だ円形開口部をもつ平板とだ円形異種介在物の 接合時における初期寸法形状が内部応力に及ぼす影響†

黒瀬 雅詞* 鈴木 拓雄**
河原 功司*** 平島 健一****

Influence of Initial Size on Inner Stresses for Jointed Plate with Elliptical Opening and Elliptical Inclusion

by

Masashi KUROSE*, Takuo SUZUKI**, Koji KAWAHARA*** and Ken-ichi HIRASHIMA****

This paper estimates the internal stresses of two joined materials which have different initial size displacements. Material [I] is an infinite plate having an elliptical hole. Material [II] is an elliptical inclusion. They have a discrepancy between [I] and [II] of the elliptic boundary.

Furthermore, their materials have different mechanical properties. For continuous connection of both boundaries, we provide the boundary tractions and analyze them. The related report published by previous authors did not consider an initial size displacement of both materials boundaries and had several errors at derived formulas. In this paper we show correct results. Several numerical results are given by graphical representation.

Key words: Boundary value problem, Elliptic boundary, Contact problem, Dissimilar, Shrinkage, Joint stress

1 緒 言

異種材料の接合問題は機能性材料の登場や機械設計の進歩にともない、より過酷にかつ、精密な強度解析が求められてきている。これまで、接合問題は森口らの2次元弾性論¹⁾や Muskhelishvili²⁾をもとに、Bogy^{3), 4)}や Dundurs⁵⁾らが異種接合体端部の応力集中など、種々の問題について報告されている。^{6)~8)}最近では異方性材料にも拡張され、^{9), 10)}接触問題については3次元問題への発展も見られる。^{11)~13)}

その中には、食い違いをもつ接合問題として扱われているものも少なくない。^{5), 10)}矢田ら¹⁴⁾はだ円孔に関する理論解析をさらに拡張し、面内変形問題について、だ円形の空孔部を持つ平板とだ円平板を接合する場合に生じる内部応力を検討している。

しかしながら、矢田らの導いた式¹⁴⁾には、応力関数にミスがあり、誘導された定式に間違いがある。また、その式には、“食い違いの初期変位は基準の境界寸法に比して十分小さい”として、初期変位を無視している。

内部応力を工学的に適用する上では、初期の寸法精度を考慮して解析解を求めるべきであると考え、本論文では、正しい式を導くとともに、初期の寸法変位を含んだ定式化¹⁵⁾を行う。その導いた式より計算例を示し、初期変位の有無、あるいはその大小による影響について報告

する。さらに、接合応力に相当するだ円法線方向の合応力がどの程度変化するかについての数値計算例も示した。

2 理論解析

2・1 解析の手順

計算モデル (Fig. 1) を先に示す。これは矢田らが行った解析モデルと同一である。¹⁴⁾材料 [I] と [II] はだ円形孔を有する無限板とだ円形介在物をそれぞれ示している。2種類の材料が持つだ円形の長軸と短軸の交点を一致させるように配置する。その中心を原点 O として、長軸半径 a 、短軸半径 b の基準となるだ円 $C_0(x_0, y_0)$ を考える。両者の初期境界はこの基準だ円 C_0 とする。両者は異種材料とし、縦弾性係数、横弾性係数および、ポアソン比の力学的性質を所定の値を適用できるものとする。

Fig. 1. Elliptic boundaries of materials [I] and [II].

† 原稿受理 平成 13 年 6 月 27 日 Received June 27, 2001

* 正 会 員 群馬工業高等専門学校機械工学科 〒371-8530 前橋市鳥羽町, Dept. of Mech. Eng., Gunma Nat. Col. of Tech., Toriba-cho, Maebashi, 371-8530

** 金沢大学大学院 〒920-1164 金沢市角間町, Graduate Student, Kanazawa Univ., Kakuma-cho, Kanazawa, 920-1164

*** 群馬工業高等専門学校専攻科 〒371-8530 前橋市鳥羽町, Student of Advanced Course, Gunma Nat. Col. of Tech., Toriba-cho, Maebashi, 371-8530

**** 正 会 員 山梨大学工学部環境土木工学科 〒400-8511 甲府市武田, Dept. of Civil and Environmental Eng., Yamanashi Univ., Takeda, Kofu, 400-8511

この両材料を接合するには、まず、焼きばめに見られるような初期形状に寸法変位を与えることによって両者間に食い違いを持たせる。¹⁶⁾その後、一方の材料を他方の材料にはめ合わせた後、両材料の境界に表面力 q_x, q_y を働かせることによって接合させることになる。このときの接合の定義は、境界力が働き変位が連続となることである。

これをモデル図にあわせると以下ようになる。

すなわち、接合される前の基準となる初期のだ円形境界を C_0 とし、接合後の境界を C とする。接合するためには、通常上述のように、 C_0 からわずかな変位を与える。これにより、接合前の材料 [I] と [II] の境界形状はそれぞれ C_1' および C_2' の異なる寸法となる。この接合前における両者の境界寸法の差異 ($C_1' - C_2'$) が「食い違い (Discrepancy)」となる。その食い違いが「初期変位」である。その状態から、両者の境界上に座標方向へ一様な境界応力 (q_x, q_y) を働かせると、[I] の境界は C_1 になり、[II] の境界は C_2 になるものとする。各長軸半径と短軸半径はそれぞれ $\{(a+u_i), (b+v_i)\}$ ($i=1, 2$) となる。ここで、 C_1 と C_2 を一致させることが変位の連続を表すことになり、そのときの境界力が接合に必要な境界応力 (q_x, q_y) になる。

この境界応力を求めるためには、だ円孔を有する無限平板の変位を明示しなければならない。基準のだ円境界 $C_0(a, b)$ に対し、それぞれの領域の初期境界は前述の微小変形を考えると、材料 [I] は $C_1'(a+u_1', b+v_1')$ となり、材料 [II] は $C_2'(a+u_2', b+v_2')$ になる。詳細に示すと、Fig. 2 のようになり、 x 方向の食い違い比率 ε_x が発生し、 y 方向には ε_y が発生する。この食い違い比率から変位の式を導く。

上述のパラメータを用いて、境界条件が変位を連続とする境界値問題を解くことで、内部応力の定式化が行える。以下に理論式の誘導についての概略を示す。なお、式中の E_1, E_2, G_1, G_2 および ν_1, ν_2 は、それぞれ材料 [I], [II] の縦弾性係数、せん断弾性係数およびポアソン比である。変位の式の誘導には次の重ね合わせの手順で行う。

<段階①> 無限遠に q_x, q_y が作用するとき、孔のない仮想のだ円境界線 $C_0(x_0, y_0)$ での変位 $[u_0]_1, [v_0]_1$ を求める。

<段階②> 無限遠に q_x, q_y が作用し、かつ、だ円孔境界にも q_x, q_y が作用する場合の、だ円孔縁 $C_0(x_0, y_0)$ における変位 $[u_0]_1, [v_0]_1$ を求める。この変位は①で求めるものと同一になる。

Fig. 2. Detail of Fig. 1.

<段階③> 無限遠に q_x, q_y が作用し、だ円孔境界は自由で外力が作用しない場合の、だ円孔縁 $C_0(x_0, y_0)$ における変位 $[u_0]_2, [v_0]_2$ を求める。

<段階④> 無限遠で外力が作用せず、だ円孔境界に q_x, q_y が作用する場合の、だ円孔縁 $C_0(x_0, y_0)$ における変位 (u, v) が②-③より求まる。

2.2 変位の式の誘導

①から④の段階で求める式を以下に示す。なお、矢田ら¹⁴⁾が、Goursat の応力関数を用いて、だ円境界上の境界応力の解を示しているが、誤りがあるため、ここで訂正を示す。

複素応力関数は Airy の応力関数で表記する。一般の応力関数および変位は次式で表される。

$$F = \text{Re}[\bar{z}\phi(z) + \psi(z)] \quad (1)$$

$$u - iv = \frac{1}{2G} [\kappa\bar{\phi}(z) - \{\bar{z}\phi'(z) + \psi'(z)\}] \quad (2)$$

弾性パラメータ κ_i ($i=1, 2$) は次式で与えられる。

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \dots \text{平面応力状態} \\ 3-4\nu & \dots \text{平面ひずみ状態} \end{cases} \quad (3)$$

段階①は、孔のない無限平板に無限遠方から一様外力が作用する。この応力関数と変位は次式で表される。

$$\phi(z) = (q_x + q_y)z/4 \quad (4)$$

$$\psi'(z) = (q_y + q_x)z/2 \quad (5)$$

$$u - iv = \frac{x}{2G} \left[\frac{\kappa+1}{4} q_x + \left(\frac{\kappa+1}{4} - 1 \right) q_y \right] - i \frac{y}{2G} \left[\left(\frac{\kappa+1}{4} - 1 \right) q_x + \frac{\kappa+1}{4} q_y \right] \quad (6)$$

孔が存在しない仮想のだ円孔上の変位は上式から次式で与えられる。

$$[u_0]_1 = \frac{x_0}{2G} \left[\frac{\kappa+1}{4} q_x + \left(\frac{\kappa+1}{4} - 1 \right) q_y \right] \quad (7)$$

$$[v_0]_1 = \frac{y_0}{2G} \left[\left(\frac{\kappa+1}{4} - 1 \right) q_x + \frac{\kappa+1}{4} q_y \right] \quad (8)$$

また、だ円孔をもつ無限板において、無限遠で q_x, q_y が働くとき、だ円孔周線上的変位は上式と同一である。(②における変位)

段階③で求める、だ円孔をもつ無限板に外力 q_x, q_y が働き、だ円孔上には境界応力が働かないときは、以下の写像関数を用いることによって、次のような応力関数となる。

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{R}{2} \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad \zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\varphi} \\ \frac{R}{2} &= a + b, \quad a = \frac{R}{2}(1+m), \quad b = \frac{R}{2}(1-m) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\Phi(\zeta) = \phi(z) = \frac{R}{2} \left[\frac{q_x + q_y}{4} \zeta - \left\{ \frac{q_x + q_y}{4} m + \frac{q_y - q_x}{2} \right\} \frac{1}{\zeta} \right] \quad (10)$$

$$\Psi'(\zeta) = \psi'(z) = \frac{R}{2} \left[\frac{q_y - q_x}{2} \zeta - \frac{q_x + q_y}{2} \frac{1}{\zeta} - \left\{ \frac{q_x + q_y}{2} m + \frac{q_y - q_x}{2} \right\} \frac{1+m\zeta^2}{\zeta(\zeta^2-m)} \right] \quad (11)$$

$$u - iv = \frac{1}{2G} \left[\kappa \overline{\Phi(\zeta)} - \left\{ \bar{Z}\Phi'(\zeta) + \Psi'(\zeta) \right\} \right] \quad (12)$$

境界上では合力はゼロになることを条件にして境界上の変位は次式で求められる。

$$u_0 - iv_0 = \frac{1}{2G} (\kappa + 1) \left[\overline{\Phi(\zeta)} \right] \quad (13)$$

$$[u_0]_2 = \frac{1}{2G} \frac{\kappa + 1}{2} \left[\left\{ 1 + 2 \left(\frac{a}{b} \right) \right\} q_x - q_y \right] x_0 \quad (14)$$

$$[v_0]_2 = \frac{1}{2G} \frac{\kappa + 1}{2} \left[-q_x + \left\{ 1 + 2 \left(\frac{a}{b} \right) \right\} q_y \right] y_0 \quad (15)$$

段階④で求める、だ円孔をもつ無限板のだ円孔上に境界応力が働き、無限遠で外力が働かない場合のだ円境界上の変位は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{x_0}{2G_1} \left[- \left\{ \left(\frac{\kappa + 1}{4} \right) \left(1 + 4 \frac{b}{a} \right) \right\} q_x + \left\{ 3 \left(\frac{\kappa + 1}{4} \right) - 1 \right\} q_y \right] \\ v &= \frac{y_0}{2G_1} \left[\left\{ 3 \left(\frac{\kappa + 1}{4} \right) - 1 \right\} q_x - \left\{ \left(\frac{\kappa + 1}{4} \right) \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right\} q_y \right] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

応力関数の表記も異なるが、ここで導いた式は、矢田らの導いた式（文献(14)付録の式 (A-17)）とは異なる。式 (10) で、写像後の応力関数 $\Phi(\zeta)$ のカッコ内第 1 項の分母は 4 であるが、矢田らの論文の付録の式 (A-10) では、分母が 2 と表記されている。式 (14) (15) でも、 $\kappa + 1$ の分母が 2 であるが、矢田の付録の式 (A-16) では 4 になっており、以降の式も文献(14)より導いた式とは異なる。

2・3 各領域の変位

さて、上述の式中には初期変位を生じさせる $u'_i, v'_i (i = 1, 2)$ の項は含まれていない。本論文では、 u'_i, v'_i が無視できない程度の場合もあり得ると考える。

さて、上記までの式を拡張して、各材料における変位に、初期変位を考慮した式を導く。

材料 [I] のだ円孔をもつ無限平板の変位は、境界応力が働くことによって、 C_0 から C_1 になるとする。このときの変位を (u_1, v_1) とし、式 (16) を参照すると次式となる。

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{(a + u'_1)}{2G_1} \left[- \left\{ \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \left(1 + 4 \frac{b + v'_1}{a + u'_1} \right) \right\} q_x \right. \\ &\quad \left. + \left\{ 3 \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) - 1 \right\} q_y \right] \\ v_1 &= \frac{(b + v'_1)}{2G_1} \left[\left\{ 3 \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) - 1 \right\} q_x \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \left(\frac{\kappa_1 + 1}{4} \right) \left(1 + 4 \frac{b + v'_1}{a + u'_1} \right) \right\} q_y \right] \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

材料 [II] の介在物の変位 (u_2, v_2) は、段階②を参照すると、次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= \frac{(a + u'_2)}{2G_2} \left[\left\{ \left(\frac{\kappa_2 + 1}{4} \right) q_x + \left(\frac{\kappa_2 + 1}{4} - 1 \right) q_y \right\} \right] \\ v_2 &= \frac{(b + v'_2)}{2G_2} \left[\left\{ \left(\frac{\kappa_2 + 1}{4} - 1 \right) q_x + \left(\frac{\kappa_2 + 1}{4} \right) q_y \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

2・4 境界応力 q_x, q_y の計算式

材料 [I] と [II] を接合させたとき、 C_1' および C_2' の境界におけるだ円形の寸法を、それぞれ $(a + u'_1, b + v'_1)$ 、 $(a + u'_2, b + v'_2)$ とすれば初期の「食い違い」量を次のように定義できる。

$$\left. \begin{aligned} u'_1 - u'_2 &= \varepsilon_x x_0 \\ v'_1 - v'_2 &= \varepsilon_y y_0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

また、境界上に境界応力 (q_x, q_y) を加えた後の変位はそれぞれの領域で (u_1, v_1) 、および (u_2, v_2) である。つまり、基準円から考えると、 $(C - C_0)$ が全体の変位であり、それらは次式となる。

$$\left. \begin{aligned} u'_1 + u_1 &= u'_2 + u_2 = u \\ v'_1 + v_1 &= v'_2 + v_2 = v \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

よって、境界上の変位の連続条件は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} u_1 - u_2 + \varepsilon_x x_0 &= 0, \quad \therefore u_1 - u_2 = -\varepsilon_x x_0 \\ v_1 - v_2 + \varepsilon_y y_0 &= 0, \quad \therefore v_1 - v_2 = -\varepsilon_y y_0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

以上の関係より、「食い違い」ひずみを求めると次式となる。

$$\left. \begin{aligned} &\left\{ \frac{\eta_1}{2G_1} \left(1 + 4 \frac{b + v'_1}{a + u'_1} \right) \left(1 + \frac{u'_1}{a} \right) + \frac{\eta_2}{2G_2} \left(1 + \frac{u'_2}{a} \right) \right\} q_x \\ &- \left\{ \left(\frac{3\eta_1 - 1}{2G_1} \right) \left(1 + \frac{u'_1}{a} \right) - \frac{\eta_2 - 1}{2G_2} \left(1 + \frac{u'_2}{a} \right) \right\} q_y = \varepsilon_x \\ &\left\{ \frac{\eta_2 - 1}{2G_2} \left(1 + \frac{v'_2}{b} \right) - \frac{3\eta_1 - 1}{2G_1} \left(1 + \frac{v'_1}{b} \right) \right\} q_x \\ &+ \left\{ \frac{\eta_1}{2G_1} \left(1 + 4 \frac{b + v'_1}{a + u'_1} \right) \left(1 + \frac{v'_1}{b} \right) + \frac{\eta_2}{2G_2} \left(1 + \frac{v'_2}{b} \right) \right\} q_y = \varepsilon_y \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ここに、 η_i は次式のように定義した。

$$\eta_i = \frac{\kappa_i + 1}{4}, (i = 1, 2) \quad (24)$$

これから平面応力状態における境界応力 q_x, q_y を求めると、次式のように整理できる。

$$\frac{q_x}{E_2} = \frac{1}{A} \left[\left\{ \frac{b + v'_1}{a} + \left(4 \frac{a + u'_1}{a} + \frac{b + v'_1}{a} \right) \frac{E_2}{E_1} \right\} \varepsilon_x \right. \\ \left. + \left\{ \frac{a + u'_2}{a} v_2 + \left(\frac{a + u'_1}{a} (2 - \nu_1) \right) \frac{E_2}{E_1} \right\} \left(\frac{b}{a} \right) \varepsilon_y \right] \quad (25)$$

$$\frac{q_y}{E_2} = \frac{1}{A} \left[\left\{ \frac{b + v'_2}{a} v_2 + \frac{b + v'_1}{a} (2 - \nu_1) \frac{E_2}{E_1} \right\} \varepsilon_x \right. \\ \left. + \left\{ \frac{a + u'_2}{a} + \left(\frac{a + u'_1}{a} + 4 \frac{b + v'_1}{a} \right) \frac{E_2}{E_1} \right\} \left(\frac{b}{a} \right) \varepsilon_y \right] \quad (26)$$

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \frac{a + u'_2}{a} + \left(\frac{a + u'_1}{a} + 4 \frac{b + v'_1}{a} \right) \frac{E_2}{E_1} \right\} \\ &\quad \left\{ \frac{b + v'_2}{a} + \left(4 \frac{a + u'_1}{a} + \frac{b + v'_1}{a} \right) \frac{E_2}{E_1} \right\} \\ &\quad - \left\{ \frac{a + u'_1}{a} (2 - \nu_1) \frac{E_2}{E_1} + \frac{a + u'_1}{a} v_2 \right\} \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \frac{b+v'_1}{a} (2-\nu_1) \frac{E_2}{E_1} + \frac{b+v'_2}{a} \nu_2 \right\} \quad (27)$$

$$\frac{q_y}{E_1} = \frac{q_y}{E_2} \frac{E_2}{E_1} \quad (28)$$

$$\frac{q_x}{E_1} = \frac{q_x}{E_2} \frac{E_2}{E_1} \quad (29)$$

式 (25), (26) と式 (28), (29) は, 矢田ら¹⁴⁾の方法になり, 無次元化したものである。 $E_2/E_1 \rightarrow 0$ (あるいは $E_1/E_2 \rightarrow \infty$) に近い材料の組み合わせの場合には式 (25), (26) を用い, $E_1/E_2 \rightarrow 0$ (あるいは $E_2/E_1 \rightarrow \infty$) に近い材料の組み合わせの場合には式 (28), (29) を用いばよい。

3 数値計算例

円形の場合には, 形状が同心円とし, だ円形の場合には共焦点のだ円となる場合について検討し, だ円が共焦点であるための条件は微小変形を考慮すると次式となる。

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+u')^2 - (b+v')^2} \quad (30)$$

$$\therefore (v')^2 + 2bv' - (2a+u')u' = 0 \quad (30')$$

よって, 初期変位の u' と v' は従属関係をもつことになり, v'_1, v'_2 は u'_1 が決まれば一意的に求められる。 u'_2 は食い違い比率の関係である式 (19) より求められる。つまり, 以下の式 (31) ~ (33) より, x 方向の食い違い比率 ε_x と u'_1 が決定されれば, それぞれの変位が求められ, 境界応力が求められる。

$$u'_2 = u'_1 - \frac{b^2}{a} \varepsilon_x \quad (31)$$

$$v'_1 = -b + \sqrt{b^2 + u'_1(2a+u'_1)} \quad (32)$$

$$v'_2 = -b(1+\varepsilon_x) + \sqrt{b^2 + u'_1(2a+u'_1)} \quad (33)$$

ここに, 以下の数値計算では, $\varepsilon = \varepsilon_y$ とおき, ε_x と ε_y の関係は式 (19) より, x 方向の食い違い比率 ε_x は次式になる。

$$\varepsilon_x = \left(\frac{b}{a} \right)^2 \varepsilon_y \quad (34)$$

3・1 真円 ($b/a = 1$) の計算例

まず, 食い違い比率 $\varepsilon = 0.01$ において初期変位がゼロで, 円形の場合 ($b/a = 1$) の境界応力を Fig. 3 に示す。縦軸は $E_i \varepsilon$ ($i = 1, 2$) で除して無次元化している。また, この場合には真円のため, $q_x = q_y$ であることから添え字 (x, y) は省略している。図の右側の E_1/E_2 軸は大小を逆

Fig. 3. E_1/E_2 or E_2/E_1 vs $q/(E_i \varepsilon)$ ($a = b = 1, u'_1 = 0.0$).

に示しているが, これは前述のように, $E_2/E_1 \rightarrow 0$ (あるいは $E_1/E_2 \rightarrow \infty$) に近い材料の組み合わせの場合と, $E_1/E_2 \rightarrow 0$ (あるいは $E_2/E_1 \rightarrow \infty$) に近い材料の組み合わせの場合を同時に示すためである。

初期変位がゼロの場合には矢田ら¹⁴⁾の示した解析結果と傾向は似ているが, 値が異なっている。同一の材料 ($E_2/E_1 = 1$) の場合には $q/(E_i \varepsilon)$ の値は約 1/4 になっており, 境界応力が減少することを示している。

また, 食い違い比率が正で, 無限平板のヤング率 E_1 が介在物のヤング率 E_2 より非常に大きいと 1 以上の値をもつことがあり, 介在物は境界応力以上の力で締結されることを示している。逆にいえば, $E_1 < E_2$ で無限板のヤング率が非常に小さい場合には, 介在物の境界応力は小さくなる。

次に, 初期変位を含んだ場合の結果を Fig. 4 に示す。煩雑になるため, Fig. 4(a) には $q/(E_2 \varepsilon)$ を, Fig. 4(b) には $q/(E_1 \varepsilon)$ を示した。それぞれ初期変位 u'_1 が 0.0 (実線), 0.1 (破線), 0.5 (点線) の場合を示し, 初期変位のない $u'_1 = 0$ は最も高い値の実線である。

初期変位が大きくなるにしたがい, $q/(E_i \varepsilon)$ の値は小さくなる傾向を示しており, 工業的には危険側の傾向を示している。 $E_2/E_1 = 1$ では食い違い比率 $\varepsilon = 0.01$ でも初期変位が $u'_1 = 0.1$ の大きさであれば 5% 以上境界応力が減少して, 初期変位の大きさによってその影響は無視できない場合も生じることになることが分かった。

(a) E_1/E_2 or E_2/E_1 vs $(q_x, q_y)/(E_2 \varepsilon)$

(b) E_1/E_2 or E_2/E_1 vs $(q_x, q_y)/(E_1 \varepsilon)$

Fig. 4. Numerical calculation of circular boundary with various initial displacement u'_1 at discrepancy ratio $\varepsilon = 0.01$.

Fig. 5. E_1/E_2 or E_2/E_1 vs. $q/(E\epsilon)$ ($b/a = 0.5$, $u_1' = 0.0$).

3・2 だ円 ($b/a = 0.5$) の計算例

$b/a = 0.5$ のだ円で食い違い比率 $\epsilon = 0.01$ における初期変位がない場合の結果を Fig. 5 に示す. 真円の場合と異なり, q_x と q_y が異なるため, $E_1 = E_2$ を除き, $q_x/(E_1\epsilon)$ と $q_y/(E_1\epsilon)$, および, $q_x/(E_2\epsilon)$ と $q_y/(E_2\epsilon)$ は異なる値を示す. また, その変化も E_1/E_2 と E_2/E_1 で対称ではない.

真円の場合の条件と同様, Fig. 6 に, $b/a = 0.5$ のだ円で食い違い比率 $\epsilon = 0.01$ とし, 初期変位 u_1' が 0.0, 0.1, 0.5 の結果を示す. Fig. 6(a) には $q_x/(E_2\epsilon)$ と $q_x/(E_1\epsilon)$ を, Fig. 6(b) には, $q_y/(E_2\epsilon)$ と $q_y/(E_1\epsilon)$ を示している. $q_x/(E_1\epsilon)$, $q_y/(E_1\epsilon)$ の値は初期変位が大きいほど小さくなる傾向を示しており, 円の場合と同様となった.

3・3 食い違い比率 ϵ が負の場合

上述の食い違い比率 $\epsilon = 0.01$ の場合は, $(C - C_0) > 0$ であり, つまり, だ円境界が大きくなる場合である. また, C_0 から初期変位が大きくなり, 材料 [I] の内部に材料 [II] が入らなければならないので, x 成分では $u_1' > u_2'$ の必要がある. ところが実際には, だ円が小さくなって焼きばめされる場合がある. このとき $u_1' < u_2'$ でなければ材料 [II] が材料 [I] の内部に挿入できない. すると, 食い違い比率の定義式 (19) より, 生じる食い違い比率は負となる. $(C - C_0) < 0$ の $\epsilon = -0.01$ の場合の計算結果は, 食い違い比率 $\epsilon = 0.01$ の場合と正負が逆になる. つまり, 食い違い比率の絶対値が等しければ, 初期変位が負の場合は正の場合と大きさの等しい圧縮力が働くことになる.

3・4 だ円形状の扁平率による内部応力の影響

Fig. 4 と Fig. 6 より, 真円とだ円形 ($b/a = 0.5$) によって初期変位に対して境界応力に違いが生じている.

Fig. 7 に b/a の扁平率と初期変位の影響による, $E_1 = E_2$ での境界応力の変化を示した. 縦軸は初期変位がない場合の $q/(E\epsilon)$ で除した値を示している. $b/a = 1$ と 0.8, 0.5 の場合を示したが, 扁平率が大きくなるほど初期変位による影響が強いことがわかる. また, 初期変位の小さい方が減少の傾向は比較的大きい. $b/a = 0.5$ のだ円形では $u_1' = 0.1$ 程度で初期変位がない場合より約 20% も減少する. よって, 加工時の真円度も重要であることを示している.

3・5 食い違い比率 ϵ の影響

初期変位の大小によって境界応力に違いが見られたことから, 初期変位のパラメータは重要といえよう. この

(a) E_1/E_2 or E_2/E_1 vs $q_x/(E_1\epsilon, E_2\epsilon)$ (b) E_1/E_2 or E_2/E_1 vs $q_y/(E_1\epsilon, E_2\epsilon)$ Fig. 6. Numerical calculation of elliptic boundary with various initial displacement u_1' at discrepancy ratio $\epsilon = 0.01$. Fig. 7. Numerical calculation of several b/a ratio for u_1' at discrepancy ratio $\epsilon = 0.01$.

初期変位は食い違い比率によってそれぞれの初期変位が決まるため, 次に, 食い違い比率の大小によって境界応力がどのように変化するか調べた.

Fig. 8 に食い違い比率 ϵ が 0.01, 0.05, 0.1 の場合で, 初期変位 u_1' が 0 から 0.1 まで変化する場合の結果を示した. これによると, 食い違い比率が変わっても, 初期変位の変化に対する影響に大きな違いは見られず, 初期変位に比べて食い違い比率の影響は比較的小さいことがわかる. Fig. 9 では, 初期変位 u_1' が 0 と 0.5 の場合に着目し, E_2/E_1 の食い違い比率による境界応力の変化を調べた. $\epsilon = 0.1$ を実線で示し, $\epsilon = 0.05$ を破線, $\epsilon = 0.01$

Fig. 8. Internal stress q of circular boundary at $E_1 = E_2$ for initial displacement u_1' various discrepancy ratio ε .

Fig. 9. Internal stress q at initial displacement $u_1' = 0.0$ and 0.5 for E_2/E_1 various discrepancy ratio ε .

を点線で示している。

食い違い比率によらずほぼ等しい値を示しており、グラフ上では食い違い比率の影響はほとんどないようである。しかしながら、 $\varepsilon = 0.1$ と比率が高いほど境界応力はやや大きくなっており、食い違い比率が比較的大きな場合は、境界応力は高くなるようである。

3・6 接合応力の算定

焼きばめ時などには実用上、接合応力が重要である。接合応力が降伏応力以上であれば弾性接合にならず、接合されない可能性もある。ここで求めた接合応力はだ円形状の法線方向に働く合応力を意味している。

重要なことは、ここで、食い違い比率を大きくしすぎると、接合時に塑性変位を伴う可能性である。一例を Table I に示す。用いた数値は、無限平板の縦弾性係数 $E_1 = 200\text{GPa}$ 、内部の介在物の縦弾性係数 $E_2 = 100\text{GPa}$ 、両者のポアソン比 (ν_1, ν_2) は共に 0.3 である。両者とも、横長だ円 ($b/a = 1/2$) であり、長軸方向 ($\theta = 0$ 度) の接合応力が高くなり、短軸方向が最小値をとる。比較のため、真円 ($b/a = 1$) の値もそれぞれ付記した。

初期変位による影響はここでは大きく現われないが、食い違い比率を変えることで接合応力を弾性範囲内に制御できることが明確である。

最後に、ポアソン比による影響について言及する。計算例は省略するが、内部の縦弾性係数 E_2 より外部の縦弾性係数 E_1 が高い場合、内部のポアソン比が高くなる

Table I. Maximum and minimum resultant stress for variable initial displacement u_1' each discrepancy ratio ε .

Discrepancy ratio ε	Initial displacement u_1'	Resultant stress σ_r (Pa)		
		Elliptic ($b/a=1/2$)		Circle ($b/a=1$)
		Maximum	Minimum	
0.1	1/1000	2.25564G	2.05727G	4.3814G
	1/100000	2.25928G	2.06235G	4.3859G
	0	2.25931G	2.06241G	4.3860G
0.001	1/1000	22.201M	20.271M	42.523M
	1/100000	22.236M	20.320M	42.565M
	0	22.236M	20.321M	42.566M

ほど接合応力は高くなる。逆に $E_2 > E_1$ でも、外部のポアソン比が高くなるほど内部のポアソン比が高くなれば接合応力は高くなるものの、その傾向は鈍くなる。つまり、接合問題においてもポアソン比は重要な要素であることを意味している。

4 結 言

だ円孔を持つ無限平板 [I] とだ円形介在物 [II] を接合する際、両者が境界上で不連続な所定の「食い違い」をもつ場合の理論式について、矢田らの導いた式の誤りを指摘し、正しい式を導いた。さらに、接合直前に行う、初期の寸法変位を含めた理論式を誘導した。

所定の力学的性質を与えて、その数値計算例を図示し、材料 [I] と [II] を連結する場合に生じる境界応力は、初期変位によって影響を受けることを示した。それにより、だ円の寸法によって初期変位の大きさが無視できない場合もあり得ることが定量的に判明した。

参 考 文 献

- 1) 森口繁一, “二次元弾性論”, p.71 (1957) 岩波書店。
- 2) N. I. Muskhelishvili, “Some Basic Problem of The Mathematical Theory of Elasticity”, Translated by J. R. M. Radok, p.461 (1963) P. Noordhoff Ltd. Cronigen -The Netherlands.
- 3) D. B. Bogy, J. App. Mech., Tans. ASME, **35**, 460 (1968).
- 4) D. B. Bogy, J. App. Mech., **38**, 377 (1971).
- 5) J. Dundurs, J. App. Mech., **36**, 650 (1969).
- 6) A. R. Zak, Trans. ASME, **31**, 150 (1964).
- 7) D. Munz and Y. Y. Yang, J. App. Mech., **59**, 857 (1992).
- 8) T. C. Ting, Y. Jin and S. C. Chou, J. App. Mech., **52**, 565 (1985).
- 9) C. Hwu and C. W. Fan, Trans. ASME, **65**, 580 (1998).
- 10) Y. Y. Lin and J. C. Sung, Trans. ASME, **65**, 454 (1998).
- 11) A. S. Kravchuk, J. App. Mech. and Tech. Phys., **40**, 1121 (1999).
- 12) Y. L. Li, S. Y. Hu and Y. Y. Yang, Eng. Frac. Mech., **66**, 153 (2000).
- 13) D. A. Pozharskii, J App. Math. and Mech., **64**, 147 (2000).
- 14) 矢田敏夫, 益子淳也, 井上忠信, 日本機械学会論文集, A-**63**, 1231 (1997).
- 15) 黒瀬雅詞, 溝口 豊, 河原功司, 平島健一, 日本機械学会平成 11 年度材料力学部門講演会講演論文集, 735 (1999).
- 16) E. g., C. T. Wang, “Applied Elasticity”, p.54 (1953) McGraw-Hill, 猪瀬寧雄訳, “応用弾性学”, p.64 (1971) 森北出版。