不規則き裂進展に対する確率場を用いた新しいモデル†

田 中 泰 明*

A New Probabilistic Model for Random Fatigue Crack Growth Based upon a Random Field

by

Hiroaki TANAKA*

A new probabilistic model describing the random fatigue crack growth is proposed based upon a spatially random differential equation driven by a random field. First, a basic equation to describe the random crack growth is formulated as a system of spatially random differential equations by modeling the random propagation resistance in the well-known Paris law as a homogeneous random field. The probability of failure against the fatigue crack growth is then formulated as a functional integral form by the use of its solution. Next, validity of the proposed model is quantitatively verified by comparing with statistical experimental data reported by Ichikawa et.al. Next, an importance sampling simulation scheme is constructed by the use of the Girsanov theorem to make an efficient estimation for the probability of failure. A numerical example is finally given, which shows that the proposed simulation scheme can give accurate estimation for extremely small probability of failure.

Key words : Fatigue crack growth, Random crack growth, Probabilistic model, Random field, Random differential equation, Monte Carlo simulation, Importance sampling method

1 緒 言

疲労き裂の不規則進展特性を把握することは、耐疲労信頼性を向上させる上で重要であり、とりわけ損傷許容の概念に基づいて設計された部材については、不規則成長の確率的性質を定量化することが最重要課題であると言っても過言ではない。このような背景の下に、疲労き裂の不規則成長の確率的性質を理論的に解明するための研究が活発に行われてきた。この中で現在最も広く用いられているのが、経験的に得られたき裂成長則中に不規則な要因が含まれると考える物理的確率モデルである。

市川らは一連の研究^{1)~4)}の中で、統計的疲労試験を通じてき裂成長の統計的性質を実験的に明らかとすると共に、周知の Paris 則に基づく物理的確率モデルを構築し、理論的側面からの考察を行ってきた。文献 2)~4)においては、Paris 則中のき裂進展抵抗が空間的にランダムな変動を行なうという基本的仮定の下に構築した確率モデルにより、実験データの統計的性質をうまく再現できることを示した。このモデルでは進展抵抗の空間的変動が離散的と想定されているが、実際の材料におけるそれは連続であると考えの方がより自然である。このような観点から、石川ら⁵⁾は進展抵抗の変動が連続的であるという仮定に立脚したモデルを提案した。このモデルにおいては、進展抵抗の変動は基本的には空間的に発生するものと想定されているが、基本方程式を通常的確率微分方程式のカテゴリーに納めるために、その空間的変動が、事前に推定される解の平均的挙動を通じて時間的

ランダム変動に置き換えられており、この仮定が入力雑音の性質を特定する上で一種の循環論法的な困難さを引き起こしている。

これらの問題点を解消するために、著者は文献 6), 7)において、市川らのモデルを連続変動の確率場に置き換え、さらに石川らのモデルで用いられている確率場を確率過程に変換するという手順を踏まないモデルのプロトタイプを提案した。類似のモデルは板垣ら⁸⁾によっても論じられており、き裂の成長の不規則な特性がき裂先端近傍の材料の微視的ランダム性によって引き起こされるという仮定に立脚する限りにおいては最も自然なモデルであると考えられる。しかしながら、文献 6)~8)においては、モデルに基づく破壊確率の推定に対して、近似解法あるいは直接的なシミュレーションによる解法のみが論じられており、極めて微小な破壊確率が要求される際に対処することが難しい。そこで本論文では、文献 6), 7)で導入したモデルを確率微分方程式の観点から再構成し、その統計的疲労試験データとの適合性を検証すると共に、著者が文献 9)で開発した時間依存型信頼性解析に適用可能な重点サンプリング法を用い、実用上重要となる極めて小さな破壊確率を取る時間領域での精度のよい推定スキームの開発を試みる。

2 モデルの基本概念

本論文では、中央貫通き裂あるいは縁き裂などの 2 次元き裂の、一定応力振幅の繰り返し負荷下での成長を対象とし、その時間変動は周知の Paris 則で記述されるも

† 原稿受理 平成 12 年 4 月 7 日 Received Apr. 7, 2000

* 正 会 員 京都大学情報学研究科複雑系科学専攻 〒606-8501 京都市左京区吉田本町, Dept. of Applied Analysis and Complex Dynamical Systems, Kyoto Univ., Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501

のとする。すなわち、

$$\frac{1}{a_r} \frac{da}{dn} = \varepsilon_0 \left(\frac{\Delta K}{\Delta K_0} \right)^m \quad (1)$$

ここで a はき裂長、 ε_0 は無次元化されたき裂進展抵抗、 ΔK は応力拡大係数の変動幅、 a_r および ΔK_0 はそれらの参照値である。応力拡大係数変動幅 ΔK が、負荷応力振幅 ΔS 、有限板幅補正 F_I 、および幾何因子 α を用いて、

$$\Delta K = \alpha \Delta S \sqrt{\pi a} F_I(a) \quad (2)$$

という形で与えられるものとする。解析の便宜上無次元き裂長 $X \equiv a/a_r$ を導入し、さらに

$$\Delta K_0 = \alpha \Delta S \sqrt{\pi a_r} \quad (3)$$

と設定すれば、式 (1) は次のように書き換えることができる。

$$\frac{dX}{dn} = \varepsilon_0 g(X), g(X) = \left\{ \sqrt{X} F_I(a_r X) \right\}^m \quad (4)$$

これまでの多くの研究における基本的な考え方は、式 (4) 中のき裂進展抵抗 ε_0 がランダムな特性を有すると考えるもので、これに基づく最も簡単なモデルでは ε_0 は確率変数と仮定され、¹⁾ より進んだモデルでは、それが時間的に不規則に変動する確率過程であると仮定されてきた。⁵⁾ しかしながら、材料の微視的構造の不規則性がき裂進展抵抗の不規則変動を引き起こすという考え方に立脚する限り、その変動はき裂先端の位置の関数として記述されたと仮定することが最も自然である。^{6), 7)} そのために、

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{C(X)} \quad (5)$$

なる形で無次元確率場 $C(X)$ を導入し、 ε は定数であるものとしておく。このとき、一般性を失うことなく $C(X)$ の平均を 1 に設定することができる。

式 (5) を式 (4) に代入し、スケーリングした時間変数 $t = \varepsilon n$ を用いると、次式を得る。

$$\frac{dX}{dt} = \frac{g(X)}{C(X)} \quad (6)$$

このモデリングの原型は板垣らの報告⁸⁾ に見られるが、そこではランダム化された進展則を確率微分方程式の一つとして認識する立場からの議論はなされていない。ここで注意しなければならないのは、この方程式を確率微分方程式として見た場合、文献 6) で著者が指摘したように、従属変数が外乱である確率場の位置を指定する変数を兼ねているという非常に特殊な確率微分方程式であり、その解の定義について慎重に対応しなければならないという点である。そのために、独立変数と従属変数を入れ替えた、

$$dT(X) = \frac{C(X)}{g(X)} dx \quad (7)$$

なる反転方程式を導入し、その解 $T(x)$ を用いて、

$$X(t) \equiv \inf_{x > x_0} \{T(x) > t\} \quad (8)$$

により式 (6) の解 $X(t)$ を定義するという手法を用いる。⁶⁾ ここで x_0 は初期き裂長であり、本論文では簡単のためこれは確定量であるものとする。

本論文では、次節で述べるように、進展抵抗の不規則変動を記述するために導入した確率場 $C(X)$ が確率 1 で負の値を取らない場合に議論を限定するため、式 (8) は

解 $T(x)$ の逆写像を用いて次のように表せることになる。

$$X(t) = T^{-1}(t) \quad (9)$$

3 不規則き裂成長を支配する基礎方程式

き裂を有する材料の巨視的な均一性が仮定できるものとすれば、確率場 $C(x)$ は一様(空間的に定常)と考えて構わない。さらに、その確率分布は対数正規分布でよく記述できるという報告^{1), 2)} に基づき、位置 x を固定することに $C(x)$ は対数正規分布に従うものと仮定する。一様な対数正規確率場の発生法としては種々の方法が考えられるが、本研究では、平均ゼロ、分散 σ_C^2 の一様な正規確率場 $C_0(x)$ からの点変換により発生させる方法を取る。すなわち、先に述べたように $C(x)$ の平均を 1 とできることから、

$$C(x) = \exp \left\{ C_0(x) - \frac{1}{2} \sigma_C^2 \right\} \quad (10)$$

このとき、 $C(x)$ の分散 σ_C^2 は、

$$\sigma_C^2 = \exp(\sigma_{C_0}^2) - 1 \quad (11)$$

で与えられる。

さらに、解析上の扱い易さと 6 節で述べる効率的シミュレーションスキームの構成を念頭に置いて、平均ゼロの一様な正規確率場 $C_0(x)$ は、空間的 Markov 性を有するものと仮定する。このとき、Doob の定理¹⁰⁾ により、 $C_0(x)$ の空間的共分散関数は次のような指数関数的減衰型、

$$E[C_0(x')C_0(x'+x)] = \sigma_{C_0}^2 \exp \left(-\frac{|x|}{L_C} \right) \quad (12)$$

となり、 $C_0(x)$ は次の確率微分方程式の解として与えられることになる。

$$dC_0(x) = -\frac{1}{L_C} C_0(x) dx + \sqrt{\frac{2\sigma_{C_0}^2}{L_C}} dB(x) \quad (13)$$

$$C_0(x_0) = \sigma_{C_0} N \quad (14)$$

ここで、 $B(x)$ は $B(x_0)$ を確率 1 で満たす Wiener 場、すなわち独立増分を持つ平均ゼロの正規確率場で、

$$E[B(x)B(x')] = \min(x, x') \quad (15)$$

を満たすものであり、 N は $B(x)$ とは独立な標準正規確率変数である。また、正定数 L_C は無次元化された相関距離である。

これらの仮定により、 $T(x)$ の空間変動を支配する確率微分方程式として次式を得る。

$$dT(x) = \frac{\exp \left\{ C_0(x) - \frac{1}{2} \sigma_C^2 \right\}}{g(x)} dx, T(x_0) = 0 \quad (16)$$

以上をまとめると、式 (13)、(14)、(16) を連立させた空間変動型の連立確率微分方程式が本提案モデルにおける不規則き裂成長を記述する基本方程式であり、通常の確率微分方程式における独立変数と従属変数の役割が逆となっていること、およびき裂進展過程をその解の逆関数により定めるところに特徴がある。

4 破壊確率の定式化

負荷応力振幅が確定的であるという条件の下に、き裂長 $X(t)$ が所与の限界長 $x_c (> x_0)$ に達したときに部材が破壊するものと仮定する。本論文ではき裂進展抵抗の不規則変動を表す確率場 $C(x)$ が負の値を取らないと仮定して

いることから、 $X(t) \geq x_c$ となることと $T(x_c) \leq t$ となることは同値となる。したがって、時刻 t までに破壊する確率を $p_f(t)$ と記すことにすれば、

$$p_f(t) = P(T(x_c) \leq t) \quad (17)$$

が成立する。

反転方程式 (16) を積分すると、

$$T(x_c) = \int_{x_0}^{x_c} \frac{\exp\left\{C_0(x) - \frac{1}{2}\sigma_{C_0}^2\right\}}{g(x)} dx \quad (18)$$

を得るので、 $C_0(x)$ の区間 $[x_0, x_c]$ での挙動が決まればそれに対応して $T(x_c)$ が定まることになる。ここで、区間 $[x_0, x_c]$ における Wiener 場 $B(x)$ の全挙動を、

$$\mathbf{B} = \{B(x); x_0 \leq x \leq x_c\} \quad (19)$$

と表すことにすれば、これは区間 $[x_0, x_c]$ で定義された実数値連続関数全体からなる関数空間(以下簡単のため $\mathcal{C}$ と記す)の要素となる。 $C_0(x)$ の挙動は、式 (13), (14) を通じて、 $\mathbf{B}$ および N により完全に決定されるので、結局 $T(x_c)$ がこれらにより完全に決定されることになる。この関係を次のような汎関数写像の形で表現しておく。

$$T(x_c) = \mathcal{H}[\mathbf{B}, N] \quad (20)$$

この写像の具体的な評価については、 $\mathbf{B}$ および N のサンプルを発生させるごとに式 (13), (16) を数值的に解くという手法を用いる。このような写像表現を用いると、式 (17) で与えられる破壊確率 $p_f(t)$ は、

$$p_f(t) = \int_{\mathcal{C} \times \mathbb{R}^1} U(t - \mathcal{H}[\mathbf{b}, n]) dP_B(\mathbf{b}) dP_N(n) \quad (21)$$

という汎関数積分形で形式的に表現することができる。ここで、 $U(\cdot)$ は単位ステップ関数、 P_B は空間 $\mathcal{C}$ 上に定義された Wiener 測度、 P_N は $\mathbb{R}^1$ 上に定義された標準 Gauss 測度である。

5 モデルの妥当性についての検討

ここでは、本論文で構築した確率モデルと実験データとの比較を行ない、本モデルの妥当性について検討する。用いるデータは、市川らにより報告されたアルミ合金 2024-T3 に対する統計的疲労試験データ^{1), 2)}である。このデータは、幅 70 [mm] の試験片に発生した中央貫通き裂に対する疲労試験を同一荷重条件 (応力振幅 59.4 [MPa], 応力比 0.2) 下で 30 本の試験片に対して行ない、その結果を統計的にまとめたものである。

初期き裂半長 a_0 から成長を開始したき裂が、所定のき裂半長 a まで達するのに要するサイクル数、いわゆる残存寿命を $n(a; a_0)$ と表す。本提案モデルに基づく、無次元き裂長 x_0 から x までの残存寿命を $T(x; x_0)$ と表すと、これは確率微分方程式 (16) の解であり、 $n(a; a_0)$ とは、

$$n(a; a_0) = \frac{1}{\varepsilon} T\left(\frac{a}{a_r}; \frac{a_0}{a_r}\right) \quad (22)$$

なる関係で結ばれることになる。これより、 $n(a; a_0)$ の変動係数 ($\eta_n(a; a_0)$ と記す) は $T(a/a_r; a_0/a_r)$ のそれに等しく、

$$\eta_n(a; a_0) = \frac{\sqrt{\text{Var}[T(a/a_r; a_0/a_r)]}}{\text{E}[T(a/a_r; a_0/a_r)]} \quad (23)$$

で与えられることがわかる。

式 (18) において $x_c = a/a_r$, $x_0 = a_0/a_r$ とし、式 (12) の

関係および式 (10) を用いると、

$$\text{E}\left[T\left(\frac{a}{a_r}; \frac{a_0}{a_r}\right)\right] = \int_{a_0/a_r}^{a/a_r} \frac{dx}{g(x)} \quad (24)$$

$$\text{Var}\left[T\left(\frac{a}{a_r}; \frac{a_0}{a_r}\right)\right] = \int_{a_0/a_r}^{a/a_r} \int_{a_0/a_r}^{a/a_r} \frac{\exp(\sigma_{C_0}^2 e^{-|x-x'|/L_c}) - 1}{g(x)g(x')} dx dx' \quad (25)$$

が得られるので、これらを式 (23) に代入することにより変動係数 $\eta_n(a; a_0)$ を得ることができる。

Fig. 1 は、残存寿命 $n(a; 9.0)$ の変動係数の a 依存性について市川らのデータとの比較を行なったものである。図中△印は実験データ²⁾を、●印は、進展抵抗 $C(X)$ の変動係数を $\sigma_C = 0.25$ 、無次元相関距離を $L_C = 0.04$ と設定することにより式 (23) から得られる本モデルでの推定結果を示している。Paris 則のべき指数については $m = 2.939$ とし、¹⁾ 式 (2) 中の補正関数としては、試験片の板幅を W として、

$$F_I(a) = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a}{W}\right)} \quad (26)$$

なる関数形を用いてある。¹⁾ なお、本論文では式 (24) および式 (25) から推定される変動係数挙動が実験データによくフィットするように試行錯誤的に σ_C および L_C の値を決定するという手法を用いた。この結果から、 a の増加に伴って残存寿命の変動係数が徐々に小さくなっていき、ある一定値に収束していく傾向をよく再現していることがわかる。

次に Fig. 2 は、残存寿命 $n(23.0; 9.0)$ の確率分布関数について比較を行なったものであり、図中△印は実験データ¹⁾を、●印は上述のパラメータ設定に基づき本提案モデルより得られる推定結果を示している。ただし、図は対数正規確率紙と同等となるように両軸をスケールリングしており、図中の $\Phi^{-1}(\cdot)$ は標準正規分布関数の逆関数を表す。なお、本モデルによる分布関数の推定には、サンプル数 10000 のモンテカルロシミュレーションを用いており、パラメータ ε は実験データより得られている ε_0 の統計的性質と式 (5) から、 $C(X)$ の平均が 1 となるように定めてある。この結果から、変動係数だけでなく分布

Fig. 1. Coefficient of variation of the residual life.

Fig. 2. Probability distribution function of the residual life n (23.0; 9.0).

特性についても本モデルは実験データの特性をよく表しているといえ、疲労き裂の不規則成長を記述するモデルとして妥当であると考えられる。

6 重点サンプリング法による破壊確率の効率的評価

6.1 重点サンプリング法の基本原理

式 (21) を解析的な形で表現することは難しいことから、モンテカルロ法に代表される計算機シミュレーションの活用により数値的に評価する必要が生ずる。しかし、実用的には破壊確率 $p_f(t)$ が極めて微小な値を取ることが要求され、モンテカルロ法を単純に適用したのでは莫大なサンプル数が必要となるため、何らかの効率化手法を適用しなければならない。本研究では著者が文献⁹⁾で構築した時間依存系に対する重点サンプリングシミュレーションスキームを適用して効率化シミュレーションスキームを構成する。

重点サンプリング法とは、原確率測度とは異なる確率測度の下でサンプルを発生させることにより、原確率測度下では極めて希にしか発生しない破壊領域への到達サンプルを多く発生させることにより、シミュレーションの収束を速める方法である。このために、Wiener 測度 P_B および Gauss 測度 P_N とそれぞれ互いに絶対連続な確率測度 $\tilde{P}_B$ 、 $\tilde{P}_N$ を導入し、式 (21) を次のように変形する。

$$p_f(t) = \int_{C \times R^1} U(t - \mathcal{H}(\mathbf{b}, n)) \frac{dP_B(\mathbf{b})}{d\tilde{P}_B} \frac{dP_N(n)}{d\tilde{P}_N} \times d\tilde{P}_B(\mathbf{b}) d\tilde{P}_N(n) \quad (27)$$

ここで $dP_B/d\tilde{P}_B$ および $dP_N/d\tilde{P}_N$ は Radon-Nikodym 導関数である。式 (27) に基づくモンテカルロ法による破壊確率の推定値は、次式となる。

$$\hat{p}_f(t; J) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J U(t - \mathcal{H}(\mathbf{B}_{\tilde{P}_B}^{(j)}, N_{\tilde{P}_N}^{(j)})) \times \frac{dP_B(\mathbf{B}_{\tilde{P}_B}^{(j)})}{d\tilde{P}_B} \frac{dP_N(N_{\tilde{P}_N}^{(j)})}{d\tilde{P}_N} \quad (28)$$

ここで、 $\mathbf{B}_{\tilde{P}_B}^{(j)}$ 、 $N_{\tilde{P}_N}^{(j)}$ ($j = 1, \dots, K$) はそれぞれ確率測度 $\tilde{P}_B$ 、 $\tilde{P}_N$ に従って発生させた $\mathbf{B}$ 、 N の独立サンプル列である。

したがって、確率測度 $\tilde{P}_B$ 、 $\tilde{P}_N$ をうまく選定すること

により、破壊領域に到達するサンプルの発生頻度を高め、その重みを $dP_B/d\tilde{P}_B$ 、 $dP_N/d\tilde{P}_N$ により調整することにより極めて微小な破壊確率値の推定時の収束を速めることが可能となる。このように、変換された確率測度 $\tilde{P}_B$ 、 $\tilde{P}_N$ を重点サンプリング測度と呼ぶ。

6.2 重点サンプリング測度の選定

式 (28) で与えられるシミュレーションスキームを有効とするためには、 $dP_B/d\tilde{P}_B$ を陽に表現できるような確率測度 $\tilde{P}_B$ を選択しなければならない。そのために、Newton¹¹⁾に従って、適当な可積分性を有する関数 $u(x)$ を用いて、

$$\tilde{B}(x) = B(x) + \int_{x_0}^x u(\xi) d\xi \quad (29)$$

により $B(x)$ から $\tilde{B}(x)$ に変換し、変換された $\tilde{B}(x)$ が確率測度 $\tilde{P}_B$ 下で Wiener 場となるような測度 $\tilde{P}_B$ を選定する。このとき、Girsanov の定理¹²⁾により、 $dP_B/d\tilde{P}_B$ は次式で与えられる。

$$\frac{dP_B}{d\tilde{P}_B}(\mathbf{B}) = \exp \left\{ \int_{x_0}^{x_c} u(x) dB(x) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_c} u(x)^2 dx \right\} \quad (30)$$

同様に、

$$\tilde{N} = N + \gamma_0 \quad (31)$$

により N から $\tilde{N}$ に変換し、確率測度 $\tilde{P}_N$ 下で $\tilde{N}$ が標準正規確率変数となるように選定する。このとき、 $dP_N/d\tilde{P}_N$ は次式で与えられることは容易に示すことができる。

$$\frac{dP_N}{d\tilde{P}_N}(N) = \exp \left\{ \gamma_0 N + \frac{1}{2} \gamma_0^2 \right\} \quad (32)$$

式 (29)、式 (31) を式 (13) および式 (14) に代入すると、重点サンプリング測度下で $C_0(x)$ の空間変動を記述する確率微分方程式は次式のようになる。

$$dC_0(x) = - \left\{ \frac{1}{L_C} C_0(x) - \sqrt{\frac{2\sigma_{C_0}^2}{L_C}} u(x) \right\} dx + \sqrt{\frac{2\sigma_{C_0}^2}{L_C}} d\tilde{B}(x) \quad (33)$$

$$C_0(x_0) = \sigma_{C_0}(\tilde{N} - \gamma_0) \quad (34)$$

したがって、 $u(x)$ および γ_0 を正の量とすることによって $C_0(x)$ の平均的挙動が負の値に低減されるため、式 (16) の解である $T(x_c)$ が小さな値を取る確率が高まり、結果として破壊条件 $T(x_c) \leq t$ が成立する確率を高めることが可能となる。

6.3 最適制御量の選定法

次に、文献 9) で著者が提案した手法に基づいて、最適な $u(x)$ および γ_0 を導出する。まず、無限次元空間である関数空間を有限次元区間で近似するために、区間 $[x_0, x_c]$ 上に、

$$x_k = x_0 + k\Delta x \quad (\Delta x = \frac{x_c - x_0}{K}; k = 0, 1, \dots, K) \quad (35)$$

なるメッシュ点を設定し、Wiener 過程の増分列から

$$\Xi_k = \{B(x_k) - B(x_{k-1})\} / \sqrt{\Delta x} \quad (k = 1, \dots, K) \quad (36)$$

を導入する。このとき、 $\Xi_1, \dots, \Xi_K$ 、 N の張る空間は互いに独立な標準正規確率変数の空間となるので、これを標準空間と呼ぶ。

式 (16) に対して適当な離散近似スキームを適用するこ

とにより, $T(x_c)$ に対する離散近似式を標準空間上で表現したものを形式的に $T(x_c) = G(\Xi_1, \dots, \Xi_K, N)$ と表すことにすれば, 式 (17) により, 標準空間における破壊領域の境界曲面, いわゆる限界状態曲面は,

$$G(\Xi_1, \dots, \Xi_K, N) - t = 0 \quad (37)$$

で与えられる. この曲面上にあって, 原点からの最小距離を与える点は 1 次近似 2 次モーメント法¹³⁾ の設計点に他ならず, これを求める問題は式 (37) の拘束下で $N^2 + \sum_{k=1}^K \Xi_k^2$ を最小化することに帰着される.

一方, 式 (29) の上記離散スキーム下での表示が,

$$\tilde{\Xi}_K = \Xi_K + u(x_{K-1})\sqrt{\Delta x} \quad (k=1, \dots, K) \quad (38)$$

となることと, 式 (31) を考慮すると, 限界状態曲面の方程式は,

$$G(\tilde{\Xi}_1 - u(x_0)\sqrt{\Delta x}, \dots, \tilde{\Xi}_K - u(x_{K-1})\sqrt{\Delta x}, \tilde{N} - \gamma_0) - t = 0 \quad (39)$$

となる. この拘束下で設計点を求めるための最小化問題の解が, $\tilde{\Xi}_k = 0$ ($k=1, \dots, K$), $\tilde{N} = 0$ で得られるように $u(x)$ および γ_0 が選定されているならば, 重点サンプリング測度下では $\tilde{\Xi}_k$ および $\tilde{N}$ が平均ゼロとなることから, 重点サンプリングシミュレーション下ではおよそ 50% のサンプルが破壊領域に達することになる. このときシミュレーションが効率的となることが経験的に知られていることから,¹⁴⁾ この条件が満たされるような $u(x)$ および

γ_0 を最適な制御量であると考え.

以上の議論において, 離散近似スキームをもとの連続スキームに極限移行させると, 途中の計算過程は省略するが, 次のような条件付き変分問題を解くことに帰着される.

$$\text{minimize} \quad \gamma_0^2 + \int_{x_0}^{x_c} u(x)^2 dx \quad (40)$$

$$\text{subject to} \quad e^{-\sigma_c^2/2} \int_{x_0}^{x_c} \frac{e^{-\beta(x)}}{g(x)} dx - t = 0 \quad (41)$$

$$\beta(x) = \sigma_{c_0} e^{-(x-x_0)/L_c}$$

$$\times \left\{ \gamma_0 + \sqrt{\frac{2}{L_c}} \int_{x_0}^x e^{(\xi-x_0)/L_c} u(\xi) d\xi \right\} \quad (42)$$

この変分問題を陽に解くことは難しいため, 本論文では未知関数 $u(x)$ の関数形として,

$$u(x) = \begin{cases} \gamma_0 / \sqrt{2L_c} & (x_0 \leq x < x^*) \\ 0 & (x^* \leq x \leq x_c) \end{cases} \quad (43)$$

なる形に限定して考えることとする. もしも, $x^* - x_0$ が相関距離 L_c に比べて十分大きくなるように x^* が選定されていれば, 十分よい近似で,

$$u(x) = \begin{cases} \sigma_{c_0} \gamma_0 & (x_0 \leq x < x^*) \\ 0 & (x^* \leq x \leq x_c) \end{cases} \quad (44)$$

となる. したがって, 式 (43), (44) を式 (40), (41) に代入することにより得られる最小化問題を解くことにより, 最適な x^* , γ_0 が得られる.

6・4 数値例

ここでは以上の議論に基づいて構成した重点サンプリング法を実際に適用し, その有効性を確認する. Fig. 3 は重点サンプリングシミュレーションにより算出した破壊確率の推定値 $\hat{p}_f(t; N)$ をいくつかの t の値に対して対数プロットしたものである. ここでパラメータ値は前節での議論を参考として, $\sigma_c = 0.25$, $L_c = 0.25$, $m = 2.929$, $x_0 = 0.05$, $x_c = 1.0$ と設定し, 補正関数 F_I としては, $W/a_r = 2.5x_c$ として式 (26) を用いてある. また式 (13), (16) の数値解法としては, メッシュサイズ $\Delta x = 4.75 \times 10^{-4}$ の確率的 Euler 法を用いてある. 図中○印は重点サンプリング法による推定値を示し, 比較のため同じサンプル数で行なった直接モンテカルロ法の結果を×印で示してある. ここではサンプル数を $N = 1000$ としたシミュレーションを独立に 10 回行ない, その平均により推定値を導出し, その標準偏差の幅を図中エラーバーにより表示してある. この結果から, 確率が 10^{-6} を下回るような場合でも, 重点サンプリング法による推定での標準偏差幅は十分に小さくなっており, この程度のサンプル数でも十分よい精度が得られていると考えられる. これに対し, 直接サンプリング法では同程度のサンプル数では 10^{-3} 程度が推定限界であり, この例では $T < 4$ では推定値がゼロとなってしまっている.

Fig. 4 は Fig. 3 と同じパラメータ設定の下, 文献 7) において提案された Gauss 近似による結果との比較を示したものである. Gauss 近似とは, 相関距離が小さい場合に中心極限定理の効果により $T(x_c)$ の分布が正規分布で近似し得るとするもので, 何らかの理論的根拠を伴う

Fig. 3. Estimated probability of failure.

Fig. 4. Comparison with the Gaussian approximation.

解析的方法はこれ以外には得られておらず、また文献7)では、残存寿命分布の平均近傍ではよい近似が得られることが確認されている。図中○印は重点サンプリング法による推定結果を、実線は Gauss 近似による破壊確率の近似評価を表しているが、この結果から Gauss 近似は破壊確率が 10^{-2} 程度まではよい精度を与えるが、実用上重要となるそれよりもはるかに小さな破壊確率を与える時間領域では次第に精度が低下していくことがわかる。したがって、本研究で構築した重点サンプリング法の適用は、実用的観点から見ても必要不可欠であると言ってよいであろう。

7 結 言

本論文では、き裂進展抵抗の空間的不規則変動を連続確率場を用いて数学的にモデル化することにより、新しい不規則き裂進展モデルを提案し、その妥当性について実験データとの比較を通じて検討すると共に、きわめて微小な破壊確率値を効率的に推定することが可能な重点サンプリングシミュレーションスキームを構築した。得られた主な結果は以下の通りである。

- 本研究で提案する確率モデルにより、統計的疲労試験における残存寿命の確率的性質をよく再現することができることを明らかとした。
- 提案モデルにおける破壊確率の推定に対して、Girsanov の定理を活用した重点サンプリングシミュレーションスキームを構成し、極めて小さな破壊確率値を少ないサンプル数で精度よく推定し得ることを明らかとした。

本研究の遂行にあたり、京都大学大学院生古川昌彦氏より多大なる助力を得ましたことを記し、謝意を表します。また本研究の一部は文部省科学研究費（奨励研究(A) 11750057）の補助の下に行なわれたことを記し、併せて謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 市川昌弘, 浜口光夫, 中村武夫, 材料, **33**, 8 (1984).
- 2) 市川昌弘, 中村武夫, 材料, **34**, 321 (1985).
- 3) 市川昌弘, 秋田 敏, 材料, **35**, 1177 (1986).
- 4) 市川昌弘, 中村武夫, 材料, **35**, 1272 (1986).
- 5) 石川 浩, 鶴井 明, 日本機械学会論文集, A-50, 1309 (1986).
- 6) 田中泰明, 鶴井 明, 第 12 回材料・構造信頼性シンポジウム講演論文集, 113 (1993).
- 7) 田中泰明, 西島康則, 第 13 回材料・構造信頼性シンポジウム講演論文集, 20 (1994).
- 8) 板垣 浩, 石塚鐵夫, 黄 培彦, 日本造船学会論文誌, **165**, 253 (1990).
- 9) H. Tanaka, "Structural Safety and Reliability" (Proc. of ICOS-SAR '97), p.411 (1998) Balkema, Rotterdam.
- 10) J. L. Doob, *Annals of Math.*, **43**, 351 (1942).
- 11) J. Newton, *SIAM. Appl. Math.*, **54**, 1780 (1994).
- 12) I. V. Girsanov, *Theory Probab. Its Appl.*, **5**, 285 (1960).
- 13) 例えば, G. I. Schuëller (小西他訳), "構造物の安全性と信頼性" (1984) 丸善.
- 14) G. I. Schuëller and R. Stix, *Structural Safety*, **4**, 293 (1987).