微小ランダム応力振幅変動下におけるガス機器の疲労信頼性評価[†]

三 輪 昌 隆* 中 村 泰 久** 田 中 啓 介***

Fatigue Reliability Assessment of Gas Equipment under Randomly Fluctuating Stress Amplitude in Small Range

by

Masataka MIWA*, Yasuhisa NAKAMURA** and Keisuke TANAKA***

A new method is proposed to assess the fatigue reliability of gas equipment subjected to a load with a randomly fluctuating stress amplitude in a relatively small range. The Langevin equation for fatigue damage evolution was derived on the basis of the Palmgren-Miner's rule and the S-N diagram under constant amplitude loading. A stochastic partial differential equation, called the Fokker-Planck equation, for the evolution of the probability density function of cumulated fatigue damage was obtained from the Langevin equation. The probability density function of cumulated damage was expressed in a Gaussian distribution function. The mean of the remaining fatigue life can be evaluated on the basis of the concept of first passage time. The new method was applied to the fatigue data of an aluminum alloy subjected to a random loading. The scatter of the fatigue life can be obtained by introducing a magnification factor of the intensity of actual randomly fluctuating stress. The magnification factor corresponds to the degree of the contributions by factors other than the fluctuating load.

Key words : Fatigue, Random loading, Stochastic differential equation, Fokker-Planck equation, First passage time, Residual life, Miner rule, Equivalent fluctuating stress

1 緒 言

工業炉をはじめとする高温用のガス機器材料には、点検の時期や方法に関する共通の基準はなく、機器の用途に応じた対策が行われている。これらの機器は、高温や腐食など熱的・化学的に厳しい環境で使用されることが多く、全く同じ仕様の機器でも利用者によって機器に対する負荷が異なり、機器の被る損傷の蓄積速度や機器寿命比較的に大きなばらつきが生ずる。この問題に対処するためには、機器の部品の状態を詳細に監視する方法が考えられるが、センサーの動作環境や設置場所の制限、監視に要するコスト増加などの問題が生じるため、実用可能な技術がほとんどないのが現状である。特に、実働条件下のガス機器では、機器の操業スケジュールに伴う起動と停止の繰返しや、被加熱物等との熱伝達量のばらつきが生じ、材料には比較的に狭い範囲で熱応力などの負荷応力のピーク値がランダムに変動する微小ランダム応力振幅変動が加わる。このため、高温のガス機器開発では、実働条件下の負荷変動による損傷蓄積を評価することが可能な損傷評価技術の開発が必要とされている。

そこで、本研究では第1段階としてガス機器材料の寿命のばらつきの原因が、実働条件下で起るホワイトノイズで近似可能な微小ランダム応力振幅変動によるものと考え、この場合の損傷蓄積過程を確率過程として取り扱うことによってモデル化を行った。

材料の損傷過程を確率過程として取り扱う研究は過去にも行われており、それらはモデル化の方法により、およそ2つのグループに分類することができる。第1のグループは材料中のき裂の進展を確率過程として取り扱うもので、このグループはさらに、損傷発展のモデル中の不規則性の要因として、き裂進展抵抗を採用した研究^{1)~4)}、負荷応力の不規則性を採用した研究に分類することが可能である。⁵⁾これらは、不規則性の原因によらず基本的にクラック進展を表わす決定論的方程式であるParis則の一部に不規則性の源であるランダム項を取り入れ、確率微分方程式とすることによって損傷発展のモデルを構築している。しかしながら、生産現場で稼動するガス機器を構成する材料は形状が複雑であるほか詳細な測定が困難であることから、サイズや位置の明確なクラックを直接取り扱うのは困難である場合が多い。

第2のグループは、連続体損傷力学 (Continuum damage mechanics : CDM) の概念に基づくもので、⁶⁾負荷の変動や、マイクロクラックなどの発生による微視的な材料特性の時間的、空間的変動が、材料強度の巨視的な特性の変化に与える影響を定式化し、損傷の発展を記述する方法である。^{7)~9)}工学的応用の場面では、巨視的特性から定義が可能な損傷パラメータを取り扱うことから、有効な方法の一つであると考えられるが、適用例は少ないようである。

[†] 原稿受理 平成12年2月17日 Received Feb. 17, 2000

* 正 会 員 東邦ガス(株)基盤技術研究部 〒476-8501 東海市新宝町, Fundamental Research Dept., Toho Gas Co. Ltd., Shinpo-machi, Tokai, 476-8501

** 東邦ガス(株)基盤技術研究部 〒476-8501 東海市新宝町, Fundamental Research Dept., Toho Gas Co. Ltd., Shinpo-machi, Tokai, 476-8501

*** 正 会 員 名古屋大学大学院工学研究科機械工学専攻 〒464-8601 名古屋市中千種区不老町, Dept. of Mech. Eng., Nagoya Univ., Chikusa-ku, Nagoya, 464-8603

このような状況を踏まえ本報では、工業的な応用を基本とする立場から、CDM による方法に基づき、実用機器などの寿命評価に対して広く利用されているマイナー則¹⁰⁾をもとに負荷応力振幅のピーク値が十分に小さい幅でランダムに変動する場合に対する拡張を試みた。ここでは、マイナー則に基づく損傷蓄積過程をランジュバン方程式と相当する Fokker-Planck 方程式により表し、損傷蓄積量の確率密度関数 (Probability density function: PDF) の時間発展と材料の疲労寿命分布を解析した。

2 おもな記号

$f(p(t))$	: 蓄積損傷量の関数
$g(p, t p_b, t_b)$	: 蓄積損傷量の条件付き PDF
N_i	: i 番目の負荷応力に相当する破断繰返し回数
n	: 繰返し回数
$p(t)$	: 正規化した蓄積損傷量
p_b	: 初期損傷蓄積量
Q_σ	: 負荷応力変動強度
T	: 破断時間あるいは残存寿命
s, t	: 時間
t_b	: 実験開始時刻
Δt	: 負荷応力の繰返し時間間隔
$dW_\sigma(t)$	: ウィナー過程の増分
$\delta(t)$	: ディラックのデルタ関数
$\phi(\sigma)$	: 損傷係数
σ	: 負荷応力振幅
$\bar{\sigma}$	: 等価応力振幅変動
$\xi(t)$	: ノイズ
上付き添え字	
~	: 瞬時波形を表わす
—	: 時間平均値を表わす
'	: 変動分を表わす

その他の記号については、適宜説明を加える。

3 ランダム負荷に対するマイナー則

変動荷重下での寿命推定法として、一定振幅荷重下での S-N 曲線を基準とした線形損傷則であるマイナー則が多く用いられる。しかしながら、過去の研究の中ではマイナー則に合わない研究結果も報告されている。¹¹⁾ その原因として応力による損傷度曲線の相違および応力が変動することによる干渉効果などがある。この点に関して下河は、¹²⁾ 統計的平均としてマイナー則が成立するためには、(1) 損傷度曲線の乗り移り則が成立することと、(2) 損傷度曲線が損傷度の順序と応力によらないことが必要であるとしている。ここで、本解析の対象は、下河によって与えられた上述の2条件が満たされている材料であると仮定する。また、本解析では損傷度を見積もるために一定振幅荷重の S-N 曲線を使用する。

3.1 マイナー則に関するランジュバン方程式

ある材料に、等しい時間間隔 Δt 毎にランダムな応力振幅 σ_i を負荷する場合を考える。ここで、下付き添え字 i は、実験開始から起算した繰返し回数を表わす。実験を

開始してからある繰返し数 n における損傷蓄積量 p_n は、マイナー則に従って各負荷毎に材料に蓄積される損傷量を総和して

$$p_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{N_i} \quad (1)$$

と表せる。ここで N_i は、材料の一定応力振幅 σ_i による破断繰返し数である。ここで、S-N 曲線としてべき乗則

$$N_i = \frac{\sigma_i^m}{C} \quad (2)$$

を仮定する。上式中の m , C は材料定数である。負荷繰返し周波数を一定とすると、応力振幅 σ_i が一定時間間隔 Δt で負荷されることから、以下に示すように時間の次元で表わすことができる。

$$p_{n\Delta t} = \Delta t \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} \quad (3)$$

ここで、 $O_{n\Delta t}$ は $n\Delta t$ 秒後の損傷蓄積量を表し、 T_i は未損傷材料に対する一定応力振幅負荷時の残存寿命 $N_i\Delta t$ を表わす。上式においては、形式上 $1/T_i$ が単位時間当たりに材料が被る損傷量を表わす。そこで、ある応力振幅 σ で繰返し試験を行った時の単位時間当たりの損傷蓄積量を表わす関数

$$\phi(\sigma) = \frac{1}{T} \quad (4)$$

を定義してこれを損傷係数と呼び、損傷蓄積過程を決定付ける基本的な量とする。ここで時間の次元を用いた理由は、高温のガス機器の損傷は繰返し応力による疲労だけでなく、高温クリープも同時に進行していることがあるため、損傷を総合的に判断する際に時間で整理すると都合が良いからである。損傷係数を用いれば、ある時間間隔 dt に材料が受ける損傷量 dp を以下の式で表わすことができる。

$$dp = \phi(\sigma)dt \quad (5)$$

これが時間の経過に伴った損傷の発展を表わす力学方程式である。なお、本モデルの範囲内では、損傷蓄積量は実験開始からの経過時間と応力振幅値のみで決定されるので、以下の考察では任意の時刻の応力値を応力のピーク値の時間変化を表わす連続関数として取り扱う。概念を Fig. 1 に示した。

次に、損傷の力学方程式 (5) におけるランダムに変動する応力振幅の影響を調べる。以降、時間と共に変動する応力振幅を変動応力と呼び、その瞬時値を σ で表わす。ここでは、実働機械の定常運転時に、変動応力がある時間平均値周りでホワイトノイズで近似可能なランダムな変動をする場合を想定し、変動応力を時間平均値 $\bar{\sigma}(t)$ と確率的変動分 $\sigma'(t)$ に分解する。

$$\bar{\sigma}(t) = \bar{\sigma}(t) + \sigma'(t) \quad (6)$$

上式中の各項は、時間の関数である。解析対象の微小ランダム応力振幅変動は、式 (6) 右辺の確率的変動分の大きさが平均値に比べて十分に小さい場合

$$|\sigma'| \gg |\sigma| \quad (7)$$

である。さらに、確率的変動分を変動の強度を表わすパラメータ Q_σ と、ホワイトノイズ $\xi(t)$ により表わす。

$$\sigma'(t) = Q_\sigma \xi(t) \quad (8)$$

Fig. 1. Schematic of the pseudo random loading.

ここで、 $\xi(t)$ はガウス分布を有する変化の速い不規則な変動の数学的表現で、そのアンサンブル平均は $\langle \xi(t) \rangle = 0$ 、異なる時刻 $t \neq t'$ における値 $\xi(t)$ 、 $\xi(t')$ が統計的に独立で、自己相関関数がディラックのデルタ関数 $\delta(t)$ を用いて $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t-t')$ と表されるものである。すると、 σ は以下の性質をもつことになる。

(a) σ のアンサンブル平均は、

$$\langle \sigma' \rangle = 0. \quad (9)$$

(b) σ の自己相関関数は、

$$\langle \sigma'(t)\sigma'(t') \rangle = Q_\sigma^2 \delta(t-t') \quad (10)$$

(c) $\sigma(t)$ はガウス分布を示す。

損傷蓄積量を見積もるためには、変動応力の瞬時値 σ から $\phi(\sigma)$ を計算する必要があるが、実用上は変動応力を直接利用するのは困難である。そこで、以下に示すように、損傷係数 $\phi(\sigma)$ を σ 周りでテイラー展開し、変動応力の平均値と変動の強度から損傷係数を見積もる。

$$\phi(\sigma) = \phi(\bar{\sigma}) + \frac{\partial \phi(\bar{\sigma})}{\partial \sigma} (\sigma - \bar{\sigma}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(\bar{\sigma})}{\partial \sigma^2} (\sigma - \bar{\sigma})^2 \quad (11)$$

ところが、十分に小さい変動の条件(7)のもとでは、式(11)中の各項のオーダーがそれぞれ

$$\begin{aligned} O(\phi) &\sim \bar{\phi} \\ O\left(\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \sigma'\right) &\sim \bar{\phi} \cdot \frac{\sigma'}{\bar{\sigma}} \\ O\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma^2} \sigma'^2\right) &\sim \bar{\phi} \cdot \left(\frac{\sigma'}{\bar{\sigma}}\right)^2 \end{aligned}$$

となることから、高次の項が非常に小さくなると見積もられる。なお、 O は項のオーダーを表す。そこで、上式中の2次以上の微小項を無視して、

$$\phi(\sigma) = \phi(\bar{\sigma}) + \frac{\partial \phi(\bar{\sigma})}{\partial \sigma} \sigma' \quad (12)$$

により損傷係数を近似する。この式を式(5)に代入することにより、次式

$$dp = \bar{\phi} dt + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} Q_\sigma dW_\sigma \quad (13)$$

を得る。この式が、微小ランダム応力振幅変動の場合のマイナー則を表すランジュバン方程式である。上式中の $\bar{\phi}$ は $\phi(\bar{\sigma})$ を表し、 $dW_\sigma(t)$ は σ についての Wiener 過

程の増分である。なお、 dW_σ と ε の間には、 $dW_\sigma = \xi dt$ の関係がある。

式(13)の右辺の各項の係数は定数であるので簡単に積分することができ、次式のように $p(t)$ の発展式が得られる。

$$p(t) = p_b + \int_{t_b}^t \bar{\phi} dt + \int_{t_b}^t \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} Q_\sigma dW_\sigma. \quad (14)$$

ここで、 t_b は試験の開始時刻、 p_b は時刻 t_b の時点で既に材料に存在した初期損傷量を表す。この式は、いわば初期状態 (p_b, t_b) から始まる無数の疲労試験の結果を表すものである。ところが、実用上で必要となるのは時刻の時点で蓄積されている損傷の確率的期待値であるので、上式のアンサンブル平均 $\langle p \rangle$ を取ることで、平均値の発展を見積もる。

$$\langle p \rangle = p_b + \bar{\phi} t \quad (15)$$

この式から明らかなように、このモデルにおいては損傷の平均値の発展は、変動のない場合に通常の方法でマイナー則により計算される損傷の発展と一致する。更に、損傷蓄積量の変動の2乗偏差は、

$$\begin{aligned} &\langle [p(t) - \langle p(t) \rangle][p(s) - \langle p(s) \rangle] \rangle \\ &= \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} Q_\sigma \right)^2 \left\langle \int_{t_b}^t dW_\sigma \cdot \int_{t_b}^s dW_\sigma \right\rangle \\ &= \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} Q_\sigma \right)^2 (t - t_b) \end{aligned} \quad (16)$$

となる。従って、材料が損傷を受け始めてから破壊するまでの間の任意の時刻における損傷の分布は、S-N 曲線の勾配と変動強度、そして経過時間の平方根に比例した広がりを持つことになる。

3・2 Fokker-Planck 方程式

材料の損傷評価や寿命評価においては、ある時点で材料に蓄積される損傷の平均値や偏差だけでなく、損傷の PDF や確率分布が重要な役割を果たす。損傷の PDF は正規分布、対数正規分布、ワイブル分布などで整理するのが一般的であるが、応力振幅がランダムに変動する場合の分布は現在のところ明らかではない。ここでは、ランジュバン方程式(13)と等価な Fokker-Planck 方程式とその解である損傷の PDF を Gardiner に従って導出し¹³⁾、ランダムな応力変動が材料に負荷される条件のもとで、ある時刻に材料に蓄積される損傷量の PDF 形状の計算を行う。

今、ランダム変数である $p(t)$ の関数 $f(p(t))$ を導入し、微小な時間間隔 dt の間の関数 f の変化を次式

$$\begin{aligned} df(p(t)) &= f(p(t) + dp(t)) - f(p(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} [dp]^2 + L \end{aligned} \quad (17)$$

のように表す。高階の微分の微小な時間間隔 dt に比例した寄与を考慮に入れるため、 dp の2次の冪まで展開する。さらに、式(13)を代入して整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} df(p(t)) &= \left[\bar{\phi} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} Q_\sigma \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \right] dt + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial p} Q_\sigma dW_\sigma \end{aligned} \quad (18)$$

ここで, $(dt)^2 = 0$, $dt dW_\sigma = 0$, $(dW_\sigma)^2 = dt$ を使用した.
この式の両辺のアンサンブル平均をとると,

$$\frac{d}{dt} \langle f(p(t)) \rangle = \left\langle \bar{\phi} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} Q_\sigma \right)^2 \right\rangle \quad (19)$$

となる. ここでは, $\langle dW_\sigma \rangle = 0$ とした. 関数 $f(p(t))$ が, $t = t_b$ において初期値 $p = p_b$ で条件付けられた条件付確率密度関数 (以降, 条件付 PDF) $g(p, t | p_b, t_b)$ を持つと仮定して, $g(p, t | p_b, t_b)$ により式 (19) を再び表わすと以下のようなになる.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dp f(p(t)) \frac{\partial}{\partial t} g(p, t | p_b, t_b) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \left\{ \bar{\phi} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} Q_\sigma \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \right\} g(p, t | p_b, t_b) \end{aligned} \quad (20)$$

次に, $g(\pm\infty, t | p_b, t_b) = 0$, $\partial g(\pm\infty, t | p_b, t_b) / \partial p = 0$ を仮定してこの式を積分すると, 以下の偏微分方程式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g(p, t | p_b, t_b) &= -\bar{\phi} \frac{\partial}{\partial p} g(p, t | p_b, t_b) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} Q_\sigma \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} g(p, t | p_b, t_b) \end{aligned} \quad (21)$$

この式が, 微小ランダム応力振幅変動の場合のマイナー則に関する条件付 PDF の発展を表わす Fokker-Planck 方程式である.

上式中の各係数は定数であるため, 解析的に解くことが可能である. 初期値を (p_b, t_b) として上式を解くと, 最終的に次に示す正規分布型の条件付き PDF $g(p, t | p_b, t_b)$ が得られる.

$$\begin{aligned} g(p, t | p_b, t_b) &= \frac{1}{\left[2\pi \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} Q_\sigma \right)^2 (t - t_b) \right]^{1/2}} \times \\ &\exp \left\{ -\frac{\left[p - (p_b + \bar{\phi}(t - t_b)) \right]^2}{2 \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} Q_\sigma \right)^2 (t - t_b)} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

この式により, 初期損傷 (p_b, t_b) が存在する条件下で, 損傷を受け始めてから破壊に至るまでの間の任意の時刻における損傷蓄積量の確率密度分布, あるいは任意の損傷蓄積量に到達する時間の確率密度分布を見積もることが可能である. Fig. 2 に $(p_b, t_b) = (0, 0)$ の条件下で式 (22) から得られる分布形状の模式図を示す.

3・3 余寿命評価

Fokker-Planck 方程式に従って発展する損傷蓄積量分布から, 材料の残存寿命分布を見積もることができる. これは, First Passage Time と呼ばれるもので,¹³⁾ 本解析の場合, 未破壊の状態 $0 \leq p < 1$ にある損傷値が最も短期間に破壊の状態 $p = 1$ に到達するのに要する平均時間を意味する. この時間は Fokker-Planck 方程式から以下のように求められる.

$$T(p) = \frac{1-p}{\bar{\phi}} \frac{\left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} Q_\sigma \right)^2}{4\bar{\phi}^2} \times$$

Fig. 2. Schematic of the shape of the PDF.

$$\left\{ \exp \left(-\frac{\bar{\phi} p}{\left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} Q_\sigma \right)^2} \right) - \exp \left(-\frac{\bar{\phi}}{\left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \sigma} Q_\sigma \right)^2} \right) \right\} \quad (23)$$

ここで $T(p)$ は, ある時点での損傷蓄積量 p から予想される平均の残存寿命を表わす. 右辺第 1 項は, くり返し毎の応力値に変動がない場合に既存のマイナー則によって与えられる残存寿命値を表し, 第 2 項以降は残存寿命に与える変動の影響を表わす.

4 等価変動応力と寿命予測

材料寿命のばらつきの原因には, 材料のばらつきや荷重のパワースペクトル, 実験条件の誤差など, 非常に多くの要因が考えられる. 上記のモデルを実用上の問題に適用するには, こうしたばらつきの要因を検討する必要がある. 下河ら¹⁸⁾ は, アルミニウム合金板 2024-T3 の疲労寿命のばらつきを見積もるために, 寿命のばらつきの全ての因子を応力のばらつきに換算した換算応力の考え方を導入した. それをもとに, 実験条件や, 材料の不均一など人為的な面が寿命のばらつきの原因の大きな部分を占めることを明らかにしている.¹⁹⁾ ここでは, 下河らの換算応力の考え方に基づき, 微小ランダム応力振幅変動下で疲労寿命にばらつきを生ずる全ての要因を含んだ等価変動応力 $\hat{\sigma}$ を導入し, 既存の疲労寿命データに含まれるランダム応力振幅変動の要因の寄与度を検討した.

等価変動応力は, 式 (22) から計算される損傷蓄積量が破壊 ($p = 1$) の状態に到達する時間の確率分布

$$G(t) = \frac{\int_{-\infty}^t g(1, s | 0, 0) ds}{\int_{-\infty}^{\infty} g(1, s | 0, 0) ds} \quad (24)$$

に, 応力振幅変動以外の寿命分布のばらつきの要因を導入するための仮想の変動応力である. ここでは, その程度を等価変動応力と変動応力の強度の比

$$M = \hat{Q}_\sigma / Q_\sigma \quad (25)$$

で整理する. ここで, $\hat{Q}_\sigma$ は, 等価変動応力の強度である.

解析の対象としたのは、Jakoby らによって行われた航空機用アルミニウム合金 2024-T3 のランダム荷重による疲労寿命の分布に関するデータである。^{14)~16)} なお、この実験は微小ランダム応力振幅変動によるものでない他、航空機の離着陸を模擬するための荷重パターンがランダム荷重波形の一部に含まれるが、ランダム荷重と疲労寿命の関係をよく表している数少ないデータであるため、本モデルの適用を試みた。

Jakoby らの実験には切欠き材（中央楕円孔板、応力集中係数 $K_t = 3.1$ ）の試験片が使用されている。実験に用いたランダム荷重の特性は公称応力の平均応力値と最大応力値により表されており、それぞれ $\sigma_m = 124.6 \text{ MPa}$ 、 $\sigma_{\max} = 2.2\sigma_m$ である。式 (22) による寿命分布の計算の際には、損傷係数の微係数 $\partial \bar{\phi} / \partial \sigma$ を見積もるために疲労データが必要となるが、Jakoby らの論文には $K_t = 3.1$ の場合の疲労データが示されていないため、 $K_t = 3.1$ の場合に比較的に近い値を示す $K_t = 2.54$ の疲労データ¹⁷⁾ を使用した。Fig. 3 にその疲労データを○で示す。また、Fig. 4 には、Fig. 3 の疲労データにおいて負荷繰返し周波数を 1 Hz とした時の損傷係数を示した。図中の○は Fig. 3 の疲労寿命値の逆数に対応する損傷係数値であ

る。同時に、疲労データ間を直線近似して算出したの値を●で示した。なお、寿命分布の計算に必要な変動応力の平均値に関する損傷係数 $\bar{\phi}$ （式 (22) の分子）については、Jakoby らによる疲労寿命分布の平均値の逆数を採用した。これらの値は、 $K_t = 3.1$ と、 $K_t = 2.54$ から得られる $\bar{\phi}$ と $\partial \bar{\phi} / \partial \sigma$ の値の間に、実用的な範囲で問題となるような差が生じないとの判断に基づいて採用した。

Fig. 5 に、Jakoby によって得られたランダム応力振幅変動下でのアルミニウム合金 ($K_t = 3.1$) の疲労寿命分布と、 M 値による、式 (24) の分布形状の変化を示した。図中○は Jakoby らの実験結果を、 $M = 1$ で示した分布は Jakoby の疲労寿命分布に相当するパラメータ (p_b, t_b) = (0, 0)、 $Q_\sigma = 1.1\sigma_m$ 、 $\partial \bar{\phi} / \partial \sigma = 1.41239 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1} \cdot \text{MPa}^{-1}$ を用い、応力振幅変動の効果のみを考慮した場合を示している。実験結果と、 $M = 1$ によるモデル分布形状の差は、応力振幅変動以外の効果がモデルに含まれていないことによる。

応力振幅変動以外の効果のうち、材料の寿命分布形状に対する材料のばらつきの影響は、一定応力振幅下の疲労寿命分布のばらつきに相当する等価変動応力で表わすことができる。

ここでは、寿命分布形状をガウス分布と仮定し、一定応力振幅による寿命分布の標準偏差を Jakoby が実験で示した平均寿命の約 5% として等価変動応力を求めた。その結果が $M = 2.0$ で示した分布である。このモデルの範囲内では材料のばらつきは、 M 値換算で 2 倍の効果を持つと見積もられる。

次に、応力振幅変動とそれ以外の影響を全て含んだ Jakoby ら実験結果と式 (24) を適合させることにより M 値を求めた。同様の方法が、下河らが一定応力振幅の疲労寿命分布に対数正規分布を適合させることにより換算応力の分布を求める際にも行われており、本モデルの等価変動応力の算出にもこの方法を採用した。この実験結果からは、 M 値は 4.5 と見積もられた。図中 $M = 4.5$ の実線が疲労寿命分布を示す。この結果から、本モデルの範囲内では、ランダム応力振幅変動と材料のばらつきのみを考慮した場合に得た $M = 2$ と、実験結果から得た

Fig. 3. S-N curve for 2024-T4¹⁷⁾ ($K_t = 2.54$).

Fig. 4. Distributions of $\bar{\phi}$ and $\partial \bar{\phi} / \partial \sigma$.

Fig. 5. Fatigue life of 2024-T3 in random loading.

$M=4.5$ の差 $M=2.5$ は, それら以外の全て影響を表わすものとみなすことができる。

ここで, $M=4.5$ の場合の $\hat{\sigma}$ を式 (23) の σ に代入することによって, 任意の損傷蓄積量からの残存寿命の計算結果を Fig. 6 に示した。Jacoby らの実験が比較的長寿命を示す領域, すなわち損傷係数の微係数が小さい領域で行われていることから, 式 (23) の第 2 項以降の効果が第 1 項と比較して相対的に小さくなるため, 損傷蓄積量の増加に伴ない残存寿命が直線的に減少すると予測される。

なお, 一定応力振幅による S-N 曲線を介して換算応力分布や疲労寿命分布を見積もる下河らの方法は, 一定応力振幅下の材料寿命を検討する場合に有効な方法であるが, 損傷の時間的な発展は解析の対象としていない。一方, 本解析は, 実用機器に加わる応力に近い微小ランダム応力振幅変動下での疲労損傷の時間的な発展を解析の対象とする点に特徴がある。また, 実際の構造物の寿命のばらつきは多くの要因によって影響を受けるが, 一定応力振幅の疲労寿命分布とそれに対する等価変動応力を使用して, ランダム応力振幅変動と材料のばらつきに起因する寿命のばらつきをある程度理論的に見積もることが可能である。さらに厳密な見積りをするためには, 荷重のパワースペクトルの影響など, それ以外の要因のモデル化が必要である。

5 結 言

本研究で得られた結果をまとめると, 次のようになる。

(1) 高温のガス機器の実働条件下の負荷変動に対する損傷速度のばらつきを評価することを目的として, 連続体損傷力学の観点からホワイトノイズで近似可能な微小ランダム応力振幅変動に対するマイナー則を表わすランジュバン方程式を導出し, 損傷蓄積量の発展のモデルを

示した。

(2) ランジュバン方程式に相当する Fokker-Planck 方程式を導出し, これを解くことにより, 実験開始から破壊に至るまでの任意の時刻における損傷蓄積量の PDF を正規分布形で表した。

(3) Fokker-Planck 方程式に基づいて, 既に損傷を受けている材料の, 任意の損傷蓄積量からの残存寿命の予測式を求めた。

(4) 疲労寿命のばらつきを応力変動に換算した等価応力振幅変動の実働応力の変動に対する比率を用いて, 微小ランダム応力振幅変動以外の要因による寿命のばらつきの程度を見積もることができる。

最後に, 本研究を遂行するにあたり, 名古屋市立大学経済学部 三澤哲也助教授には大変有益なご助言を頂いた。ここに記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 伊原千秋, 三澤哲也, 材料, **34**, 86 (1985).
- 2) 伊原千秋, 三澤哲也, 材料, **35**, 86 (1986).
- 3) M. J. Newby, *Eng. Fract. Mech.*, **27**, 477 (1987).
- 4) 徳納久睦, 岡田貴之, 中川隆夫, 材料, **43**, 62 (1994).
- 5) L. M. Kachanov, "Introduction to Continuum Damage Mechanics", p.1(1986) Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht.
- 6) H. Tanaka and A. Tsurui, *Eng. Fract. Mech.*, **27**, 501 (1987).
- 7) C. W. Woo and D. L. Li, *Int. J. Solids Structures*, **29**, 2921 (1992).
- 8) X. X. Diao, *Theor. Appl. Fract. Mech.*, **22**, 29 (1995).
- 9) V. V. Silberschmidt, *Int. J. Damage Mech.*, **7**, 84 (1998).
- 10) M. A. Miner, *J. Appl. Mech.*, **12**, A159 (1945).
- 11) 材料強度確率モデル研究会編, "材料強度の統計的性質", p.138 (1992) 養賢堂.
- 12) 下河利行, 日本材料強度学会誌, **9**, 29 (1974).
- 13) C. W. Gardiner, "Handbook of Stochastic Methods", 2nd ed., p.80 (1985) Springer, Berlin, Heidelberg.
- 14) G. Jacoby, *Proc. Third Conference on Dimensioning Strength Calculations*, 81 (1968).
- 15) G. H. Jacoby, *ASTM Spec. Tech. Publ.*, **462**, 184 (1970).
- 16) G. H. Jacoby and H. Nowack, *ASTM Spec. Tech. Publ.*, **51**, 61 (1972).
- 17) 下河利行, 浜口泰正, 日本材料強度学会誌, **10**, 179 (1976).
- 18) 下河利行, 浜口泰正, 日本材料強度学会誌, **9**, 1 (1974).
- 19) 下河利行, 品質, **9**, 110 (1979).

Fig. 6. Predicted residual life of 2024-T3.