ショートノート

多様相論理とリスクを含む 不確実システムへの応用†

宮本 定明*

パラメータをもつ多様相論理の体系を考察する。様相論理の意味論を記述するクリプキモデルと公理と推論規則により定理を導く公理的体系を述べ、完全性に言及する。リスクを含むような不確実システムを様相論理によって記述する方法を述べ、簡単な例を紹介する。

キーワード：多様相論理、システムリスク

1. はじめに

不確実な状況のもとでリスク解析や評価を行うための基礎的な方法論として、確率・統計があげられるが、他にもファジィ理論、証拠理論、ラフ集合論などが比較的新たな考察の枠組みを提供している。不確実性の解析のための最も根本的理論は、恐らく様相論理であろう。様相論理は長い伝統をもちつつ、情報科学・人工知能の中核をなす論理体系であり、特に多様相論理 (polymodal logic, multimodal logic) は表現力の豊かさのため、広い応用範囲をもつ[8]。

本論文では、多様相論理の1つの体系をとりあげて、その意味論と推論の体系について述べる。また、リスクが生じるような不確実性を含むシステムの記述方法を示す。

従来、多様相論理を現実のシステムリスクに応用した例はないと思われる。また、実世界における問題を詳細に論じるには、自動推論システムの利用やデータベース、知識ベースの整備など、多くの準備を要する。従って、本稿では一つの試みとして様相論理をリスクを含む不確実システムに適用する方法を示唆し、簡単な例を示すにとどめる。

なお、本論文では、モデルという用語をシステムモデルの意味ではなく、記号論理における解釈・意味論を述べる枠組みという意味で使用するの、その点に注意する必要がある。

2. 多様相論理

2.1 パラメータをもつクリプキモデル

ここで考察する様相論理の体系についてはChellas[2]や村井[5]を参照されたい。また、様相論理には様相命題論理と様相述語論理の2種類があるが、通常は簡明な様相命題論理が論じられる。本稿でも様相命題論理を扱う。

様相命題論理では、まず、最小単位として分解されることのない論理式である素論理式 $\{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ を仮定する。実際の応用例においては、素論理式に文をあてはめる必要があるが、それについては後で述べる。素論理式からはじめて、論理記号で結合し、複合的論理式を形成していく。記号 $A, B, \dots$ によって素論理式と複合的論理式の両方を表し、単に論理式あるいは式と呼ぶ。論理式 A, B に対して $\neg A$ (A の否定), $A \vee B$ (A または B), $A \wedge B$ (A かつ B), $A \rightarrow B$ (もし A ならば B) はまた論理式である。さらに多様相でない単純な様相論理では、様相論理記号 $\Box$ および $\Diamond$ を利用する。 $\Box A$ を A は必然であると読み、 $\Diamond A$ を A は可能であると読む。しかしながら多様相論理では次の記号を $\Box$ と $\Diamond$ に替えて用いる。

いま、パラメータ集合を Λ とし、パラメータ $\alpha \in \Lambda$ をもつ様相記号 $[\alpha]$, $\langle \alpha \rangle$ を考える。

$[\alpha]A$: A は α のもとで必然である。

$\langle \alpha \rangle A$: A は α のもとで可能である。

次の3つ組で記述されるモデル (論理式の真偽を規定する枠組み) をクリプキモデルという。

$$M = \langle W, R(\alpha), P \rangle, \quad \alpha \in \Lambda.$$

ここで、 P は $P_0, P_1, P_2, \dots$ からなる列、すなわち $P = \langle P_0, P_1, P_2, \dots \rangle$ であり、 P_i は $\{p_i\}$ が真である W の部分集合である。 W は可能世界の集合と呼ばれる。 W の

† Polymodal Logic and Application to Systems with Uncertainties of Risks
Sadaaki MIYAMOTO

* 筑波大学機能工学系
Institute of Engineering Mechanics and Systems, University of Tsukuba

要素を k, k', k_i など表す. 関係 $R(\alpha)$ はクリプキモデルにおける到達可能関係 (accessibility relation) と呼ばれる. この 2 項関係 $R(\alpha)$ はパラメータ α に従って変化する. パラメータ集合 Λ は一般に束 (lattice) とし, 束の順序関係は $\geq$ で表す. さらに $\alpha, \beta \in \Lambda$ について $\alpha \geq \beta$ となるとき,

$$R(\alpha) \subseteq R(\beta)$$

と仮定する.

記号 $M, k \models A$ は可能世界 k において A が真であると読む.

素論理式については, 明らかに $M, k \models \bigvee_i P_i \iff k \in P_i$ である. 様相記号以外の論理記号については, 次のように定義される.

1. $M, k \models \neg A \stackrel{d}{\iff} \text{not } M, k \models A$
($M, k \models \neg A$ は, $M, k \models A$ の否定で定義する)
2. $M, k \models A \wedge B \stackrel{d}{\iff} M, k \models A \text{ and } M, k \models B$
($M, k \models A \wedge B$ は, $M, k \models A$ かつ $M, k \models B$ で定義する)
3. $M, k \models A \vee B \stackrel{d}{\iff} M, k \models A \text{ or } M, k \models B$
($M, k \models A \vee B$ は, $M, k \models$ または $M, k \models B$ で定義する)
4. $M, k \models A \rightarrow B \stackrel{d}{\iff} \text{if } M, k \models A \text{ then } M, k \models B$
($M, k \models A \rightarrow B$ は, もし $M, k \models A$ ならば $M, k \models B$ で定義する)

様相記号については

$$M, k \models \langle \alpha \rangle A$$

は A が世界 k で可能的に真であると読み, ある k' について $kR(\alpha)k'$ かつ

$$M, k' \models A$$

であることと定義する.

$$M, k \models [\alpha] A$$

は A が世界 k で必然的に真であると読み, 任意の k' について $kR(\alpha)k'$ ならば

$$M, k' \models A$$

であることと定義する.

2.2 公理的体系

記号論理では, モデルと公理的体系をそれぞれ論じ,

その関係すなわち健全性と完全性が論じられる. これらは自動推論システムの設計などにおいてまず確認されるべき基本的概念であるが, 詳細な説明を行う余裕がないので, ここでは, 公理的体系については簡単にふれるだけにとどめておこう.

次の公理スキームを考える.

$$\text{A1: } A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$\text{A2: } (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$\text{A3: } (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$$

$$\text{Df}[]: [\alpha] A \leftrightarrow \neg \langle \alpha \rangle \neg A$$

$$\text{K: } [\alpha] (A \rightarrow B) \rightarrow ([\alpha] A \rightarrow [\alpha] B)$$

$$\text{Pos: } \alpha \geq \alpha' \Rightarrow \langle \alpha \rangle A \rightarrow \langle \alpha' \rangle A$$

また, 2 つの推論規則を仮定する.

$$\text{MP: } \frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

(A と $A \rightarrow B$ から B を推論する)

$$\text{RN: } \frac{A}{[\alpha] A}$$

(A から $[\alpha] A$ を推論する)

簡単のため, この公理的体系を SL と書き, 先に述べたモデルを SL と書くことにする.

SL の定理とは, 上に挙げた公理と推論規則によって導出される論理式のことであり, A が SL の定理であるとき, $\vdash_{SL} A$ と書く.

一方, SL の任意のモデルの任意の世界で真となる式を valid な式という. A が SL で valid であるとき, $\models_{SL} A$ と書く.

公理的体系 SL がクリプキモデルのクラス SL に関して健全であるとは, SL の任意の定理が SL で valid であること, すなわち

$$\vdash_{SL} A \implies \models_{SL} A$$

と定義する. また, 体系 SL がクリプキモデルのクラス SL に関して完全であるとは, SL の任意の valid な式が SL で定理であること, すなわち

$$\models_{SL} A \implies \vdash_{SL} A$$

と定義する.

このとき, 次の命題が得られる.

命題 1. 公理的体系 SL はクリプキモデルのクラス SL に関して健全かつ完全である.

この完全性の定理は, 記号論理において最も重要であるが, 証明はここでは省略する. 証明については Miyamoto[4] を参照されたい.

3 不確実システム

不確実性を含む現実のシステムに様相論理を適用しようとする場合、クリプキモデルにどのように対象システムをあてはめるかが問題となる。すなわち、可能世界の集合、関係、素論理式が具体的に何を意味するか、パラメータ α は何に相当するかを定めなければならない。

リスクが生じるようなシステムで我々に興味があるのは異常、事故、災害などを含む事象である。これらをまとめて異常事象ということにすると、異常事象を含みシステムにおける意味のある事象を有限個列挙することができる。これらの事象を分解できないところまで分解したものを N 個挙げ、言葉で代表させたものを素論理式 $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_N$ とし、 $\mathcal{P}_{N+1}, \dots$ は規定しないことにする。

一方、可能世界とは何であろうか。基本的には個々の想定可能な世界を可能世界とするべきであろうが、我々は可能世界がここで問題とする状況にどのようにかかわっているかに興味があり、その他の事柄については考慮しなくて良い。ここでは異常事象を扱い、異常事象は素論理式の形式で表されているので、素論理式と可能世界との関連を記述すれば良い。この方法は filtration [2,5] と呼ばれる。これは、問題としている式のすべての組み合わせについて同じ真偽の組み合わせを与える可能世界の集合は一つのクラスに入れて、可能世界の同値類を作り、その上でモデルを再定義する方法である。しかしながら、filtration を詳細に記述することは紙数の都合により止め、可能世界とみなす簡便な方法について説明しよう。

まず、リテラル $l_i, i=1, \dots, N$ を導入する。リテラル l_i とは素論理式 $\mathcal{P}_i$ あるいは $\neg \mathcal{P}_i$ のいずれかを表す記号である。つまり、1つの記号 l_i で2つの式 ($l_i = \mathcal{P}_i$ あるいは $l_i = \neg \mathcal{P}_i$) を表している。そこで、リテラルの AND 結合 $l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_N$ の全体 (2^N 個あることに注意) を可能世界とみなすことにする。素論理式と記号 k_i を用いて次のように書くこともできよう。

$$\begin{aligned} k_1 &= \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{P}_N \\ k_2 &= \neg \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{P}_N \\ &\dots\dots\dots \\ k_{2^N} &= \neg \mathcal{P}_1 \wedge \neg \mathcal{P}_2 \wedge \dots \wedge \neg \mathcal{P}_N \end{aligned}$$

次に、関係 $R(\alpha)$ であるが、システムの事象間の遷移を表すように定義する。ここで、この関係が α に依存しており、 $\alpha \in \Lambda$ がシステムの構造を表現するパラメータであることに注意しなければならない。

簡単な例として、 $\Lambda = \{0, 1\}$ であり、 $\alpha = 1, 0$ がある

種の安全装置が働いている状態としない状態をそれぞれ表すとする。このとき、 $R(\alpha)$ は $\alpha=0$ のとき、正常状態からこの安全装置によって回避されている異常状態への遷移を含むが、 $\alpha=1$ の場合はこれを含まないと仮定することができる。

他の例として、 $\Lambda = \{t_1, t_2, \dots\}$ が時間の経過を示すとし、 $R(\alpha)$ が時間の経過とともに、正常状態から異常状態への遷移が増加していく様子を表すようにとすることもできる。

3.1 簡単な例

ごく簡単な例を、様相論理のモデルにあてはめてみよう。

まず、先に挙げた $\alpha=1, 0$ がある種の安全装置が働いている状態としない状態をそれぞれ表す場合を考え、素論理式 $\mathcal{P}_0$ に、

$$\mathcal{P}_0: (\text{異常状態が生じている})$$

という意味をもたせる。従って、 $\neg \mathcal{P}_0$ は異常のない正常状態を表すことになる。

可能世界として、

$$k_1 = \neg \mathcal{P}_0, \quad k_2 = \mathcal{P}_0$$

の2つをとろう。 $\alpha=1$ の場合、安全装置が働いているため、正常から異常状態への遷移 $k_1 \Rightarrow k_2$ は起こらない。これに対して、正常状態が継続する $k_1 \Rightarrow k_1$ およびいったん生じた異常状態は継続するものとする、 $k_2 \Rightarrow k_2$ となる。

一方、 $\alpha=0$ の場合、正常から異常状態への遷移 $k_1 \Rightarrow k_2$ が起こり得る。これらを $R(\alpha)$ で表すと、

$$\begin{aligned} R(1) &= \{(k_1, k_1), (k_2, k_2)\} \\ R(0) &= \{(k_1, k_1), (k_2, k_2), (k_1, k_2)\} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $R(\alpha)$ を集合で表しており、 (k_i, k_j) は $R(\alpha)$ によって $k_i \Rightarrow k_j$ と遷移する可能性があることを示している。

第2の例として、時間を考慮したシステムを考察する。システムでは異常な事象 a が生じると仮定する。また、事象 a が生じる前に異常観測 $\bar{a}$ があるとする。異常 a が観測されてから時間 t_1 以内に事象 a が起こることはないが、時間 t_2 が経過したときには a は生じている可能性があるとする。また、 $\bar{a}$ はいったん観測された後は、時間 t_1 がたつとめざまし時計のようにリセットされて、もとの状態にもどるものと仮定するが、異常事象は、いったん生じた後は、継続するものとする。

素論理式として $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$ の2つを考える。このシステムにおける意味を次のように定める。

$\mathcal{P}_0$: (異常 $\bar{a}$ が観測された)

$\mathcal{P}_1$: (異常事象 a が生じている)

上に述べた可能世界の構成法によれば, 次の4つの世界が構成される.

$$k_1 = \neg \mathcal{P}_0 \wedge \neg \mathcal{P}_1, \quad k_2 = \neg \mathcal{P}_0 \wedge \mathcal{P}_1,$$

$$k_3 = \mathcal{P}_0 \wedge \neg \mathcal{P}_1, \quad k_4 = \mathcal{P}_0 \wedge \mathcal{P}_1$$

k_1 は異常観測も異常事象もない正常状態であり, k_2 は, 異常観測のみ, かつ異常状態が発生した状態である. また, k_3 は異常事象がまだ発生していないときに異常観測をみた状態であり, k_4 は異常観測をみており, かつ異常状態が発生している状態である.

次に, 状態の遷移 $R(\alpha)$ を考える. $\Lambda = \{t_1, t_2\}, t_1 < t_2$ である. 先に挙げた条件から, 次のように $R(\alpha)$ を表すことができる.

$$R(t_1) = \{(k_1, k_1), (k_2, k_2), (k_1, k_3), (k_3, k_1), (k_4, k_2)\}$$

$$R(t_2) = \{(k_1, k_1), (k_2, k_2), (k_3, k_3), (k_4, k_4), \\ (k_1, k_3), (k_3, k_1), (k_3, k_4), (k_4, k_2)\}$$

上記の $R(\alpha)$ は, 短時間 t_1 内では, 正常状態 k_1 から異常観測が生じている状態 k_3 に移行することはあっても, 異常観測があった後この時間以内には異常状態が生じることではないことを示している. 一方, 比較的長い時間 t_2 内では, 異常観測があった後この時間以内には異常状態が生じる可能性があるので, $k_3 \Rightarrow k_4$ の遷移が新たに生じる. いずれの場合も, $k_1 \Rightarrow k_2$ や $k_1 \Rightarrow k_4$ すなわち正常状態で異常な観測がない場合, 異常事象が起こる状態への遷移はないことに注意しよう. なお, 上の式から, $R(t_1) \subset R(t_2)$ である.

次に, 異常の観測が正確ではなく, 観測のない場合でも異常が生じるとすると, 先の場合には生じなかった, $k_1 \Rightarrow k_2$ や $k_1 \Rightarrow k_4$ が起こり得るようになる. そこで, 観測が正確な場合を記号 s , 不正確な場合を記号 i で表し, さらに時間の推移と合わせて

$$\alpha_{1s} = (t_1, s), \quad (\text{経過時間 } t_1 \text{ かつ観測は正確})$$

$$\alpha_{2s} = (t_2, s), \quad (\text{経過時間 } t_2 \text{ かつ観測は正確})$$

$$\alpha_{1i} = (t_1, i), \quad (\text{経過時間 } t_1 \text{ かつ観測は不正確})$$

$$\alpha_{2i} = (t_2, i), \quad (\text{経過時間 } t_2 \text{ かつ観測は不正確})$$

とし, $\Lambda = \{\alpha_{1s}, \dots, \alpha_{2i}\}$ とする.

さきの $R(\alpha)$ から

$$R(\alpha_{1s}) = \{(k_1, k_1), (k_2, k_2), (k_1, k_3), (k_3, k_1), (k_4, k_2)\}$$

$$R(\alpha_{2s}) = \{(k_1, k_1), (k_2, k_2), (k_3, k_3), (k_4, k_4), \\ (k_1, k_3), (k_3, k_1), (k_3, k_4), (k_4, k_2)\}$$

であるが, 観測が不正確な場合,

状態遷移 $k_1 \Rightarrow k_2$ や $k_1 \Rightarrow k_4$ などが可能となり,

$$R(\alpha_{1i}) = \{(k_1, k_1), (k_2, k_2), (k_1, k_3), (k_3, k_1), (k_4, k_2), \\ (k_1, k_2), (k_1, k_4), (k_2, k_4)\}$$

$$R(\alpha_{2i}) = \{(k_1, k_1), (k_2, k_2), (k_3, k_3), (k_4, k_4), (k_1, k_3), \\ (k_3, k_1), (k_3, k_4), (k_4, k_2), (k_1, k_2), (k_1, k_4), \\ (k_2, k_4)\}$$

となる.

4 おわりに

本稿では, 多様相論理の体系を考察し, リスクのような不確実性を含むシステムへの応用を考察した. 本稿は試論といった位置づけにあり, 実世界的な応用には未だ距離があるが, 従来の方法とは異なるアプローチを示した点に意義があると考えられる.

本稿の方法は, 安全性や信頼性解析に用いられる確率論的枠組みとは根本的に異なっているように見えるが, 今後の研究のなかで, 従来の方法と様相論理にもとづくアプローチとの接点, 関連性をさぐっていく必要がある. このことに関連して, 本稿では議論しなかったが, ファジィ集合論における可能性理論[9]と多様相論理との関連を考察することができる[4]. そこで示した方法と類似の議論によって, 従来の解析法との関係を論じるのが一つの方角であろう.

また, 本稿では述べなかった話題として, ラフ集合との関係[7,6]がある. 最近, システム信頼性の分野で不確実性を含む集合論的解析を行っている例[3]があるが, ラフ集合と様相論理にもとづいて, このような集合論的方法を再定式化してみることに興味があろう.

実世界の問題への応用では, システムの記述のためのデータベースと様相論理にもとづく推論システム[1]を開発する必要がある. このように, リスクを含む不確実システムにおいても, システム記述のデータベースと推論システムを利用して, これまで考察されていなかった側面が明らかになると思われる. またその際, 多様相論理が基本的なツールとなるであろう.

参考文献

- [1] 赤間世紀, 計算論理学入門, 啓学出版, 1992.
- [2] B.F.Chellas, *Modal Logic*, Cambridge University Press, 1980.
- [3] M. Itoh, K.Tanaka, Mathematical modeling of trust in automation: trust, distrust, and mistrust, Proceedings of the 14th Triennial Congress of the International Ergonomics Association (IEA2000/HFES2000), pp.1-9-12, 2000.
- [4] S.Miyamoto, Indexed rough approximations, a polymodal system, and generalized possibility measures, in T.Y.Lin et al., eds., *Data Mining*,

- Rough Sets and Granular Computing*, Physica-Verlag, Heiderberg, 2002, pp.474-486.
- [5] 村井哲也, ラフ集合と様相論理, 日本ファジィ学会誌, Vol.13, pp.571-580, 2002.
- [6] T.Murai, M.Nakata, and Y.Sato, A Note on Filtration and Granular Reasoning, in T.Terano et al., eds., *Lecture Notes in Artificial Intelligence* Vol.2253, pp.385-389, Springer, Berlin, 2001.
- [7] Z.Pawlak, *Rough Sets*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- [8] S.Popkorn, *First Steps in Modal Logic*, Cambridge University Press, 1994.
- [9] L.A.Zadeh, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.1, pp.3-28, 1978.
- (2002年7月1日 受付)
(2002年11月26日 採録)
- [問い合わせ先]
〒305-8573 つくば市天王台1-1-1
筑波大学機能工学系
宮本 定明
TEL : 029-853-5346
FAX : 029-853-5207
Email : miyamoto@esys.tsukuba.ac.jp

著 者 略 歴

みやもと さだあき
宮本 定明 [正会員]

筑波大学機能工学系
昭和53年3月 京都大学大学院工学研究
科博士課程(数理工学専攻)修了。同年
筑波大学技官, 昭和56年 筑波大学講師
(電子・情報工学系), 昭和62年 同助教
授, 平成2年 徳島大学教授(工学部),
平成6年 筑波大学教授(電子・情報工
学系), 平成11年 筑波大学教授(機能工
学系)となり, 現在に至る。ファジィ理
論とその情報検索への応用, クラスタ
分析, メタ戦略による最適化などの研究
に従事。工学博士。1994年度および1998
年度日本ファジィ学会論文賞受賞。計測
自動制御学会, システム制御情報学会,
日本ファジィ学会, 情報処理学会, 日本
応用数学会, IEEE等の会員。

Polymodal Logic and Application to Systems with Uncertainties of Risks

by

Sadaaki MIYAMOTO

Abstract :

A class of polymodal logic is considered: a Kripke model and an axiomatic system are described and a theorem of completeness is mentioned. Application to a class of systems with uncertainty including risky situations is discussed. Correspondence of components of polymodal logic to the system elements is described. Simple illustrative examples are shown.

Contact Address : Sadaaki MIYAMOTO

Institute of Engineering Mechanics and Systems
University of Tsukuba
Ibaraki 305-8573, Japan
TEL : 0298-53-5346
FAX : 0298-53-5207
E-mail : miyamoto@esys.tsukuba.ac.jp