衝撃静水圧力を受けるクロスプライ積層円筒殻の動的安定解析[†]

粕谷 平和* 山岸 保司**

An Analysis of Dynamic Stability of Cross-Ply Laminated Cylindrical Shells under Impact Hydrostatic Pressure

by

Hirakazu KASUYA* and Yasuji YAMAGISHI**

This paper deals with the problem of dynamic stability of cross-ply laminated cylindrical shells under impact hydrostatic pressure is described. First of all, the motion of cylindrical shells under impact hydrostatic pressure is defined as axially symmetric motion. Following this definition, certain perturbations are superimposed on this motion and their effect on the behavior of the shell is investigated. The symmetric state of motion of the shell is called stable if the perturbations remained bounded. The solutions for the prebuckling motion and the perturbed motion are obtained using the Galerkin's method. Stable regions are determined by utilizing Mathieu's equation. The inevitability of dynamically unstable behavior is proved analytically and the effects of various factors, such as hydrostatic pressure ratio, number of layers, stacking sequences and dynamic unstable mode, are clarified.

Key words: Structural analysis, Composite materials, Dynamic stability, Cross-ply laminated cylindrical shells, Impact hydrostatic pressure, Mathieu's equation

1 ま え が き

複合材料を用いて航空宇宙機器のような薄肉構造物を設計しようとするとき、構造物に作用する衝撃負荷の存在を考慮する必要があり、動的安定問題の力学的な解明は重要な研究課題である。^{1)~3)}

円筒殻が軸対称荷重を受ける場合、初期運動は軸対称運動を起こす。著者らは既報において、座屈前軸対称運動を考慮することによって、衝撃継続時間が十分に長い場合には、静的座屈値より低い値で動的不安定となる可能性を示している。^{4)~6)}

本論文では、衝撃静水圧力を受けるクロスプライ積層円筒殻を例に挙げ、既報と同様な手法を用いて動的不安定現象の必然性を示す。手法としては、基礎方程式から Mathieu 形方程式を導き、Mathieu の安定判別線図を用いて、静的座屈値以下の衝撃静水圧力を負荷させた場合でも、不安定モードが発生することを明らかにし、不安定現象に与える諸因子の影響を解析的手法によって検討する。

2 動的安定解析法

2.1 基礎式

解析モデルとして Fig. 1 に示すような半径 R 、筒長 L 、板厚 h のクロスプライ積層円筒殻が衝撃静水圧力 $p(t)$ を受ける場合を考える。座標原点を円筒殻中央にとり、軸方向、円周方向、板厚方向にそれぞれ x 、 y 、 z 軸をとる。また、積層円筒殻は Fig. 2 に示すように、各層とも均質な直交異方性の N 層積層からなり、 k 番目の層は基準面から $z = h_k \sim h_{k+1}$ の間に存在し、繊維は主軸方

Fig. 1. Configuration and coordinates of cross-ply laminated cylindrical shell.

向 (0deg.) と円周方向 (90deg.) に交互に向いているものとする。

有限変形理論を用いた円筒殻の中央面における面内ひずみ成分 ϵ_x 、 ϵ_y 、 γ_{xy} 、曲率成分 κ_x 、 κ_y 、 κ_{xy} と変位成分 u 、 v 、 w との関係は次式のようにになる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{w}{R} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

永井^{2), 3)} とも指摘しているように、円筒殻が十分に薄肉の場合には面内および回転慣性力の影響はいずれも無視することができる。本解析モデルの積層円筒殻は十分に薄肉と考えられるため、板厚方向すなわち面外慣性力

[†] 原稿受理 平成 14 年 11 月 20 日 Received Nov. 20, 2002

* 正会員 東海大学工学部動力機械工学科 〒259-1292 平塚市北金目, Dept. of Prime Mover Eng., Tokai Univ., Kitakaname, Hiratsuka, 259-1292

** 東海大学大学院 (現在 富士重工業(株)航空宇宙カンパニー) 〒259-1292 平塚市北金目, Graduate Student, Tokai Univ., Kitakaname, Hiratsuka, 259-1292

Fig. 2. Geometry of an N -layered laminate.

のみ考慮し、ひずみ、曲率成分と各種剛性項からなる合応力 N_x , N_y , N_{xy} および合モーメント M_x , M_y , M_{xy} を用いることによって面内および面外の平衡方程式はそれぞれ次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{N_y}{R} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &+ N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = p(t) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式 (2) 中の ρ は密度を表す。さらに板厚方向の平衡方程式は、応力関数 F と合モーメント成分を用いた次式のようにになる。

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{h}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ - h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ + p(t) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ここで D_{ij} は曲げ剛性項である。一方、適合条件式は、次のようになる。

$$\begin{aligned} E_x \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - \left(2\nu_x E_y - \frac{E_x E_y}{G_{xy}} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + E_y \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \\ = E_x E_y \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

式 (4) 中の E_x , E_y は軸方向と円周方向のヤング率, G_{xy} は面内せん断剛性率, ν_x , ν_y は軸方向と円周方向に対するポアソン比である。

境界条件は、両端 ($x = \pm L/2$) において単純支持と仮定しているため次のように表せる。

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad N_x = 0, \quad v = 0 \quad (5)$$

2.2 負荷条件

円筒殻に作用する衝撃静水圧力 $p(t)$ の負荷条件を次式で示す。

$$\left. \begin{aligned} p(t) &= \frac{t}{t_p} p_0, \quad N_x(t) = \frac{p(t)R}{2} = \frac{t}{t_p} N_{x0} \quad (0 \leq t \leq t_p) \\ p(t) &= p_0, \quad N_x(t) = \frac{p(t)R}{2} = \frac{p_0 R}{2} = N_{x0} \quad (t_p \leq t) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

これは、静水圧力が $t = 0$ から作用し、 $0 \leq t \leq t_p$ で直線的に $p(t)$ が増加し、 t_p 時間後に一定値 p_0 に保たれることを示している。なお、衝撃静水圧力の継続時間は無限と仮定する。

2.3 初期運動

本論文では、円筒殻に作用する静水圧力を軸対称であると仮定しているので、初期に起こる運動は軸対称運動である。その初期運動に添字 A を付けて表す。

$$u_A = u_A(x, t), \quad v_A = 0, \quad w_A = w_A(x, t) \quad (7)$$

さらに初期運動における面外平衡方程式を $H(w_A)$ とおくと次式のようにになる。

$$\begin{aligned} H(w_A) &\equiv D_{11} \frac{\partial^4 w_A}{\partial x^4} + N_x(t) \frac{\partial^2 w_A}{\partial x^2} + E_y \frac{w_A h}{R^2} \\ &- \nu_y \frac{N_x(t)}{R} + p(t) + \rho h \frac{\partial^2 w_A}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

式 (8) で示した初期運動の平衡方程式の近似解を求めるにあたり、負荷が作用した場合の波形モード w_A を次式のように仮定する。

$$w_A = a(t) h (1 + A_1 \sin a_1 x \sinh a_2 x + A_2 \cos a_1 x \cosh a_2 x) \quad (9)$$

ここで、 $a(t)$ は初期運動の時間に関する未知数であり、式中の係数は次式のようにになる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \sqrt{\frac{1}{2R} \sqrt{\frac{1}{D_{11}} \left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right) + \frac{R}{2} \frac{[T]}{4D_{11}} I}} \\ a_2 &= \sqrt{\frac{1}{2R} \sqrt{\frac{1}{D_{11}} \left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right) - \frac{R}{2} \frac{[T]}{4D_{11}} I}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで A_{ij} は伸張剛性項であり、負荷条件式 (6) で示した衝撃静水圧力 p_0 と静的座屈値 p_s との比を荷重比 $I (= p_0/p_s)$ とする。また、式 (10) 中の固有ベクトル $[T]$ は静水圧力を受けるクロスプライ積層円筒殻の静的座屈応力⁷⁾であり、Flügge の殻理論⁸⁾による解析式は次のようになる。

$$\begin{vmatrix} H_{11} - n^2 p_s R - \lambda^2 \frac{p_s R}{2} & H_{12} & H_{13} + \lambda p_s R \\ H_{12} & H_{22} - n^2 p_s R - \lambda^2 \frac{p_s R}{2} & H_{23} - n p_s R \\ H_{13} + \lambda p_s R & H_{23} - n p_s R & H_{33} - n^2 p_s R - \lambda^2 \frac{p_s R}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

解法は、上式を係数行列式から一般固有値問題に帰着させ、軸方向半波数 m , 円周方向波数 n を変化させて得られる p_s の正の最小値が座屈応力であり、 $p_s = [T]$ で示される。なお式中の $\lambda (= m\pi R/L)$ は軸方向半波長, H_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) は形状パラメータ、各種剛性値からなる項である。⁷⁾ また、式 (9) 中の係数 A_1 , A_2 は境界条件により異なる値であり、両端単純支持の本解析においては式 (5) より次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= - \frac{2\alpha_1 \alpha_2 \sin \alpha_1 \sinh \alpha_2 + (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \cos \alpha_1 \cosh \alpha_2}{2\alpha_1 \alpha_2 (\cosh^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1)} \\ A_2 &= - \frac{2\alpha_1 \alpha_2 \sin \alpha_1 \sinh \alpha_2 - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \cos \alpha_1 \cosh \alpha_2}{2\alpha_1 \alpha_2 (\cosh^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1)} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここで、式中の α_1 , α_2 は式 (10) の a_1 , a_2 の無次元量である。⁴⁾

そして初期運動のたわみ w_A 成分の時間に関する未知数 $a(t)$ を次の Galerkin 法を用いて求める。

$$\int_{-L/2}^{L/2} H(w_A)(1+A_1 \sin a_1 x \sinh a_2 x + A_2 \cos a_1 x \cosh a_2 x) dx = 0 \quad (13)$$

式 (9) の w_A を式 (8) に代入し、式 (13) の Galerkin 法を用いることによって $a(t)$ に関する 2 階常微分方程式が次のように得られる。なお、各種記号は紙面の都合上省略する。⁵⁾

$$\begin{aligned} \rho h^2 (Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2) \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + h \left\{ \frac{E_y h}{R^2} (Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2) \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{L} \right)^2 N_s(t) (B_1 Y_1 + B_2 Y_2) + \left(\frac{2}{L} \right)^4 D_{11} (C_1 Y_1 + C_2 Y_2) \right\} a(t) \\ + \left\{ -\frac{v_y}{R} N_x(t) + \rho(t) \right\} Y_0 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

また、時間 t , t_p を次のように無次元化する。

$$\tau = \frac{t}{R} \sqrt{\frac{E_y}{\rho}}, \quad \tau_p = \frac{t_p}{R} \sqrt{\frac{E_y}{\rho}} \quad (15)$$

そして、式 (6) と式 (13) を用いることによって次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 a(\tau)}{d\tau^2} + \left(q + r \frac{\tau}{\tau_p} \right) a(\tau) + s \frac{\tau}{\tau_p} &= 0 \quad (0 \leq \tau \leq \tau_p) \\ \frac{d^2 a(\tau)}{d\tau^2} + (q+r) a(\tau) + s &= 0 \quad (\tau_p \leq \tau) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここで、式中の q , r , s は各種衝撃負荷形態時の解析式⁵⁾より求められ、衝撃静水圧力負荷の場合には、簡略化された次式となる。

$$\left. \begin{aligned} q &= 1 + \frac{D_{11}}{h} \frac{R^2}{E_y} \left(\frac{2}{L} \right)^4 \frac{C_1 Y_1 + C_2 Y_2}{Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2} \\ r &= \frac{4[T]}{E_y h} \frac{R(R)^2}{2(L)} \frac{B_1 Y_1 + B_2 Y_2}{Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2} I \\ s &= \left\{ -\frac{v_x}{E_x} \frac{[T]}{2} \left(\frac{R}{h} \right)^2 + \frac{[T]}{E_y} \left(\frac{R}{h} \right)^2 \right\} \frac{Y_0}{Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2} I \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式 (17) の係数 r は衝撃外圧力時には 0 となる項である。^{5), 6)} なお、未知数 $a(\tau)$ の初期条件は、 $\tau=0$ で次式となる。

$$a(\tau) = 0, \quad \frac{da(\tau)}{d\tau} = 0 \quad (18)$$

これにより、初期条件式 (18) のもとで式 (16) を解くことによって $a(\tau)$ を求めることができる。

2・4 擾乱に関する方程式

初期運動に関する安定、不安定を議論するために、微小擾乱変位 u_B , v_B , w_B を初期運動に加え、その後の応答を調べる。境界条件式 (5) を満足する変形様式として、微小擾乱変位と擾乱時の応力関数を次式のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u_B &= U_B(x, t) \sin \frac{ny}{R}, \quad v_B = V_B(x, t) \cos \frac{ny}{R} \\ w_B &= b(t) h \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}, \quad F_B = f_B(x, t) \sin \frac{ny}{R} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここで、 m は軸方向半波数、 n は円周方向波数を表し (ただし、 m : odd, n : integer), $b(t)$ は擾乱成分の時間に関する未知数である。初期運動の安定、不安定を議論

するために、初期運動に微小擾乱を与え、その時間に対する変化を調べる。そこで、微小擾乱成分に関する平衡方程式および適合条件式を次のように示す。ここで、 u_B , v_B , w_B は x , y , t の関数である。

$$\begin{aligned} I(w_B) &= D_{11} \frac{\partial^4 w_B}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_B}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_B}{\partial y^4} \\ &+ N_x(t) \frac{\partial^2 w_B}{\partial x^2} + h \left\{ v_y \frac{N_x(t)}{h} - E_y \frac{w_A}{R} \right\} \frac{\partial^2 w_B}{\partial y^2} \\ &+ \frac{h}{R} \frac{\partial^2 F_B}{\partial x^2} - h \frac{\partial^2 w_A}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F_B}{\partial y^2} + \rho h \frac{\partial^2 w_B}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} E_x \frac{\partial^4 F_B}{\partial x^4} - \left(2v_x E_y - \frac{E_x E_y}{G_{xy}} \right) \frac{\partial^4 F_B}{\partial x^2 \partial y^2} + E_y \frac{\partial^4 F_B}{\partial y^4} \\ = E_x E_y \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_B}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_A}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_B}{\partial y^2} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

以上の式を満たすために、境界条件式 (5) に次の条件が付け加えられる。

$$N_{xB} = 0, \quad v_B = 0, \quad \frac{\partial^2 F_B}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F_B}{\partial y^2} = 0 \quad (22)$$

2・5 動的安定解析式

$\tau_p \leq \tau$ における初期運動の安定問題を考える。適合条件式 (21) に式 (19) を代入し、求めた f_B を式 (19) の 4 番目の式に代入することで応力関数 F_B が次のように求められる。なお、式中の各種係数は紙面の都合上省略する。⁴⁾

$$\begin{aligned} F_B &= \frac{E_y L^2 h}{R} b(t) \left[-\frac{(m\pi)^2}{(m\pi)^4 + k^2(Lm\pi)^2 + (\ell L)^4} \cos \frac{m\pi x}{L} + a(t) \frac{n^2}{4} \frac{h}{R} \right. \\ &\times \left\{ F_1 \cosh m_1 x + F_2 \cosh m_2 x + H_1 \sin \left(a_1 + \frac{m\pi}{L} \right) x \sinh a_2 x \right. \\ &+ H_2 \sin \left(a_1 - \frac{m\pi}{L} \right) x \sinh a_2 x + J_1 \cos \left(a_1 + \frac{m\pi}{L} \right) x \cosh a_2 x \\ &\left. \left. + J_2 \cos \left(a_1 - \frac{m\pi}{L} \right) x \cosh a_2 x \right\} \right] \sin \frac{ny}{R} \end{aligned} \quad (23)$$

式 (20) の平衡方程式に応力関数、負荷条件のほか、各諸値を代入して、擾乱成分の時間に関する未知数 $b(t)$ について導くため、次のような Galerkin 法を用いる。

$$\int_0^{2\pi R} \int_{-L/2}^{L/2} I(w_B) \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} dx dy = 0 \quad (24)$$

上式を解くことによって $b(t)$ に関する方程式が得られる。ここで、時間の無次元量 $\zeta (= \Omega \tau + \delta)$ ⁵⁾ を導入することによって、

$$\frac{d^2 b(\zeta)}{d\zeta^2} + (\phi + \psi \cos \zeta) b(\zeta) = 0 \quad (25)$$

となる Mathieu 形方程式⁹⁾ が得られる。ここで、Mathieu パラメータ ϕ , ψ は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi_1 + \phi_2 \\ \psi &= \frac{1}{\Omega^2} K n^2 \alpha \frac{h}{R} W_1 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式 (26) の ϕ_1 , ϕ_2 は荷重比 I , 固有ベクトル $[T]$ を含む次式のようになる。ここで、 ϕ_2 は衝撃外圧力時には 0 となる項である。^{5), 6)}

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{\Omega^2} \frac{h}{R} \left[\left(\frac{R}{L} \right)^4 \frac{1}{R h^2} \right. \\ &\times \left. \frac{D_{11}(m\pi)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(m\pi)^2 (nL/R)^2 + D_{22}(nL/R)^4}{E_y} \right] \end{aligned}$$

$$\phi_2 = - \frac{1}{\Omega^2} \frac{R}{2} \frac{[T]}{E_y h} \left(\frac{R}{h} \right)^2 \left\{ (m\pi)^2 + \nu_y \left(\frac{nL}{R} \right)^2 \right\} I \quad (27)$$

式 (25) の Mathieu パラメータ ϕ , ψ は, 円筒殻の幾何学的形状, 各種剛性値および荷重条件が定まると軸方向半波数 m , 円周方向波数 n のみの関数となるので, m , n を順次変化させ, それに対する安定判別を行う. なお, 式 (26) および (27) の Ω , K , α は式 (9) 中の未知数 a (b) を求める際, Galerkin 法によって得られる定数項であり, W_1 は各種剛性項, 形状パラメータなどからなる項であるが, 紙面の都合上省略する.⁹⁾ Mathieu 形方程式の解は, $b(\xi) = 0$ という安定解と, $b(\xi)$ が発散振動となる不安定解が得られる場合があり, それは Mathieu パラメータ ϕ , ψ の値に依存する. ϕ - ψ 平面上で安定, 不安定領域を示すには, その境界線を示す必要があり, それは方程式の性質上 2π または 4π の周期解となる.⁹⁾ それらの周期解を示すことによって得られる Mathieu の安定判別線図を Fig. 3 に示す. 白い領域が安定領域, 色付きの部分が不安定領域であり, すべての波形モードが安定領域に存在した場合, その円筒殻は構造的に安定であると言える.

3 数値計算例と動的安定判別

数値計算例において用いた弾性定数は, 繊維容積含有率 $V_f = 60\%$ の炭素繊維強化プラスチック材を想定しており, 平均化近似解法による式によって計算された次の値を用いる.¹⁰⁾

$$\left. \begin{aligned} E_L &= 137(\text{GPa}), \quad E_T = 8.17(\text{GPa}) \\ G_{LT} &= 4.75(\text{GPa}), \quad \nu_L = 0.316, \quad \nu_T = 0.0189 \\ \rho &= 1540(\text{kg/m}^3) \end{aligned} \right\} (28)$$

座屈静水圧力より低い静水圧力が動的に作用する場合, Mathieu の安定判別線図における円周方向波数 n は放物線状に存在し, n の増大に伴い Mathieu パラメータ ϕ , ψ の値も大きくなるが, ほとんどの波形モードが安定領域に含まれる. そこで, 構造不安定領域の存在に主眼を置き, 動的不安定モードについて議論するため, Mathieu の安定判別線図において主不安定領域と呼ばれ, もっとも広く重要である Fig. 3 の a 近傍について検討する.

Fig. 3. Mathieu's stability diagram.

著者らが以前に報告した静的負荷を受けるクロスプライ積層円筒殻の無次元静水圧座屈値 $K_h (= p_s R / E_T h)$ を, 最内層積層角を 0 (deg.) とした場合を Fig. 4 に, 最内層積層角を 90 (deg.) とした場合を Fig. 5 にそれぞれ示す.⁷⁾ 最内層積層角 $\theta = 0$ (deg.) の場合には, 積層数の減少による K_h 値の低下が顕著に現れ, Z の増加とともにその差は大きくなっている. また, 一般的な筒長を有する積層円筒殻で, 最内層積層角 $\theta = 90$ (deg.) の場合には積層数の減少に伴い K_h 値は増加する. 最内層積層角を $\theta = 0$ (deg.) とした場合と $\theta = 90$ (deg.) とした場合は, 積層数の多少が K_h 値に及ぼす影響は逆で両者の差が明確になり, 積層順序が座屈値に及ぼす影響は顕著になってくる. また, クロスプライ積層円筒殻では, 軸方向半波数 m は, すべての積層数 N , 最内層積層角の違いによらず, 一定値 1 であることを示している. そこで上記の内容を考慮し, 動的に静水圧力が作用した場合においても不安定となる軸方向半波数 m は 1 で励起すると考えられるため, 動的解析時においても $m = 1$ とする.

安定判別の一例として, Mathieu パラメータ ϕ , ψ の関係について, 形状パラメータ $R/h = 100$, $Z = 900$, 荷

Fig. 4. Variation of buckling coefficients of cross-ply laminated cylindrical shells with shape parameter Z . [Inner lamination angle $\theta = 0$ (deg.)]

Fig. 5. Variation of buckling coefficients of cross-ply laminated cylindrical shells with shape parameter Z . [Inner lamination angle $\theta = 90$ (deg.)]

(a) Number of layers $N=3$

(a) Number of layers $N=3$

(b) Number of layers $N=5$

(b) Number of layers $N=5$

(c) Number of layers $N=7$

(c) Number of layers $N=7$

(d) Number of layers $N=\infty$

(d) Number of layers $N=\infty$

Fig. 6. The relation between unstable region and wave mode n .
[Inner lamination angle $\theta = 0$ (deg.)]

Fig. 7. The relation between unstable region and wave mode n .
[Inner lamination angle $\theta = 90$ (deg.)]

重比 I が 0.3, 0.5, 0.7 のクロスプライ積層円筒殻について, 最内層積層角 θ を 0 (deg.), 90 (deg.) の両方において, 積層数 N を 3, 5, 7, ∞ 層と変化させた場合をそれぞれ (a), (b), (c), (d) とし, Fig. 6 および Fig. 7 にそれぞれ示す。

Fig. 6 および Fig. 7 に示すように, 積層数 N が増加するにしたがって, 板厚方向に均質となる直交異方性に近づき, $N = \infty$ では最内層積層角の違いによる波形モードの差異はなくなる。そして, 最内層積層角 $\theta = 0$ (deg.) では積層数の増加に伴い, 円周方向波数 n は低次の波形モードへと遷移しているのに対し, 最内層積層角 $\theta = 90$ (deg.) では積層数の増加に伴い, 若干ではあるが n は高次の波形モードへの遷移が確認できる。これは円周方向剛性値と深く関係している。クロスプライ積層円筒殻の円周方向剛性値は, 最内層積層角 $\theta = 90$ (deg.) の積層数 $N = 3$ の場合が一番高く, 直交異方性に近づくに従い低くなり, 最内層積層角 $\theta = 0$ (deg.) の積層数 $N = 3$ の場合が一番低い。このことから, 円周方向剛性値の高い積層構成のほうが波数 n を拘束するため, このような結果になったと考察される。また, 動的不安定となる場合の n は, 静的座屈時の波数 (Fig. 4, 5) と比較すると, 非常に大きな値となっている。⁷⁾そして高次の波形モードへの遷移によって ψ 値は増大するが, 荷重比 I を増加させることによってその差は顕著になる。また, 本解析における負荷形態においては, 主不安定領域の増減は見られなかった。

なお, 動的不安定の起こる最小荷重比の限界を議論するためには構造減衰を含んだ場合の安定判別式によって不安定領域を考慮しなければならない。

4 あとがき

本論文は, クロスプライ積層円筒殻に衝撃静水圧力を作用させた場合の動的応答を, 構造の安定性という観点から検討した。静的座屈応力を Flugge の殻理論より解析し, 基礎式には有限変形理論を用い, Mathieu 形方程式を導き, 安定判別線図より安定判別を実施した。そして, 座屈前軸対称運動と微小擾乱運動を考慮することで, 構造不安定領域を積層構成の影響とともに示し, 静的座屈値と比較して低い衝撃静水圧力を受けた場合においても構造不安定となる可能性を示した。

参考文献

- 1) J. C. Yao, AIAA J., **1**, 1391 (1963).
- 2) 永井健一, 八巻 昇, 日本機械学会論文集, **A-45**, 791 (1979).
- 3) 永井健一, 八巻 昇, 日本機械学会論文集, **C-53**, 1309 (1987).
- 4) 粕谷平和, 根本圭一, 日本機械学会論文集, **A-59**, 454 (1993).
- 5) 粕谷平和, 松岡一雄, 日本機械学会論文集, **A-65**, 1908 (1999).
- 6) 粕谷平和, 松岡一雄, 材料, **48**, 1367 (1999).
- 7) 山岸保司, 佐藤孝行, 粕谷平和, 東海大学紀要工学部, **41**, 129 (2001).
- 8) W. Flugge, "Stresses in Shells", Chap.7 (1962) Springer-Verlag, Berlin.
- 9) N. W. McLachan, "Theory and Application of Mathieu Function", Chap.3 (1947) Oxford University Press, New York.
- 10) 植村益次, 山田直樹, 材料, **24**, 156 (1975).