r = \dot{\omega}_{ij}^e - \dot{\omega}_{ij}^p \quad (17)$$

ただし塑性スピン $\dot{\omega}_{ij}^p$ は次式で定義される。

$$\dot{\omega}_{ij}^p = \sum_r W_{ij}^{(r)} \gamma^{(r)} \text{ where } W_{ij}^{(r)} = \frac{1}{2} (a_i^{(r)} b_j^{(r)} - a_j^{(r)} b_i^{(r)}) \quad (18)$$

剛体回転だとすると結晶格子も一緒に回転するはずなので、上式は格子回転を与える。これは Hosford¹⁰⁾ によ

図 4 極点図の離散化図

図 5 極点図の再生

図 6 付加圧延されたアルミニウム板の塑性異方性

図 7 アルミニウム圧延板の異方性発達予測

て数学的回転則と呼ばれている。

さて以上の格子回転則を用いてアルミニウム圧延板の異方性の進展を計算してみる。as-received 材の極点図 (図 4) を基に多結晶モデルの初期結晶方位を定める。次に数値的に 50% 圧延 (平面ひずみ圧縮) を施し、極点図の変化と r 値を求める。一例として 0° 方向圧延の場合を図 7 に示す。図 6 (a) の実験と比べると理論的予測はかなり強い異方性を与える。実験では異方性はある程度で頭打ちなるが、計算ではどこまでも異方性が進展する。

4 加工硬化則

多結晶体の応力ひずみ曲線を計算するには、その中の単結晶の加工硬化則が分かっているなければならない。多結晶体内の単結晶は、周囲の結晶粒と変位の連続を保ちながら変形するために、一般に 5 個以上のすべり系が必要である。すなわち多結晶体内の単結晶は常に多重すべ

りによって変形していると考えなければならない。

一般に実験的に観察されるのは結晶粒全体の応力・ひずみなので、多重すべりの場合仮に活動すべり系の組み合わせが分かっていたとしても、各すべり系ごとの k と γ をそれぞれ独立に定めるには条件不足である。このために多重すべりにおける加工硬化則を実験的に見出すのは非常に難しい。

Hosford¹¹⁾は単結晶の多重すべり変形を実現するために単結晶の平面ひずみ圧縮試験を行い、式(5)の等方硬化則が第一近似として正しいことを実証した。したがって焼鈍状態からの比例応力ひずみ曲線の予測にはTaylorの等方硬化則が有効である。

しかし加工硬化曲線はひずみ履歴に依存する。すなわちBauschinger効果やJackson and Basinski¹²⁾の潜在硬化などである。以下それぞれの現象毎にモデル化を試みる。

4・1 バウシンガー効果

一般にバウシンガー効果は、粒界などに堆積した転位からの逆応力で説明されることが多い(長範囲応力場説)。これが連続体塑性論の移動硬化則の物理的根拠となっている。しかしHasegawaら¹³⁾の電顕観察によれば予ひずみ時に転位のセル構造が形成され、逆応力負荷によってセル構造が消滅し、さらに逆方向の変形が進むと逆符号のセル構造が再成される。この場合仮に逆応力が存在したとしても、セル構造と共に消滅するはずで、逆応力が逆負荷を永久に助けるとは考えにくい。

長範囲応力場説によれば加工硬化は活動すべり系で最も大きくなるはずであるが、実際は潜在硬化で見られるように、活動していないすべり系の硬化の方がむしろ大きい。このため加工硬化の説明としては林立転位による短範囲応力場説の方が有力視されてきた。そこで林立転位に基づくバウシンガー効果の解釈を以下に試みる。

可動転位が林立転位を横切ってすべり面全体に広がる時、介在物とか林立転位が密集している部分は横切ることができず、オロワンループを残して通過する。変形が進むにつれオロワンループが累積し、その中心部には強い応力集中が起こる。この応力場が交差すべり系(二次すべり系)の転位を引き寄せ、それと反応して応力集中を緩和し、安定な転位網すなわちセル組織を形成する。一方引き寄せられた二次転位は、一次すべり系の林立転位として加工硬化の原因となる。予ひずみ時に蓄積されたオロワンループの中心部は、林立転位と反応して逆負荷においても消滅しない。一方外側の未反応オロワンループは逆負荷によって一旦消滅する。さらに逆負荷が続くと逆符号のオロワンループが堆積し、逆方向の応力集中が発達して加工硬化が再開する。

高橋ら¹⁴⁾はバウシンガー曲線には初め応力一定の遷移領域が存在し、その後は負荷曲線と同じように加工硬化することを見出した。この遷移領域はセル構造の消滅・再生に対応しているものと考えられる。この現象が園車のかみ合いにおけるバックラッシュに似ているので、“バックラッシュモデル”¹⁵⁾として以下に定式化する。

各すべり系において、加工硬化に有効なひずみ γ_a を考える。図8に示すように負荷の初めは γ_a はせん断ひずみ γ と共に増加するが、点Aで応力が反転されると、非硬化領域すなわちバックラッシュ領域 γ_b が出現する。

すべり系がこれまで経験した最大の加工硬化有効ひずみを $\dot{\gamma}_a$ とおき、 γ_b は $\dot{\gamma}_a$ の関数と仮定する。実験結果によれば $\gamma_b = \dot{\gamma}_a$ とおくことができる。バックラッシュ領域の midpoint を γ_c とおき、パラメータ $\xi = 2(\gamma - \gamma_c)/\gamma_b$ を用いてバックラッシュモデルを定式化する。

(1) $|\xi| = 1$ (加工硬化状態) :

$$\dot{\gamma}_a = |\dot{\gamma}| \quad \text{and} \quad \gamma_c = \gamma - \gamma_b \text{sign}(\tau)/2 \quad (19a)$$

(2) $|\xi| < 1$ (バックラッシュ領域) : γ_c は一定。

$$\dot{\gamma}_a = |\dot{\gamma}|(\xi \text{sign}(\tau) + \lambda)/(1 + \lambda) \quad (19b)$$

ただし

$$\lambda = 1 \quad \text{for} \quad \gamma_{a|\max} < \gamma_0$$

$$\lambda = 0 \quad \text{for} \quad \gamma_{a|\max} > \gamma_0 \quad \text{where} \quad \gamma_0 = 0.04$$

以上のモデルによってアルミニウム円管ねじり試験によるバウシンガー曲線の計算結果と実験の比較を図9に示す。

4・2 交差効果

例えばねじり予ひずみ後引張り負荷を与えるような交差負荷の場合、予ひずみ時に蓄積されたオロワンループは拘束・未拘束を問わず全て交差すべり系に対して林立転位として働く。このため新たに活動し始めた交差すべり系の降伏応力は一時的に上昇する。これが交差硬化または潜在硬化である。しかし加工硬化が再開するためには、新たに活動し始めた交差すべり系のオロワンループの蓄積が足りず、加工硬化の遅れが発生する。この交差遅れを導入するために以下の“最大林立転位モデル”¹⁵⁾

図8 硬化過程ダイアグラム

図9 バウシンガー曲線のシミュレーション

を提案する.

加工硬化有効ひずみ γ_a の共面すべり系の和を $\overline{\gamma_a^{(p)}}$ と表わす (p はすべり面を示す). 例えばすべり面 $p=1$ にとって $\gamma_a^{(2)}, \gamma_a^{(3)}, \gamma_a^{(4)}$ は林立転位密度を意味する. このうちの最大値がすべり面 $p=1$ の変形抵抗を支配すると仮定する.

$$k^{(p)} = H(\Gamma^{(p)}) \quad (20)$$

ここで例えば $\Gamma^{(1)}$ は $\overline{\gamma_a^{(2)}}, \overline{\gamma_a^{(3)}}, \overline{\gamma_a^{(4)}}$ の最大値である.

このように仮定すると $\Gamma^{(p)}$ の値が更新されるまで $k^{(p)}$ は一定に保たれ, 交差遅れが表現できる. 以上のモデルを組み込んで, ねじり予ひずみ後の単純引張りによる交差負荷曲線の計算結果と実験の比較を図 10 に示す.

5 塑性加工解析

実際の塑性加工解析に多結晶モデルを利用する際, 次の二つの方法が考えられる.

(1) 不均一な塑性変形の解析は従来の連続体塑性論を用いる. その解析の基となる構成方程式のパラメータの決定に多結晶モデルを利用する.

(2) 塑性変形解析に直接多結晶モデルを適用する. この際有限要素解析における分割要素をそれぞれ多結晶体とみなす考え方と, 一つの結晶粒とみなす考え方がある.

ここでは (2) の 1 要素 1 結晶粒の考え方をとる. 定式化は数値材料試験の場合と同じであるが, 境界条件は問題ごとに異なる.

5.1 押出加工¹⁶⁾

丸棒の押出加工を考える. 軸対称変形を想定し, 横断面の 1/6 扇形領域を計算領域とする. 中心付近と表面付近で同じ形状の要素となるように, 三角柱要素を用いる. 要素分割を図 11 に示す. 要素数 720, 節点数 588 である. 断面減少率 75%, ダイス角 45° である.

素材をダイス内に徐々に押し込む非定常解析を行う. しかし先端要素がダイス出口を出て十分離れれば, 定常状態とみなすことができる. そこで変形の完了した先頭要素一列を解析対象からはずし, その代わりに押し込み側に新しい未変形要素一列を追加する. このようにして変形終了後の要素から集合組織に関するデータを得る.

図 12 に素材中心部の集合組織の進展の様子を逆極点図で示す. すなわち基準ステレオ三角形内に押出方向を投影したものである. ダイス入口では等方的であった結晶組織が, $\langle 111 \rangle$, $\langle 100 \rangle$ 方向の二重繊維組織に進展す

図 11 押出加工解析の要素分割

図 12 繊維組織の発達

図 13 圧延による変形の様子

る様子がよく分かる.

5.2 圧延加工¹⁷⁾

計算例を図 13 に示す. 1/2 板厚方向に 5 分割, 板幅方向に 5 分割, ロール方向に 55 分割とし, 要素数 1375 である. 押出加工の場合と同様に, 変形の終了した要素列を削除し, 未変形要素列を追加する操作を行う. FCC 金属とし降伏応力は一定とする. 初期結晶方位は乱数で与える. 圧下率 50% である.

摩擦係数が大きくなるほど, 中心層と表面層の変形の不均一が激しい. 中央二つの三角印で挟まれた部分が無すべり領域を表わす. 摩擦係数が小さいとその領域が次第にせまくなり, $\mu = 0.1$ では一点となる. これが圧延の

図 10 交差負荷曲線のシミュレーション

図14 圧延による異方性

図15 深絞り加工のシミュレーション

初等解析における中立点である。

次に圧延後の集合組織を (111) 極点図として図14に示す。(a)が表面層、(b)が中心層である。中心が平面ひずみ圧縮、表面がせん断による組織となっている。

5・3 深絞り加工

直径 80～94mm、板厚 1mm のアルミニウム円板を、直径 40mm のポンチで深絞り加工する。材料の加工硬化特性は n 乗硬化則 で与える。ブランクの 半分を計算対象とし、円周方向に 32 分割、板厚方向 3 分割、半径方向にはブランク径に応じて 17～23 分割する。要素数は全体 1632～2208 である。面内分割一定のまま板厚方向分割だけを増やすと、ポンチ荷重が上昇する。座標は (x, y, z) デカルト座標を用い、式 (17) による格子回転を与える。

50% 0° 方向圧延板の極点図より結晶方位を定める。直径 80mm の計算結果を図15に示す。(a)は平面図、(b)は側内面図である。次第に耳が形成される過程が示されている。

6 あとがき

以上結晶塑性論のこれまでの歩みと二、三の応用例をを概観した。FCC 純金属に対してはおおよその骨格がで

きてきたように思われる。しかしまだまだ未完成であり例えば次のような重要な問題が未解決である。

(1) 格子回転則

式 (17) による格子回転則は実際よりも強い異方性集合組織を与える。この問題は以前から指摘され、原因が多結晶モデルにあるのか、あるいは格子回転則にあるのか、現在のところまだ分かっていない。

(2) 寸法効果

結晶粒の寸法が小さいほど、降伏応力が上がるという有名な Hall-Petch の式がある。本解説の多結晶モデルではこれを表現できない。

(3) FCC 金属集合組織

FCC 金属の圧延板集合組織には、純銅型 (Al, Cu, Ni) と黄銅型 (7-3 黄銅, 18-8 ステンレス鋼) の二種類存在することが知られている。これまでの多結晶モデルでは純銅型の組織しか予知できない。

(4) BCC 金属

すべり方向は $\langle 111 \rangle$ で一定であるが、すべり面は $\{110\}$, $\{112\}$, $\{123\}$ と不定である。それぞれの降伏せん断応力が共通なのか異なるのか、また加工硬化はどうなるのかなど未解決の問題が山積している。

以上金属学的に知られている現象を力学的にモデル化しようとする、無数の困難な問題に遭遇する。若き研究者の参加を切に願うものである。

参 考 文 献

- 1) G. I. Taylor, J. Inst. Metals, **62**, 307 (1938).
- 2) J. F. W. Bishop and R. Hill, Phil. Mag., **42**, 414 and 1298 (1951).
- 3) J. D. Eshelby, Proc. Roy. Soc. Lond., **A241**, 376 (1957).
- 4) E. Kroner, Acta Metall., **9**, 155 (1961).
- 5) B. Budiansky and T. T. Wu, Proc. 4th Congr. Appl. Mech., **2**, 1175 (1962).
- 6) R. Hill, J. Mech. Phys. Solids, **13**, 89 (1965).
- 7) J. W. Hutchinson, Proc. Roy. Soc. Lond., **A319**, 247 (1970).
- 8) T. H. Lin, Trans. ASME, J. Engng. Mater. Technol., **106**, 290 (1984).
- 9) H. Takahashi, Int. J. Plasticity, **4**, 231 (1988).
- 10) W. F. Hosford, Texture of Crystalline Solids, **2**, 175 (1977).
- 11) W. F. Hosford, Acta Metall., **14**, 1085 (1966).
- 12) P. J. Jackson and Z. S. Basinski, Canadian J. Physics, **45**, 707 (1967).
- 13) T. Hasegawa, T. Yakou and S. Karashima, Mater. Sci. Engng., **20**, 267 (1975).
- 14) H. Takahashi and I. Shiono, Int. J. Plasticity, **7**, 199 (1991).
- 15) H. Takahashi, K. Fujiwara and T. Nakagawa, Int. J. Plasticity, **14**, 489 (1998).
- 16) 本橋 元, 影沢豊彦, 高橋 寛, 土田 信, 日本機械学会論文集, **A-61**, 353 (1995).
- 17) 本橋 元, 高橋 寛, 土田 信, 塑性と加工, **37**, 201 (1996).