極異方性弾性体の幾つかの基本解の誘導および解析†

中山 岳彦* 平島 健一** 鈴木 拓雄***

Fundamental Solutions for Cylindrically Anisotropic Elastic Medium

by

Takehiko NAKAYAMA*, Ken-ichi HIRASHIMA** and Takuo SUZUKI***

Basic equations are derived for a cylindrically anisotropic elastic medium of two-dimensional in-plane problems and out-of-plane shear problems, and general solutions for a circular ring with prescribed stress boundary conditions are obtained by the form of Fourier series. Further, a closed-form solution is also derived for the concentrated force. Numerical results for stress distribution are also shown.

Key words: Cylindrical anisotropy, Elasticity, Fundamental solutions, Concentrated force, In-plane loading, Out-of-plane shear loading, Circular ring

1 緒 言

木材や円筒状の繊維複合材は製作の容易さや力学的諸特性の優れていることなどを踏まえて各方面で多用されている。また、それらの動向に合わせて、木材や繊維複合材を極異方性材料として取り扱う理論解析がある程度なされるようになってきた。それらの理論解析としては、例えば、Lekhnitskii¹⁾の著書をはじめ、Pagano²⁾、Pagano & Tandon³⁾および Mikata & Taya⁴⁾の Coated-Fiber を有する極異方性繊維材料の解析、Hoff⁵⁾による円孔を有する極異方性平板の応力解析、Das & Hazen⁶⁾、Liu & Bert⁷⁾による補強リングを有する無限弾性体の応力・変位解析などがある。また、内外圧を受ける極異方性円筒問題を取り扱ったものに Nowinski⁸⁾、Hagan & Baxter⁹⁾らの研究がある。この他に単一層或多層状の極異方性円筒シェルを対象とした数多くの研究がなされている。

しかしながら、この極異方性問題について、準三次元弾性問題、面内・面外せん断問題を系統的に取り扱った論文は見当たらないのが現状である。

本論文では著者ら¹⁰⁾によりまとめられた面内問題および面外せん断問題の基本解の一部の間違い等を手直しすると共に、円形リングの内外境界に Fourier 級数で展開された力を受ける問題の一般解を面内問題、面外せん断問題について導き、さらに円孔を有する極異方性無限弾性体の孔周縁に集中力が作用する基本問題について閉じた型の厳密解を求め、それらの数値計算例の結果を示す。

2 極異方性弾性体の基礎関係式

はじめに問題の定義を述べる。面内問題とは通常の平面応力、平面ひずみ状態に対する問題であり、面外せん断問題とは St.Venant の単純ねじり問題に代表されるよ

うな座標 z に関係するせん断応力、およびせん断ひずみ成分のみが存在する問題である。さらに、これらの面内・面外せん断問題を重ね合わせるにより準三次元的な取り扱いが可能となる。以下にそれぞれの問題についての基礎関係式を示す。

2・1 面内問題

(I) 釣合方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(II) 幾何関係式

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

さらに上式より、ひずみ成分 ε_r , ε_θ , $\gamma_{r\theta}$ は次式の適合条件式を満足しなければならない。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} - r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} \right) + r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} = 0. \quad (3)$$

(III) 構成関係式

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ & a_{22} & 0 \\ \text{sym.} & & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここに、平面応力状態における弾性コンプライアンス a_{ij} は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_r}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta} = -\frac{\nu_{\theta r}}{E_r}, \\ a_{22} &= \frac{1}{E_\theta}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{r\theta}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

また、平面ひずみ状態に対しては、次式となる。

† 原稿受理 平成 14 年 4 月 1 日 Received Apr. 1, 2002

* (株)竹中土木 〒104-8234 東京都中央区銀座, Takenaka Civil Eng. & Construction Co., Ltd., Chuo-ku, Tokyo, 104-8234

** 正 会 員 山梨大学土木環境工学科 〒400-8511 甲府市武田, Dept. of Civil Eng. & Envi. Eng., Yamanashi Univ., Takeda, Kofu, 400-8511

*** 山梨大学土木環境工学科 〒400-8511 甲府市武田, Dept. of Civil Eng. & Envi. Eng., Yamanashi Univ., Takeda, Kofu, 400-8511

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1 - \nu_{rz}\nu_{zr}}{E_r}, \quad a_{12} = \frac{\nu_{r\theta} + \nu_{zr}\nu_{\theta z}}{E_\theta}, \\ a_{22} &= \frac{1 - \nu_{\theta z}\nu_{z\theta}}{E_\theta}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{r\theta}}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

上式において E_r および E_θ はそれぞれ半径方向および円周方向の弾性係数であり, $G_{r\theta}$ は r - θ 面内のせん断弾性係数, ν_{kl} は k 方向に応力を受けたときの k 方向のひずみとそれに直交する l 方向のひずみの比に関するポアソン比である. なお, 等方性弾性体の場合には弾性コンプライアンスは次式ようになる.

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{E}, \quad a_{12} = -\frac{\nu}{E}, \quad a_{66} = \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}. \quad (7)$$

(IV) Airy の応力関数

釣合方程式 (1) を満たすように Airy の応力関数 $F(r, \theta)$ を以下のように導入する.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(V) 支配方程式

式 (8) を式 (4) に代入し, それを式 (3) に代入することにより次の支配方程式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} &a_{22} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} \right) \\ &- a_{11} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} \right) \\ &+ (2a_{12} + a_{66}) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} \right) \\ &+ (2a_{11} + 2a_{12} + a_{66}) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

2・2 面外せん断問題

(I) 釣合方程式

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \quad (10)$$

(II) 幾何関係式

$$\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (11)$$

上式より, ひずみ成分 γ_{rz} , $\gamma_{\theta z}$ は次式の適合条件式を満足しなければならない.

$$\frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \gamma_{\theta z} = 0. \quad (12)$$

(III) 構成関係式

$$\begin{bmatrix} \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{44} & 0 \\ 0 & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} \end{bmatrix} \quad (13)$$

ここに, a_{44} および a_{55} は極異方性体のせん断弾性コンプライアンスであり, せん断弾性係数 $G_{\theta z}$, G_{rz} と次の関係がある.

$$a_{44} = \frac{1}{G_{\theta z}}, \quad a_{55} = \frac{1}{G_{rz}}. \quad (14)$$

なお, 等方性弾性体における弾性コンプライアンスは次式ようになる.

$$a_{44} = a_{55} = \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}. \quad (15)$$

(IV) Prandtl の応力関数

面外の釣合方程式 (10) を満たすように Prandtl の応力関数 $\phi(r, \theta)$ を以下のように導入する.

$$\tau_{rz} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad \tau_{\theta z} = -\frac{\partial \phi}{\partial r}. \quad (16)$$

(V) 支配方程式

式 (16) を式 (13) に代入し, それを式 (12) に代入することにより, 次の支配方程式が得られる.

$$a_{44} \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_{44} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_{55} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (17)$$

3 円形リングの内外境界に力の作用する問題

第2章で面内問題, 面外せん断問題の支配方程式がそれぞれ式 (9), (17) のように偏微分方程式の形で求められた. この章ではそれらの偏微分方程式の解¹⁰⁾から, 内半径 a , 外半径 b の円形リングの内外境界に Fourier 展開された力を受ける問題の一般解を面内問題, 面外せん断問題について導く.

3・1 面内応力が作用する場合

Fig. 1 に示す面内の力が作用する解については以前に求められた解¹⁰⁾があるが, これは設定した問題では食い違いを想定していないにもかかわらず, そのような項が含まれていたため応力関数が正しく記述されておらず, また, 未知係数を決定する際には応力についての検討しか行っていないために, すべての係数が定められていなかった. ここでは応力関数のそのような誤りを修正し, さらに応力だけでなく変位についての検討を行うことにより, すべての未知係数が一意に定まるようにした.

Fourier 展開された力を境界条件とすると次式のようになる.

<境界条件>

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \Big|_{r=b} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \\ \tau_{r\theta} \Big|_{r=b} &= \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos n\theta + b'_n \sin n\theta). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \Big|_{r=a} &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta), \\ \tau_{r\theta} \Big|_{r=a} &= \frac{c'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c'_n \cos n\theta + d'_n \sin n\theta). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

また, 境界上で転位を起こさない場合の応力関数は次式のようになる.

Fig. 1. Circular hollow ring with subjected to inner and outer loads.

< 応力関数 >

$$F = A_0 r^{1+\alpha_0} + B_0 r^{1-\alpha_0} + \hat{A}_0 \theta \\ + \hat{A}_1 r \theta \hat{c} s \theta + (B_1 r \ln r + C_1 r^{1+\beta_1} + D_1 r^{1-\beta_1}) s c \theta \\ + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n r^{1+\alpha_n} + B_n r^{1-\alpha_n} + C_n r^{1+\beta_n} + D_n r^{1-\beta_n}) s c(n\theta). \quad (20)$$

ここに

$$s c(n\theta) = \begin{cases} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{cases}, \quad \left. \begin{aligned} c \hat{s}(n\theta) = \begin{cases} \cos(n\theta) \\ -\sin(n\theta) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$s c(n\theta)$, $c \hat{s}(n\theta)$ は式 (21) の第 1 式が $\sin(n\theta)$ であるとき第 2 式は $\cos(n\theta)$ になり, また第 1 式が $\cos(n\theta)$ であるとき第 2 式は $-\sin(n\theta)$ になることを意味するものとする. また $\hat{A}_0, \hat{A}_1, A_n, B_n, C_n, D_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) は未知係数である.

式 (8) と式 (20) より応力成分は次式のようにになる.

< 応力成分 >

$$\sigma_r = A_0(1+\alpha_0)r^{-1+\alpha_0} + B_0(1-\alpha_0)r^{-1-\alpha_0} \\ - \hat{A}_1 \frac{2}{r} s c \theta + \left\{ B_1 \frac{1}{r} + C_1 \beta_1 r^{-1+\beta_1} - D_1 \beta_1 r^{-1-\beta_1} \right\} s c \theta \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \{ A_n(1-n^2+\alpha_n)r^{-1+\alpha_n} + B_n(1-n^2-\alpha_n)r^{-1-\alpha_n} \\ + C_n(1-n^2+\beta_n)r^{-1+\beta_n} + D_n(1-n^2-\beta_n)r^{-1-\beta_n} \} s c(n\theta). \quad (22)$$

$$\sigma_\theta = A_0 \alpha_0(1+\alpha_0)r^{-1+\alpha_0} + B_0 \alpha_0(1-\alpha_0)r^{-1-\alpha_0} \\ + \left\{ B_1 \frac{1}{r} + C_1 \beta_1(1+\beta_1)r^{-1+\beta_1} - D_1 \beta_1(1-\beta_1)r^{-1-\beta_1} \right\} s c \theta \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \{ A_n \alpha_n(1+\alpha_n)r^{-1+\alpha_n} - B_n \alpha_n(1-\alpha_n)r^{-1-\alpha_n} \\ + C_n \beta_n(1+\beta_n)r^{-1+\beta_n} + D_n \beta_n(1-\beta_n)r^{-1-\beta_n} \} s c(n\theta). \quad (23)$$

$$\tau_{r\theta} = \hat{A}_0 \frac{1}{r^2} \\ + \left\{ -B_1 \frac{1}{r} - C_1 \beta_1 r^{-1+\beta_1} + D_1 \beta_1 r^{-1-\beta_1} \right\} c \hat{s} \theta \\ + \sum_{n=2}^{\infty} n \{ -A_n \alpha_n r^{-1+\alpha_n} + B_n \alpha_n r^{-1-\alpha_n} \\ - C_n \beta_n r^{-1+\beta_n} + D_n \beta_n r^{-1-\beta_n} \} c \hat{s}(n\theta). \quad (24)$$

ここに, α_n, β_n ($n = 0, 1, \dots$) は次式⁵⁾より求めることができる.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n^2 \\ \beta_n^2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ (1+G_n) \mp \sqrt{(1+G_n)^2 - 4H_n^2} \right\}, \\ H_n^2 = \frac{a_{11}}{a_{22}}(n^2-1)^2, \quad G_n = \frac{1}{a_{22}} \{ a_{11} + n^2(2a_{12} + a_{66}) \}. \quad (25)$$

はじめに係数 $A_0, B_0, \hat{A}_0$ を決定する. 応力の境界条件式 (18), (19) のそれぞれの第 1 式より A_0, B_0 が決定できて次式のようにになる.

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{a_0 b^{1+\alpha_0} - c_0 a^{1+\alpha_0}}{2(1+\alpha_0)(b^{2\alpha_0} - a^{2\alpha_0})}, \\ B_0 &= \frac{c_0 a^{1+\alpha_0} b^{2\alpha_0} - a_0 a^{2\alpha_0} b^{1+\alpha_0}}{2(1-\alpha_0)(b^{2\alpha_0} - a^{2\alpha_0})}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

また, 式 (18), (19) のそれぞれの第 2 式より係数 $\hat{A}_0$ が決定できる.

$$\hat{A}_0 = \frac{1}{4}(a'_0 b^2 + c'_0 a^2) \quad (27)$$

次に係数 $\hat{A}_1, B_1, C_1, D_1$ を決定する. ここでは $s c \theta, c \hat{s} \theta$ がどちらをとるかによって, 場合分けが必要になるがそれぞれ $s c \theta, c \hat{s} \theta$ をとる場合の係数を $\hat{A}_1, B_1, C_1, D_1$ とし, $s c \theta, c \hat{s} \theta$ がそれぞれをとる場合には係数にプライムを付けて $\hat{A}'_1, B'_1, C'_1, D'_1$ とする. これらの係数を完全に決定するには, はじめに述べたように応力の境界条件だけでは不十分であって, 変位についての検討が必要となる. つまり, 完全なリングの場合, 変位のクイチガイが起こらないという条件を加える. 以上のことに注意し応力の境界条件式 (18), (19) を用いると係数が次のように定められる.

$s c(n\theta), c \hat{s}(n\theta)$ がそれぞれ $\sin(n\theta), \cos(n\theta)$ の場合:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 &= -\frac{1}{4} \{ b(a'_1 + b_1) + a(d_1 + c'_1) \}, \\ B_1 &= 2k\hat{A}_1, \\ C_1 &= \frac{a^{1+\beta_1} \left(c'_1 + 2k\hat{A}_1 \frac{1}{a} \right) - b^{1+\beta_1} \left(a_1 + 2k\hat{A}_1 \frac{1}{b} \right)}{\beta_1(b^{2\beta_1} - a^{2\beta_1})}, \\ D_1 &= \frac{a^{1+\beta_1} b^{2\beta_1} \left(c'_1 + 2k\hat{A}_1 \frac{1}{a} \right) - a^{2\beta_1} b^{1+\beta_1} \left(a'_1 + 2k\hat{A}_1 \frac{1}{b} \right)}{\beta_1(b^{2\beta_1} - a^{2\beta_1})}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$s c(n\theta), c \hat{s}(n\theta)$ がそれぞれ $\cos(n\theta), -\sin(n\theta)$ の場合:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}'_1 &= -\frac{1}{4} \{ b(a_1 + b'_1) + a(c_1 + d'_1) \}, \\ B'_1 &= 2k\hat{A}'_1, \\ C'_1 &= \frac{a^{1+\beta_1} \left(-d'_1 + 2k\hat{A}'_1 \frac{1}{a} \right) - b^{1+\beta_1} \left(b'_1 + 2k\hat{A}'_1 \frac{1}{b} \right)}{\beta_1(b^{2\beta_1} - a^{2\beta_1})}, \\ D'_1 &= \frac{a^{1+\beta_1} b^{2\beta_1} \left(-d'_1 + 2k\hat{A}'_1 \frac{1}{a} \right) - a^{2\beta_1} b^{1+\beta_1} \left(-b'_1 + 2k\hat{A}'_1 \frac{1}{b} \right)}{\beta_1(b^{2\beta_1} - a^{2\beta_1})}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

同様に級数項の未知係数においてもプライムを付けて場合分けをすると, 次の連立 1 次方程式を解くことで係数が決定できる.

$s c(n\theta), c \hat{s}(n\theta)$ がそれぞれ $\sin(n\theta), \cos(n\theta)$ の場合:

$$\begin{bmatrix} k_3 b^{k_1} & k_4 b^{k_2} & l_3 b^{l_1} & l_4 b^{l_2} \\ k_3 a^{k_1} & k_4 a^{k_2} & l_3 a^{l_1} & l_4 a^{l_2} \\ -n\alpha_n b^{k_1} & n\alpha_n b^{k_2} & -n\beta_n b^{l_1} & n\beta_n b^{l_2} \\ -n\alpha_n a^{k_1} & n\alpha_n a^{k_2} & -n\beta_n a^{l_1} & n\beta_n a^{l_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n \\ d_n \\ a'_n \\ c'_n \end{bmatrix} \quad (30)$$

$s c(n\theta), c \hat{s}(n\theta)$ がそれぞれ $\cos(n\theta), -\sin(n\theta)$ の場合:

$$\begin{bmatrix} k_3 b^{k_1} & k_4 b^{k_2} & l_3 b^{l_1} & l_4 b^{l_2} \\ k_3 a^{k_1} & k_4 a^{k_2} & l_3 a^{l_1} & l_4 a^{l_2} \\ -n\alpha_n b^{k_1} & n\alpha_n b^{k_2} & -n\beta_n b^{l_1} & n\beta_n b^{l_2} \\ -n\alpha_n a^{k_1} & n\alpha_n a^{k_2} & -n\beta_n a^{l_1} & n\beta_n a^{l_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'_n \\ B'_n \\ C'_n \\ D'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ c_n \\ -b'_n \\ -d'_n \end{bmatrix} \quad (31)$$

ここに, k_i, l_i ($i = 1 \sim 4$) は次式となる.

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -1 + \alpha_n, \quad k_2 = -1 - \alpha_n, \\ k_3 &= 1 - n^2 + \alpha_n, \quad k_4 = 1 - n^2 - \alpha_n, \\ l_1 &= -1 + \beta_n, \quad l_2 = -1 - \beta_n, \\ l_3 &= 1 - n^2 + \beta_n, \quad l_4 = 1 - n^2 - \beta_n. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

以上から円形リングに対して内外境界 $r = a, b$ において Fourier 級数で面内の力が与えられる問題に対して応力関数・応力成分を求めることができる。

以下に簡単な場合について応力関数・応力成分としてこの節で求めた解を用いて求める。

内外境界に静水圧的な力を受ける円形リング

例えば, Fig. 2 に示すようなリングの内外境界に静水圧的な力 P_0, P_1 を受ける場合を考える。この場合の境界条件は次式のようにになる。

<境界条件>

$$\sigma_r|_{r=b} = -P_1, \tau_{r\theta}|_{r=b} = 0. \quad (33)$$

$$\sigma_r|_{r=a} = -P_0, \tau_{r\theta}|_{r=a} = 0. \quad (34)$$

式 (33), (34) より式 (18), (19) の係数は $a_0 = -2P_1, c_0 = -2P_0$ となりその他はゼロとなる。これらからすべての未知係数が定まって、それを式 (20), 式 (22)~(24) に代入すると応力関数, 応力成分が次式のようにになる。

<応力関数>

$$F = \tilde{A}_0 r^{1+\alpha_0} + \tilde{B}_0 r^{1-\alpha_0} \quad (35)$$

<応力成分>

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \tilde{A}_0(1+\alpha_0)r^{-1+\alpha_0} + \tilde{B}_0(1-\alpha_0)r^{-1-\alpha_0}, \\ \sigma_\theta &= \tilde{A}_0\alpha_0(1+\alpha_0)r^{-1+\alpha_0} - \tilde{B}_0\alpha_0(1-\alpha_0)r^{-1-\alpha_0}, \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

ここに係数 $\tilde{A}_0, \tilde{B}_0$ は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A}_0 &= \frac{P_1 b^{1+\alpha_0} - P_0 a^{1+\alpha_0}}{(1+\alpha_0)(a^{2\alpha_0} - b^{2\alpha_0})}, \\ \tilde{B}_0 &= \frac{P_0 a^{1+\alpha_0} b^{2\alpha_0} - P_1 a^{2\alpha_0} b^{1+\alpha_0}}{(1-\alpha_0)(a^{2\alpha_0} - b^{2\alpha_0})}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

ここで, これらの式に関する弾性定数を等方性弾性体のものに縮退させれば, 従来までに求められている古典的な等方性弾性体の解に帰着することが確認されている。

3・2 面外せん断応力が作用する場合

ここでは Fig. 1 に示す面外せん断の力が作用する問題の一般解を導く。この解は以前までに求められていないものである。ここで, Fourier 展開された力を境界条件とすると次式のようにになる。

<境界条件>

$$\tau_{rz}|_{r=b} = \frac{e_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (e_n \cos n\theta + f_n \sin n\theta). \quad (38)$$

Fig. 2. Circular ring subjected to hydrostatic pressure.

$$\tau_{rz}|_{r=a} = \frac{e'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (e'_n \cos n\theta + f'_n \sin n\theta). \quad (39)$$

転位を起こさない場合の応力関数は次式のようにになる。

<応力関数>

$$\phi(r, \theta) = E_0 \theta + \sum_{n=1}^{\infty} (E_n r^{n\lambda} + F_n r^{-n\lambda}) sc(n\theta). \quad (40)$$

ここに, $E_0, E_n, F_n (n=1, 2, \dots, \infty)$ は未知係数である。

式 (11), (16) と式 (40) より応力成分・変位成分は次式のようにになる。

<応力成分>

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rz} &= \frac{E_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} n (E_n r^{n\lambda-1} + F_n r^{-n\lambda-1}) c\hat{s}(n\theta), \\ \tau_{\theta z} &= - \sum_{n=1}^{\infty} n (E_n n\lambda r^{n\lambda-1} - F_n n\lambda r^{-n\lambda-1}) sc(n\theta). \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

<変位成分>

$$\frac{1}{a_{44}} u_z = E_0 \lambda^2 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (E_n \lambda r^{n\lambda} - F_n \lambda r^{-n\lambda}) c\hat{s}(n\theta). \quad (42)$$

ここに, λ は次式で表される弾性コンプライアンスの比である。

$$\lambda = \sqrt{\frac{a_{55}}{a_{44}}}. \quad (43)$$

境界条件より E_0 は次式のようにになる。

$$E_0 = \frac{1}{2} a e'_0. \quad (44)$$

また, 級数項は面内問題の場合と同様に $sc\theta, c\hat{s}\theta$ がどちらをとるかによって, 場合分けが必要になる。 $sc\theta, c\hat{s}\theta$ がそれぞれ $\sin\theta, \cos\theta$ をとる場合の係数を E_n, F_n とし, $sc\theta, c\hat{s}\theta$ がそれぞれ $\cos\theta, -\sin\theta$ をとる場合には係数にプライムを付けて E'_n, F'_n とする。境界条件式 (33), (34) からこの係数を決定すると次式のようにになる。

$sc(n\theta), c\hat{s}(n\theta)$ がそれぞれ $\sin(n\theta), \cos(n\theta)$ の場合:

$$\left. \begin{aligned} E_n &= \frac{e'_n a^{n\lambda+1} - e_n b^{n\lambda+1}}{n(a^{2n\lambda} - b^{2n\lambda})}, \\ F_n &= \frac{a^{n\lambda} b^{n\lambda} (e_n a^{n\lambda} b - e'_n a b^{n\lambda})}{n(a^{2n\lambda} - b^{2n\lambda})}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$sc(n\theta), c\hat{s}(n\theta)$ がそれぞれ $\cos(n\theta), -\sin(n\theta)$ の場合:

$$\left. \begin{aligned} E'_n &= \frac{f_n b^{n\lambda+1} - f'_n a^{n\lambda+1}}{n(a^{2n\lambda} - b^{2n\lambda})}, \\ F'_n &= \frac{a^{n\lambda} b^{n\lambda} (f'_n a b^{n\lambda} - f_n a^{n\lambda} b)}{n(a^{2n\lambda} - b^{2n\lambda})}. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

以上からリングに対して内外境界 $r = a, b$ において Fourier 級数で面外せん断の力が与えられる問題に対しては応力関数・応力成分を求めることができる。

4 円孔周縁に集中力が作用する問題の基本解

第3章では級数の型で一般解を求めた。ここでは Fig. 3 に示すような円孔を有する極異方性弾性無限体の円孔周縁に集中力が作用する問題を設定し, 式の利用が簡便であること, 各種荷重問題に適用できるように理論の拡張が可能であること, また級数解のように項数によって解の精度が変化しないことなどにより閉じた型の解を提示し, その数値計算例を示す。

Fig. 3. A concentrated force on the surface of circular hole.

4・1 面内の集中力が作用する場合

Fig. 3 に示すように座標の原点に極異方性の中心をもち原点から半径 a の円孔をもつ無限体を考える。その円孔周縁の任意の点に半径方向と周方向の面内の集中力 P , Q が作用する問題を考える。この問題における応力関数、応力成分は著者らの論文¹⁰⁾により示されている。しかしながら、等方性に対する解は円孔の半径 a をゼロとすると、等方性無限弾性平板の原点に集中力が作用する問題の解 (Kelvin 解) に縮退されるのに対し、これまでに示されていた極異方性に関する解は円孔の半径 a をゼロとしても、極異方性無限平板の原点に集中力が作用する問題の解に縮退させることができない矛盾点があった。このことを克服し、さらに任意の点に集中力が作用する解を本論文では示す。なお、これらの解の弾性定数を縮退させて等方性のものとするとき従来までの等方性の解と一致することが確認されている。

• 集中力 P が作用する場合

< 応力関数 >

$$F = -\frac{P}{\pi} \left\{ \varphi r \sin \theta_0 - k r \ln r \cos \theta_0 - \frac{1}{2} r \theta_0 \sin \theta_0 + \frac{a^{\alpha_0}}{2(1-\alpha_0)} r^{1-\alpha_0} - \frac{\alpha^{\beta_1}}{2\beta_1} (1+2k) r^{1-\beta_1} \cos \theta_0 \right\}. \quad (47)$$

< 応力成分 >

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{P}{\pi} \left\{ -\frac{2(r-a \cos \theta_0)^2 (r \cos \theta_0 - a)}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta_0)^2} - (k+1) \frac{\cos \theta_0}{r} + \frac{a^{\alpha_0}}{2} r^{-1-\alpha_0} + \frac{a^{\beta_1}}{2} (1+2k) r^{-1-\beta_1} \cos \theta_0 \right\}, \\ \sigma_\theta &= -\frac{P}{\pi} \left\{ \frac{2a^2 (r \cos \theta_0 - a) \sin^2 \theta_0}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta_0)^2} - k \frac{\cos \theta_0}{r} - \frac{1}{2} \alpha_0 a^{\alpha_0} r^{-1-\alpha_0} + \frac{a^{\beta_1}}{2} (1-\beta_1)(1+2k) r^{-1-\beta_1} \cos \theta_0 \right\}, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{P}{\pi} \left\{ \frac{a \{ 2(a^2 + r^2) \cos \theta_0 - 2ar(1 + \cos^2 \theta_0) \} \sin \theta_0}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta_0)^2} - k \frac{\sin \theta_0}{r} + \frac{a^{\beta_1}}{2} (1+2k) r^{-1-\beta_1} \sin \theta_0 \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

ここに、係数 φ は Fig. 3 に示す力の作用点からの角度で α_0 , β_1 , k は次式とする。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}, \quad G_1 = \frac{1}{a_{22}} (a_{11} + 2a_{12} + a_{66}), \\ \beta_1 &= \sqrt{(1+G_1)}, \quad k = \frac{(a_{11} + a_{12})}{(a_{11} + 2a_{12} + a_{22} + a_{66})}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

また $\theta_0 = \theta - \theta_1$ である。

• 集中力 Q が作用する場合

< 応力関数 >

$$F = \frac{Q}{\pi} \left\{ \varphi r \cos \theta_0 + k r \ln r \sin \theta_0 - \frac{1}{2} r \theta \cos \theta_0 + \frac{a}{2} \theta_0 + (2k+1) \frac{a^{\beta_1}}{2\beta_1} r^{1-\beta_1} \sin \theta_0 \right\}. \quad (50)$$

< 応力成分 >

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{Q}{\pi} \left\{ -\frac{2r(r-a \cos \theta_0)^2 \sin \theta_0}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta_0)^2} + (k+1) \frac{\sin \theta_0}{r} - (2k+1) \frac{a^{\beta_1}}{2} r^{-1-\beta_1} \sin \theta_0 \right\}, \\ \sigma_\theta &= \frac{Q}{\pi} \left\{ -\frac{2a^2 r \sin^3 \theta_0}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta_0)^2} + k \frac{\sin \theta_0}{r} + (2k+1) \frac{a^{\beta_1}}{2} r^{-1-\beta_1} (\beta_1 - 1) \sin \theta_0 \right\}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{Q}{\pi} \left\{ \frac{2ar(a \cos \theta_0 - r) \sin^2 \theta_0}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta_0)^2} - k \frac{\cos \theta_0}{r} + \frac{a}{2} \frac{1}{r^2} + (2k+1) \frac{a^{\beta_1}}{2} r^{-1-\beta_1} \cos \theta_0 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

4・2 面外せん断の集中力が作用する場合

面内の問題と同様の無限体を考える。この媒体に Fig. 3 のように円孔周縁の任意の点に奥行き方向の集中力 R が作用する問題を考える。この問題における解析解はこの論文により初めて得られたものであるため、その導出を示すこととする。ここでは第 3・2 節で得られた円形リングの内外境界に面外せん断の力が作用する場合の解を用いてその導出を行う。円孔を有する無限体の問題とするために外半径 b を $b \rightarrow \infty$ とする。この場合の境界条件、応力関数、応力成分は次式ようになる。

< 境界条件 >

$$\tau_{rz}|_{r=a} = \frac{e'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (e'_n \cos n\theta + f'_n \sin n\theta). \quad (52)$$

< 応力関数 >

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{2} a e'_0 \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{\alpha_n+1}}{n r^{\alpha_n}} \{ e'_n \sin(n\theta) - f'_n \cos(n\theta) \}. \quad (53)$$

< 応力成分 >

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rz} &= \frac{1}{2} a e'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{\alpha_n+1}}{r^{\alpha_n+1}} \{ e'_n \cos(n\theta) - f'_n \sin(n\theta) \}, \\ \tau_{\theta z} &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda \frac{a^{\alpha_n+1}}{r^{\alpha_n+1}} \{ e'_n \sin(n\theta) - f'_n \cos(n\theta) \}. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

ここで集中力 R は Fourier 級数展開することができ、その式を $f(\theta)$ とすると力が $(x, y) = (0, a)$ の位置に作用する場合には次式となる。

$$f(\theta) = \frac{Z}{2a\pi} + \frac{Z}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos(n\pi/2) \cos n\theta + \sin(n\pi/2) \sin n\theta) \quad (55)$$

ところで、この級数に関連する変換公式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \sin nx &= \tan^{-1} \frac{s \times \sin x}{1 - s \times \cos x} \quad (s^2 \leq 1), \\ \sum_{n=1}^{\infty} s^n \cos nx &= \frac{s(\cos x - s)}{1 - 2s \times \cos x + s^2} \quad (s^2 < 1). \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

ここに, s は次式である.

$$s = \left(\frac{a}{r} \right)^{\lambda}. \quad (57)$$

式 (52) と式 (55) より係数 e'_0, e'_n, f'_n を決定し, それらの係数を式 (53), (54) に代入した後に, 式 (56) により整理すれば閉じた形で応力関数, 応力成分を求めることができる. さらに任意の角度 θ_1 の円孔周縁に集中力 R が作用する問題に座標変換すると最終的に次式が導かれる.

< 応力関数 >

$$\phi = \frac{R}{2\pi} \left(\theta_0 + 2 \tan^{-1} \frac{s \times \sin \theta_0}{1 - s \times \cos \theta_0} \right). \quad (58)$$

< 応力成分 >

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rz} &= \frac{R}{\pi} \left\{ \frac{1}{2r} + \frac{1}{r} \frac{s(\cos \theta_0 - s)}{1 - 2s \times \cos \theta_0 + s^2} \right\}, \\ \tau_{\theta z} &= \frac{R}{\pi} \frac{\lambda}{r} \frac{s \times \sin \theta_0}{1 - 2s \times \cos \theta_0 + s^2}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

4・3 数値計算例

4・3・1 面内問題の数値計算例 ここでは Fig. 3 に示す面内の集中力 P, Q が $\theta_1 = 0$ に作用する場合についての数値計算例を示す. また極異方性の影響を見るために次式で表される半径方向と周方向の弾性定数の比 n を

$n = 5, 1, 1/5$ の二種類に変化させる.

$$n = \frac{E_r}{E_\theta}. \quad (60)$$

また, ここで示す図は最大せん断応力 $\tau_{\max}$ の等高線図であり, $\tau_{\max}$ は次式で与えられる.

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2}. \quad (61)$$

これらの数値計算結果はそれぞれの集中力と円孔半径で $\tau_{\max} a^2 / P, \tau_{\max} a^2 / Q$ の形で無次元化されたものを示している.

Fig. 4 (b), Fig. 5 (b) は $n = 1$ の図であり, したがって弾性定数は等方性弾性体のものと同じである. この応力分布は従来までに求められていた古典的な弾性論の解と一致することが確認されている. また, 極異方性弾性体の応力分布として, Fig. 4 (a), Fig. 5 (a) は $n = 5$ の場合で, 力の作用位置から x 軸の正の方向に大きな応力が伝達されていることがわかる. Fig. 4 (c), Fig. 5 (c) は $n = 1/5$ の場合で, それぞれの(a)の図に比べ領域全体にわたって応力が分散されていることがわかる.

4・3・2 面外せん断問題の数値計算例 ここでは Fig. 3 に示す面外せん断の集中力 R が作用する場合についての数値計算例を示す. また極異方性の影響を見るために次式で表されるせん断弾性定数の比 m を $m = 5, 1, 1/5$ の二種類に変化させる.

$$m = \frac{G_{rz}}{G_{\theta z}} \quad (62)$$

Fig. 4. Maximum shear stress contours under the concentrated force P.

Fig. 5. Maximum shear stress contours under the concentrated force Q.

Fig. 6. Maximum shear stress contours under the concentrated force R.

また、ここで示す図は最大せん断応力 $\tau_{\max}$ の等高線図であり、この場合の $\tau_{\max}$ は次式で与えられる。

$$\tau_{\max} = \sqrt{(\tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2)}. \quad (63)$$

これらの数値計算結果は $\tau_{\max} a^2 / R$ の形で無次元化されたものを示している。

Fig. 6 (b) は $m = 1$ の図であり、この応力分布は従来までに求められていた古典的な弾性論の解と一致することが確認されている。また、極異方性弾性体の応力分布として、Fig. 6 (a) は $m = 5$ の場合で力の作用位置から x 軸の正の方向に大きな応力が伝達されていることがわかる。Fig. 6 (c) は $m = 1/5$ の場合で領域全体にわたって応力が円状に分散されていることがわかる。

5 結 言

本論文では極異方性弾性体における幾つかの基本解をその誘導とともに提示した。

円形リング問題の面内問題については以前までに誤って提示されていた一般解を修正し、新たに変位に対する条件を加えることで完全な未知係数の決定ができるようになった。また、面外せん断問題における一般解は本論文で初めて提示されたものとなっている。

円孔周縁に集中力が作用する問題については、面内問題、面外せん断問題についての解析解を示し、面外せん断問題については、その導出過程も示した。また、これらの数値計算例として極異方性による応力分布の変化をみるために弾性定数の比で表されるようなパラメーター

m および n を新たに導入し、最大せん断応力の等高線図を示した。

この論文において示したものは、これらを利用して今後の応用や具体例への適用が種々期待できるものである。また、本論文で示した解は弾性定数を等方性に縮退させると従来までの等方性の解に一致することが確認された。

参 考 文 献

- 1) S. G. Lekhnitskii, "Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body", p.223 (1963) Holden-Day Inc.
- 2) N. J. Pagano, J. Appl. Mech., **39**, 791 (1972).
- 3) N. J. Pagano and G. P. Tandon, Composites Sci. Tech., **31**, 562 (1988).
- 4) Y. Mikata and M. Taya, J. Comp. Mat., **19**, 544 (1985).
- 5) N. J. Hoff, J. Appl. Mech., **48**, 563 (1981).
- 6) Y. C. Das and G. A. Hazen, J. Eng. Mech., Proc. ASCE, **112**, 904 (1986).
- 7) K. Y. Liu and C. W. Bert, J. Eng. Mech., Proc. ASCE, **112**, 916 (1986).
- 8) J. Nowinski, Arch. Mech. Stos., **9**, 221 (1957).
- 9) C. O. Hogan and S. C. Baxter, J. Elasticity, **42**, 31 (1996).
- 10) 平島健一, 倪 信義, 日本機学会論文集, A-64, 80 (1998).