不規則過大荷重下でのき裂進展に対する新しい確率論的アプローチ†

田中 泰明*

A New Probabilistic Approach for Describing Fatigue Crack Growth under Random Overloads

by

Hiroaki TANAKA*

A new probabilistic model describing the fatigue crack growth with retardation due to random overloads is developed. First, a crack growth equation is formulated based upon the Elber law, where a concept of retardation factor is introduced to quantify the retardation effect. Next, a new approach is discussed for describing the temporal variation of the retardation factor by the use of a system of differential equations. The validity of the obtained crack growth model is then shown by comparing with experimental results by McMaster et. al. Next, the discussion is made on an extension of the proposed crack growth model to a probabilistic model, in which the overload process is mathematically modeled as a compound Poisson process to describe the random property associated with loading times as well as stress of overloads. The proposed probabilistic model takes a form of a system of random differential equations of Itô type driven by the compound Poisson process. Finally, numerical demonstration is carried out for generating crack growth samples based upon the proposed model.

Key words : Fatigue crack, Random crack growth, Probabilistic model, Retardation, Overload, Random differential equation

1 緒 言

不規則荷重下でのき裂進展を論じる上で、非線形破壊力学の効果を考慮に入れることは重要であり、特に過大荷重によるき裂先端の大規模降伏に起因するき裂進展速度の遅延現象に対しては多くの研究報告がある。このような遅延現象は、本来非線形破壊力学の立場から論ずるものであるが、線形破壊力学を部分的に修正することによりき裂成長方程式を構成するという手法が有効であり、Elberにより提唱された有効応力振幅の概念¹⁾に基づく研究はその代表的なものである。これは、過大荷重により生じたき裂先端の降伏域により、き裂開口に要する応力値が一時的に増加し、このためにき裂進展に寄与する応力成分の減少が生じて、き裂進展速度の鈍化に結びつくと考えられるものであり、遅延現象の物理的原因として最も広く支持されているものであると言ってよい。

さて、実稼働環境下においては、過大荷重の到着時刻、過大荷重時に発生する応力値、の両者を事前に特定することは困難であり、確率論的観点から遅延現象を記述し得ることが望ましい。しかしながら、これまでの研究においては、過大荷重の負荷過程を確率過程として定式化することに立脚したものがほとんど見られず、また成長方程式そのものの構成が、そのような定式化に結びつけることが困難なものが多く、このような事情を鑑み、本論文では、過大荷重の負荷時刻・応力値の両者が共に不規則である場合にも対処し得るようなき裂成長方程式を新たに提案する。さらに、そのように構成したき裂成長

方程式に基づき、過大荷重の負荷過程がいわゆる複合Poisson過程で記述される、すなわち、過大荷重の到着がPoisson過程で記述され、かつ各応力値が互いに独立に分布するという想定の下に、過大荷重下でのき裂成長方程式を確率微分方程式に拡張することを試みる。

2 Elber則に基づくき裂成長方程式と遅延因子

2・1 き裂成長方程式の定式化

本論文では、き裂長の時間成長が、周知のElber則¹⁾に従うものとする。すなわち、

$$\frac{da}{dn} = C_0 (\Delta K_{\text{eff}})^m \quad (1)$$

ここで、 a はき裂長、 n は応力負荷のサイクル数、 C_0 と m は材料定数、 ΔK_{eff} は過大荷重によるき裂開閉口挙動を考慮に入れた有効応力拡大係数範囲を表す。以下では、パラメータ C_0 が m に依存した物理的次元を持つことを避けるために、式 (1) を次のように無次元表示しておく。

$$\frac{1}{a_{\text{ref}}} \frac{da}{dn} = \varepsilon_0 \left(\frac{\Delta K_{\text{eff}}}{K_{\text{ref}}} \right)^m \quad (2)$$

ここで、 a_{ref} 、 K_{ref} は、それぞれき裂長、応力拡大係数の参照値であり、パラメータ ε_0 (無次元進展抵抗) は、 C_0 と次の関係で結ばれるものである。

$$C_0 = a_{\text{ref}} \varepsilon_0 (\Delta K_{\text{ref}})^{-m} \quad (3)$$

き裂形状としては、中央貫通き裂や縁き裂等の2次元き裂を想定し、有効応力拡大係数範囲が次式で与えられるものとする。

† 原稿受理 平成 15 年 4 月 14 日 Received Apr. 14, 2003

* 正 会 員 京都大学情報科学研究科複雑科学専攻 〒606-8501 京都市左京区吉田本町, Dept. of Applied Analysis and Complex Dynamical Systems, Kyoto Univ., Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501

$$\Delta K_{\text{eff}} = \alpha \Delta S_{\text{eff}} \sqrt{\pi a} F(a) \quad (4)$$

ここで、 α はき裂形状に依存する幾何因子、 $F(\cdot)$ は有限板幅補正項であり、 ΔS_{eff} は有効応力振幅を表す。応力拡大係数の参照値 K_{ref} を、参照応力値 S_{ref} を用いて、

$$K_{\text{ref}} = \alpha S_{\text{ref}} \sqrt{\pi a_{\text{ref}}} \quad (5)$$

と設定した上で式 (4) を式 (2) に代入すると、無次元化したき裂長 $X = a/a_{\text{ref}}$ の時間成長方程式として、次式を得ることができる。

$$\frac{dX}{dn} = \varepsilon_0 \left(\frac{\Delta S_{\text{eff}}}{S_{\text{ref}}} \right)^m g(X) \quad (6)$$

$$g(X) = X^{m/2} F(a_{\text{ref}} X)^m \quad (7)$$

2・2 遅延因子の導入

n サイクル目の応力負荷における最大応力値を $S_n^{(+)}$ 、最小応力値を $S_n^{(-)} (\geq 0)$ とすると、そのときの有効応力振幅 $\Delta S_{\text{eff},n}$ は次式で与えられる。

$$\Delta S_{\text{eff},n} = \begin{cases} 0 & (S_n^{(+)} \leq S_{\text{eff},n}^{(-)}) \\ S_n^{(+)} - S_{\text{eff},n}^{(-)} & (S_n^{(-)} < S_{\text{eff},n}^{(-)} < S_n^{(+)}) \\ S_n^{(+)} - S_n^{(-)} & (S_{\text{eff},n}^{(-)} \leq S_n^{(-)}) \end{cases} \quad (8)$$

ここで、 $\Delta S_{\text{eff},n}^{(-)}$ はき裂開口に関する閾値応力値に対応する量であり、これを n サイクル目の有効閾値応力と呼ぶことにする。本論文では、過大荷重とそれ以外の通常荷重が区別できるものとし、通常荷重については、各応力サイクルにおける最大応力値、最小応力値が共に一定である場合（それぞれ $S_0^{(+)}$ 、 $S_0^{(-)}$ と記す）に話を限定することとする。したがって、通常荷重における応力振幅は、

$$\Delta S_0 = S_0^{(+)} - S_0^{(-)} \quad (9)$$

で一定であるものとする。Fig. 1 は過大荷重と通常荷重の負荷の様子を模式的に図示したものである。

応力の参照値 S_{ref} を、式 (9) で与えられる通常荷重時の応力振幅により、 $S_{\text{ref}} = \Delta S_0$ と選定し、式 (8) を式 (6) に代入して整理することにより、き裂成長方程式は次のように書き換えられることになる。

$$\frac{dX}{dn} = \varepsilon_0 R(n) g(X) \quad (10)$$

$$R(n) = \begin{cases} 0 & (S_0^{(+)} \leq S_{\text{eff},n}^{(-)}) \\ (1 - \Delta S_{\text{eff},n}^*)^m & (S_0^{(-)} < S_{\text{eff},n}^{(-)} < S_0^{(+)}) \\ 1 & (S_{\text{eff},n}^{(-)} \leq S_0^{(-)}) \end{cases} \quad (11)$$

ここで、

$$\Delta S_{\text{eff},n}^* = \frac{\Delta S_{\text{eff},n}^{(-)} - S_0^{(-)}}{\Delta S_0} \quad (12)$$

は、 $S_0^{(-)} < S_{\text{eff},n}^{(-)} < S_0^{(+)}$ という条件下での n サイクル目の無次元化された有効応力振幅を表す。

過大荷重によるき裂閉口効果をほぼ無視し得る場合、すなわち、

$$S_{\text{eff},n}^{(-)} \leq S_0^{(-)} \quad (13)$$

と見なしてよい場合、式 (11) により、 $R(n) \approx 1$ となることから、式 (10) は、

Fig. 1. Schematic illustration of a stress process including an overload.

$$\frac{dX}{dn} = \varepsilon_0 g(X) \quad (14)$$

に帰着される。これは、過大荷重による非線形効果（き裂閉口挙動）を伴わないき裂成長方程式に他ならない。ここでは、過大荷重以外の通常荷重時には、常に式 (13) が良い近似で成立しているものとし、式 (10) で与えられる、過大荷重の影響を考慮に入れたき裂進展速度を $(dX/dn)_{\text{overload}}$ と記すと、これはその効果を考慮に入れない進展速度 $(dX/dn)_{\text{no overload}}$ と次の関係で結ばれることになる。

$$R(n) = \frac{\left(\frac{dX}{dn} \right)_{\text{overload}}}{\left(\frac{dX}{dn} \right)_{\text{no overload}}} \quad (15)$$

すなわち、因子 $R(n)$ は、過大荷重によるき裂閉口挙動に起因するき裂進展の遅延の効果を定量化する因子であると考えてよい。²⁾そこで、 $R(n)$ を遅延因子と呼ぶことにする。

3 有効閾値応力の定式化

有効閾値応力 $S_{\text{eff},n}^{(-)}$ に対しては、き裂閉口応力に基づく定量化³⁾の他に、Willenborg⁴⁾の提案するリセット応力の概念に基づくものが報告されている。

き裂閉口応力モデルは、過大荷重負荷後にき裂先端に生ずる大規模塑性域に起因して生ずるき裂閉口応力に立脚するものである。き裂先端に大規模塑性域が発生すると、他の部位が弾性変形性を維持することから相対的な変形差異が生じ、応力除荷後もき裂が完全に閉口しないため、次の応力負荷時のき裂開口は、ある程度の応力値に達するまで起こらない。このような観点から、有効閾値応力の定量化にき裂閉口応力を用いるのがこのモデルであり、例えば Dominguez らによる報告³⁾がある。このモデルでは有効閾値応力の物理的な意味が明確となるが、き裂進展に伴うき裂閉口応力の開放について明確な理論式が見いだされていないことや、過大荷重の負荷時点でも小規模降伏条件が維持されていない場合には、開口応力と閉口応力とが必ずしも一致しないなどの問題点も含んでいる。

これに対して、リセット応力モデルでは、過大荷重負

荷後に発生するき裂先端の塑性域よりも、さらに新たな塑性域を生じさせるかどうかの閾値となるリセット応力を用いて、有効閾値応力の見積もりを行うもので、例えば Veers は $S_{\text{eff},n}^{(-)}$ がリセット応力に比例するとの関係式を提案している。⁵⁾ このモデルでは、き裂先端の塑性域の大きさに対する表式が得られれば、き裂進展に伴う閾値応力の減少を定性的に追うことができるが、有効閾値応力とリセット応力との間に Veers の想定したような比例関係が存在するという理論的根拠が存在しないため、ここの部分の定式化に経験式をあてはめざるを得ない。

このように、有効閾値応力に対しては明確な定式化が得られていないのが現状であることから、本論文では上述のモデルにおける特性が反映されるように、できるだけ一般的な対応の可能な定式化を試みる。

$n = n_{\text{ol}}$ において、応力値 S_{ol} の過大荷重が負荷される場合を考える。この負荷直後の、き裂先端から距離 y の位置での有効閾値応力値を ΔS_0 で無次元化したものを $Q(y; S_{\text{ol}}, x_{\text{ol}})$ とする。ここで、 x_{ol} は、 $n = n_{\text{ol}}$ での過大荷重負荷直前のき裂長を表す。さらに、

$$Q(0; S_{\text{ol}}, x_{\text{ol}}) - \frac{S_0^{(-)}}{\Delta S_0} = q_0(S_{\text{ol}}, x_{\text{ol}}) \quad (16)$$

$$\frac{Q(y; S_{\text{ol}}, x_{\text{ol}}) - S_0^{(-)}/\Delta S_0}{q_0(S_{\text{ol}}, x_{\text{ol}})} = h(y; S_{\text{ol}}, x_{\text{ol}}) \quad (17)$$

と置く。関数 $h(y; S_{\text{ol}}, x_{\text{ol}})$ は、 $h(0; S_{\text{ol}}, x_{\text{ol}}) = 1$ を満たす、 y についての減少関数で、き裂先端から距離が離れるにつれて閾値応力値が次第に減少していく特性を表す関数である。これらの様子を Fig. 2 に模式的に示す。以上により、過大荷重後、すなわち $n > n_{\text{ol}}$ での、式 (12) で定義される無次元化された有効応力振幅は、

$$\Delta S_{\text{eff},n}^* = q_0(S_{\text{ol}}, x_{\text{ol}}) h(X(n) - x_{\text{ol}}; S_{\text{ol}}, x_{\text{ol}}) \quad (18)$$

で与えられることになる。

先に述べた通り、通常荷重での応力振幅値 $S_0^{(+)}$ が確定的であると仮定しているため、 $q_0(S_{\text{ol}}, x_{\text{ol}}) \geq 1$ となった場合に次の過大荷重が負荷されるまでき裂が停留するという事態が起こり得る。実際の不規則荷重下ではこのような事態が生じないという保証はないが、発生する過大荷

重が通常荷重での応力振幅を大幅に超えるという状況下では、疲労き裂の成長による破壊モードよりもむしろ過大荷重による瞬間的な破壊モードの方が支配的となると考えられることから、本論文ではその可能性を排除して考える。すなわち、

$$0 \leq q_0(S_{\text{ol}}, x_{\text{ol}}) < 1 \quad (19)$$

が成立するものとする。さらに、通常荷重時での最小応力値 $S_0^{(-)}$ は応力振幅値 ΔS_0 に比して十分小さいものとし、これにより式 (17) で定義される関数 h は非負値であるものとする。これらの仮定下では、式 (11) により、過大荷重負荷後の遅延因子 $R(n)$ は次のようになる。

$$R(n) = \{1 - q_0 h(X(n) - x_{\text{ol}})\}^m \quad (n \geq n_{\text{ol}}) \quad (20)$$

以上より、き裂の成長方程式は次のようになる。

$$\frac{dX}{dn} = \varepsilon_0 R(n) g(X), \quad (21)$$

$$R(n) = \begin{cases} 1 & (n < n_{\text{ol}}) \\ \{1 - q_0 h(X(n) - x_{\text{ol}})\}^m & (n \geq n_{\text{ol}}) \end{cases} \quad (22)$$

4 遅延因子の時間成長方程式の構築

遅延因子の時間変動を表す式 (22) は、過大荷重の負荷時刻に対応する n_{ol} 、およびその時点でのき裂長 x_{ol} を陽に含んでいるため、過大荷重の負荷過程を事前に特定できない場合には直接的に用いることができない。このため、過大荷重の負荷が不規則な特性を有する場合への対応が極めて悪い。これまでの研究では、ランダムな過大荷重への対応を念頭に置いたものが少なく、特にこの問題点について打開を試みた報告は皆無であると言ってよい。そこで、本論文では、き裂長の時間変動を記述する式 (21) との連立という形で、前節で構成した遅延因子の時間成長を記述する方程式の再構築を行い、上述の問題点の解消を行う。ただし、以下では、サイクル数 n は連続な時間変数として取り扱い、“時刻 n ” という呼び方を用いることにする。

式 (22) を時間変数 n で微分した、

$$\frac{dR}{dn} = \begin{cases} 0 & (n < n_{\text{ol}}) \\ m(1 - q_0)^{m-1}(-q_0)h' \frac{dX}{dn} & (n > n_{\text{ol}}) \end{cases} \quad (23)$$

に式 (21) を代入して整理すると、次式を得る。

$$\frac{dR}{dn} = \varepsilon_0 \Psi(R) g(X) \quad (24)$$

$$\Psi(R) = m q_0 R^{\frac{2m-1}{m}} \phi\left(\frac{1-R^{\frac{1}{m}}}{q_0}\right) \quad (25)$$

ここで、関数 ϕ は、 $\phi(h) = -dh(y)/dy$ かつ $\phi(0) = 1$ を満たす関数（閾値応力の空間的減衰を表す関数 h が与えられれば一意的に定まる）であり、 $n < n_{\text{ol}}$ では $R(n) = 1$ となることを用いてある。

閾値応力の減衰形状として、指数関数的減衰、すなわち、

$$h(y; S_{\text{ol}}, x_{\text{ol}}) = \exp\left\{-\frac{y}{\ell(S_{\text{ol}}, x_{\text{ol}})}\right\} \quad (26)$$

Fig. 2. Spatial variation of the nondimensional effective threshold stress.

を仮定できるならば、 $\phi(h) = h/\ell(S_{ol}, x_{ol})$ であり、これより関数 Ψ は次のようになる。

$$\Psi(R; S_{ol}, x_{ol}) = \frac{m}{\ell(S_{ol}, x_{ol})} R^{\frac{2m-1}{m}} \left(1 - R^{\frac{1}{m}}\right) \quad (27)$$

閾値応力値の減衰の定式化に関しては、Dominguez らによる線形減衰モデル³⁾や、Dolinski らによるリセット応力概念に基づくモデル⁶⁾などが提案されてきているが、本論文では解析的取り扱いの容易さ等を考慮して、上述の指数減衰モデルを用いることにする。

式 (26) 中に現れる $\ell(S_{ol}, x_{ol})$ は、過大荷重によって発生した大規模降伏域による閾値応力値の上昇傾向の継続の大きさを表すもので、生じた降伏域の大きさ（これを参照き裂長 a_{ref} で無次元化したものを $r_Y(S_{ol}, x_{ol})$ と記す）に相当すると考えるのが自然であることから、

$$\ell(S_{ol}, x_{ol}) = r_Y(S_{ol}, x_{ol}) \quad (28)$$

を仮定する。降伏域の大きさ $r_Y(S_{ol}, x_{ol})$ の見積もりについては、例えば Dugdale による評価式⁸⁾

$$\begin{aligned} r_Y(S_{ol}, x_{ol}) &= \frac{1}{a_{ref}} \frac{\pi K_{ol}^2}{8\sigma_{ys}^2} \\ &= \frac{\pi^2 \alpha S_{ol}^2 x_{ol} F^2(a_{ref} x_{ol})}{8\sigma_{ys}^2} \end{aligned} \quad (29)$$

を適用することが考えられる。ここで、 α_{ys} は降伏応力である。この評価式は、過大荷重が負荷される直前で小規模降伏の条件が成立していれば、よい精度を与えることが期待できるが、そうでない場合には十分な精度を得られない可能性もある。しかし、解析的な評価式としては他に有力なものが存在しないことと、過大荷重の負荷が希であれば、負荷直前での小規模降伏条件がほぼ成立していると考えられることから、本論文では式 (29) を用いることとする。

式 (28)、(29) を式 (27) に代入すると、遅延因子の時間変動を支配する関数 Ψ は次のようになることがわかる。

$$\Psi(R; S_{ol}, x_{ol}) = \frac{\psi_1(R) \psi_2(x_{ol})}{S_{ol}^2} \quad (30)$$

$$\psi_1(R) = mR^{\frac{2m-1}{m}} \left(1 - R^{\frac{1}{m}}\right) \quad (31)$$

$$\psi_2(x_{ol}) = \frac{8\sigma_{ys}^2}{\pi^2 \alpha \beta x_{ol} F^2(a_{ref} x_{ol})} \quad (32)$$

5 実験データとの比較

ここでは、前節までに構成した過大荷重下でのき裂成長方程式によるき裂成長曲線の推定精度を、実験データと比較して検証する。

比較したデータは、McMaster らによるアルミ合金 2024-T531 (0.2% 降伏応力 $\alpha_{ys} = 373$ [MPa]) に対して行われた疲労試験データである。⁷⁾ 疲労試験は、通常応力時の応力振幅 ΔS_0 が 48.5 [MPa]、応力比 0.1 の下で、板幅 100 [mm]、板厚 6 [mm] の試験片に対して行われたもので、き裂形状は中央貫通き裂（幾何形状因子 $\alpha = 1$ ）、初期き裂長は 20 [mm] である。試験においては、き裂長が約 40 [mm] に成長した段階で $S_{ol} = 1.75\Delta S_0 \approx 84.85$ [MPa] の過大荷重が 1 回負荷されている。

Fig. 3. Comparison between experimental data⁷⁾ and proposed model.

Fig. 3 は、McMaster らの試験データ（図中○印）と、本モデルより得られる成長予測曲線（図中実線）をプロットしたものである。ここで、式 (1) における材料定数は、上述のアルミ合金 2024-T531 に対する疲労試験データから、 $C_0 = 1.01237 \times 10^{-14}$ 、 $m = 4.1925$ とし、¹⁰⁾ 有限板幅補正は W を板幅として、

$$F(a) = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a}{2W}\right)} \quad (33)$$

と設定した。また、式 (22) の過大荷重負荷直後の値 $(1-q_0)^m$ については、その後のき裂成長曲線が実験データによくフィットするように、 $(1-q_0)^m = 0.04$ と設定した。なお、き裂成長曲線は、式 (21)、(24) の連立微分方程式を 4 次の Runge-Kutta 法で数値的に積分することにより生成した。

この結果から、本論文でのモデルによって単一過大荷重下でのき裂進展の遅延現象がよく再現できることがわかる。

6 複数過大荷重下での成長方程式

6.1 基本的な仮定

$n = n_{ol}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$) で過大荷重が負荷されるものとし、 i 番目の過大荷重での最大応力値を $S_{ol}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$) とする。また、 i 番目の過大荷重負荷直前のき裂長を $x_{ol}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$) と記しておく。

i 番目の過大荷重が負荷される段階で、き裂先端に残存する塑性域の大きさを $z_1^{(-)}$ とする。 $(i-1)$ 番目までの過大荷重により生成された塑性域をき裂がほぼ貫通している場合、き裂先端では小規模降伏条件がほぼ成立、すなわち $z_1^{(-)} \approx 0$ が成立していると考えてよい。この場合新たな過大荷重によってき裂先端の塑性域の大きさはリセットされることになり、その大きさは Dugdale 式が適用できる場合、式 (29) で定義される関数 r_Y を用いて $r_Y(S_{ol}^{(i)}, x_{ol}^{(i)})$ で与えられることになる。

これに対して、例えば過大荷重による応力値がそれほど大きくない場合や、過大荷重間の時間間隔が短い場合には、 $r_Y(S_{ol}^{(i)}, x_{ol}^{(i)}) < z_1^{(-)}$ となる可能性があり、この場合には過大荷重直後のき裂先端塑性域の大きさは $z_1^{(-)}$ のまま変化しない。後者の可能性を考慮に入れるとモデルが

非常に複雑となるが、本論文では過大荷重が通常荷重と区別し得ること、および過大荷重の発生が比較的希な事象であることを基本的に仮定していることから、後者の可能性を排除し、過大荷重によりき裂先端塑性域の大きさは式 (29) で定義される関数 r_V にリセットされるものとする。

以上の仮定の下では、遅延因子 $R(n)$ の時間成長方程式は次のようになる。

$$\frac{dR}{dn} = \begin{cases} 0 & (0 < n < n_{ol}^{(1)}) \\ \varepsilon_0 \Psi(R; S_{ol}^{(i)}, x_{ol}^{(i)}) g(X) & (n_{ol}^{(i)} < n < n_{ol}^{(i+1)}) \end{cases} \quad (34)$$

ただし、初期条件は

$$R(0) = 1 \quad (35)$$

であり、各過大荷重の負荷時の更新値は次式となる。

$$R(n_{ol}^{(i)}) = \left\{ 1 - q_0(S_{ol}^{(i)}, x_{ol}^{(i)}) \right\}^m \quad (36)$$

この更新値を、過大荷重の応力値 S_{ol} と、到着直前のき裂長 x_{ol} の関数として、

$$V(S_{ol}^{(i)}, x_{ol}^{(i)}) \equiv \left\{ 1 - q_0(S_{ol}^{(i)}, x_{ol}^{(i)}) \right\}^m \quad (37)$$

と表記し、これをリセット関数と呼ぶことにする。

6・2 実験データとの比較

Fig. 4 は、このように構成した複数過大荷重下でのき裂進展方程式に基づいて構成したき裂成長曲線を、McMaster らによる疲労試験結果⁷⁾と比較したものである。比較データは Fig. 3 と基本的に同一の疲労試験から得られたものであり、き裂長が約 40 [mm]、約 50 [mm] および約 60 [mm] において 3 回の過大荷重（すべて応力値は通常荷重時の応力振幅の 1.75 倍）が負荷されている。ここでは、5 節と同様の手法により、式 (37) で定義されるリセット関数の値を、

$$\begin{cases} V(S_{ol}^{(1)}, x_{ol}^{(1)}) = 0.04 \\ V(S_{ol}^{(2)}, x_{ol}^{(2)}) = 0.015 \\ V(S_{ol}^{(3)}, x_{ol}^{(3)}) = 0.004 \end{cases} \quad (38)$$

と設定してある。

この結果から、複数過大荷重下においても本モデルによりき裂成長の様子がよく再現できることがわかる。

6・3 リセット関数の形状

Fig. 5 は、横軸に過大荷重負荷直前のき裂長 $a_{ref} x_{ol}$ 、縦軸にリセット関数値 $V(S_{ol}, x_{ol})$ を、式 (38) に基づいて対数的にプロットしたものであり、図中の破線は対数目盛上で 1 次回帰した直線を表している。このように、同一の過大荷重応力値では、負荷直前のき裂長が増大するにつれてリセット関数値が指数関数的に減衰していく傾向が読みとれる。このような傾向は、Kumar らの実験結果⁹⁾から、過大荷重応力値 S_{ol} に対する依存性にも認められる。この結果に基づき、本論文ではリセット関数の関数形として、次の打ち切り指数関数型を提案する。

$$V(S_{ol}, x_{ol}) = \min \left\{ 1, \xi_1 \exp \left(-\xi_2 x_{ol} - \xi_3 \frac{S_{ol}}{\Delta S_0} \right) \right\} \quad (39)$$

Fig. 4. Comparison between experimental data⁷⁾ and proposed model under two overloads.

Fig. 5. Dependency of $V(S_{ol}, x_{ol})$ on x_{ol} .

ここで、 ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 は正定数である。

本論文で提案するリセット関数については、それに基づく定式化を用いた研究例がほとんど報告されていないため、この関数形を決定するための十分なデータが存在しないのが現状であるが、過大荷重時の応力値が大きいほど、また負荷直前のき裂長が大きいほど、き裂先端にはより大規模な降伏域が生成されることから、式 (39) により定性的な傾向は再現し得ると考えてよいであろう。

7 不規則過大荷重下での確率モデル

本節では、前節で構成した複数過大荷重下での成長方程式に基づき、過大荷重の到着および大きさがランダムな特性を有する場合のき裂成長方程式を確率微分方程式で定式化することを試みる。

過大荷重の到着が比較的希であると仮定できるならば、いわゆる Poisson の少数の法則により、過大荷重の到着過程は Poisson 計数過程で記述できることになる。すなわち、時刻 n までに到着した過大荷重の回数を $M(n)$ とするとき、

$$P(M(n) = m) = \frac{(\lambda n)^m}{m!} \exp(-\lambda n) \quad (40)$$

が成立すると仮定できる。ここで、 $P(A)$ は事象 A が生じる確率を表しており、 λ は正定数で Poisson 計数過程の強度と呼ばれるパラメータであり、単位時間あたりの過大荷重の平均到着数を表す。この仮定下では、過大荷

重の到着時刻 $n_{ol}^{(i)}$ は $M(n)$ の i 番目の不連続ジャンプの発生時刻（いわゆる Poisson 時刻）を与え、 $n_{ol}^{(i)} - n_{ol}^{(i-1)}$ ($i = 1, 2, \dots$; 記号の統一上 $n_{ol}^{(i)} \equiv 0$ としておく) は、互いに独立で、パラメータ λ の指数分布に従う確率変数となる。なお、遅延因子 $R(n)$ は、各 Poisson 時刻で不連続な変動を示すが、解析の都合上それらの点で右連続となっているものとする。

さらに、各過大荷重での負荷荷重のランダム性を取り入れるために、過大荷重での応力値 $S_{ol}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$) は互いに独立で同一の確率分布に従う確率変数列であるものと仮定する。したがって、ランダムな過大荷重の負荷過程は、

$$C(n) = \sum_{i=1}^{M(n)} S_{ol}^{(i)} \quad (41)$$

で定義される確率過程で記述されることになる。この過程は、各 Poisson 時刻で、到着した過大荷重の応力値に等しい大きさの不連続ジャンプを示す過程で、数学的には複合 Poisson 過程と呼ばれるものである。

遅延因子 $R(n)$ は、Poisson 時刻以外では式 (34) から時間成長を行い、Poisson 時刻 $n = n_{ol}^{(i)}$ では、その値が直前値から、リセット関数を用いて、

$$R(n_{ol}^{(i)}) = V(S_{ol}^{(i)}, x_{ol}^{(i)}) \quad (42)$$

に不連続に変化する。これらをもとに、ランダム過大荷重下でのき裂成長を記述する連立の Itô 型確率微分方程式は、次のように構成することができる。

$$dX(n) = R(n)g(X(n))dn \quad (43)$$

$$dR(n) = L(n)g(X(n))\psi_1(R(n))dn - R(n-)dM(n) + V(dC(n), X(n-)) \quad (44)$$

ここで、式 (44) の右辺第 2 項と第 3 項は、過大荷重到着時の遅延因子の値のリセットを表しており、記号 $X(n-)$ は元の確率過程 $X(n)$ を左連続化した過程、すなわち $\lim_{t \rightarrow n-} X(t)$ で定義される過程を表す。また、第 1 項に現れる確率過程 $L(n)$ は、過大荷重により発生したき裂先端の大規模降伏域の大きさの逆数を与える過程で、次の連立 Itô 型確率微分方程式の解として構成できる。

$$d\tilde{L}(n) = \psi_2(X(n-))d\tilde{C}(n), \quad \tilde{L}(0) = 0 \quad (45)$$

Fig. 6. Sample functions of crack growth based upon the proposed model (S_{ol} is exponentially distributed).

$$dL(n) = d\tilde{L}(n) - \tilde{L}(n-)dM(n), \quad L(0) = 0 \quad (46)$$

$$\tilde{C}(n) = \sum_{i=1}^{M(n)} \frac{1}{\{S_{ol}^{(i)}\}^2} \quad (47)$$

Fig. 6 は、本提案モデルに基づいて発生させたき裂進展過程のサンプル挙動を図示したものである。ここでは、過大荷重での応力値 S_{ol} の確率分布としては、次式で与えられるようなシフトされた指数分布、

$$P(S_{ol}/\Delta S_0 \leq s) = 1 - \exp\left(-\frac{s-1.5}{0.25}\right) \quad (s \geq 1.5) \quad (48)$$

を想定し、過大荷重の平均到着率は $\lambda = 1/20000$ [cycle⁻¹] と設定した。また、リセット関数中のパラメータ値は、文献 7)、9) 中のデータを参考に、 $\xi_1 = 23.44 \times 10^2$ 、 $\xi_2 = 11.27$ 、 $\xi_3 = 3.75$ とし（ここでは、 a_{ref} を板幅 W に等しく取った）、他のパラメータ値は 6 節と同じに設定した。

一方、Fig. 7 は、過大荷重時の応力値が、式 (48) の平均値 $S_{ol} = 1.75\Delta S_0$ で一定の場合のき裂成長のサンプル挙動をシミュレートした結果である。応力値のランダム性がないために遅延の程度のばらつきが減少し、結果としてき裂成長曲線のばらつきが度合いが大きく減少する様子が再現されていることがわかる。

このように、本提案モデルにより、ランダムな過大荷重下でのき裂進展のサンプル挙動を、計算機上で容易にシミュレートすることができる。ここでは一例として、き裂成長の 5 本のサンプル曲線を生成の上プロットしたが、この手続きにより多数のサンプルを生成して統計的に処理することにより、破壊確率の算出が可能となると考えられる。

8 結 言

本論文においては、Elber の有効応力概念に基づいて、過大荷重下でのき裂進展方程式を構築し、さらに過大荷重の大きさと発生時刻が共に不規則である場合について、リセット関数の導入により、その進展方程式を確率微分方程式に拡張する手法の構築を試みた。そして、理論的解析ならびに定量的解析を通じて、提案したモデルより得られるき裂成長曲線は、実験データ⁷⁾をよく再現し得ること、また、不規則過大荷重下でのき裂成長のサンプル曲線を容易に生成し得ること、を明らかとした。

Fig. 7. Sample functions of crack growth based upon the proposed model ($S_{ol} = 1.75\Delta S_0$ (const.)).

このような確率モデルが構築できたことにより、不規則過大荷重下でのき裂進展の確率的特性を理論的に解明し得ることが期待できる。今後は、構築した確率モデルの解の確率的特性を解析する手法を開発し、それを耐疲労信頼性解析に反映させていくことが必要となろう。

本研究を進めるにあたり、京都大学大学院生山田一亮君より多くの助力をいただきました。ここに記し謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) W. Elber, ASTM STP 486, 230 (1971).
- 2) D. G. Pavlou, Engineering Structures, **22**, 1707 (2000).
- 3) J. Dominguez, J. Zapatero and B. Moreno, Eng. Frac. Mech., **62**, 351 (1999).
- 4) J. Willenborg, R. M. Engle and H. A. Wood, Technical Report AFFDL-TM-71-1-FBR (1971).
- 5) P. S. Veers, S. R. Winterstein, D. V. Nelson and C. A. Cornell, ASTM STP 1006, 172 (1989).
- 6) K. Doliński and P. Colombi, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **168**, 221 (1999).
- 7) F. J. McMaster and D. J. Smith, Int. J. of Fatigue, **23**, 93 (2001).
- 8) D. S. Dugdale, J. Mech. Phys. Solids, **8**, 100 (1960).
- 9) R. Kumar, A. Kumar and S. Kumar, Int. J. Pres. Ves. & Piping, **67**, 1 (1996).
- 10) F. J. McMaster and D. J. Smith, ASTM STP 1343, **2**, 246 (1999).