解説

常微分方程式に対する精度保証†

—— 初期値問題から全解探索まで ——

相馬 隆郎*

1 はじめに

計算機技術の急速な発展に伴い、数値計算によって解かれる問題はより大規模複雑化してきている。

これに伴い得られた計算結果の品質を保証する需要も高まっており、その解決策として精度保証付き数値計算法（Numerical Method with Guaranteed Accuracy）が注目を集めている。これは、数値計算に伴う丸め誤差、打ち切り誤差の厳密評価というだけでなく、計算によって得られた各種方程式の解に対する誤差限界を数学的に保証する数値計算法である。

本稿では、1 階常微分方程式の境界値問題

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), t \in [t_s, t_e] \quad (1)$$

について考える。ただし、 x は n 次元ベクトル値関数、 $f: R^n \times R \rightarrow R^n$ は x に関して 1 回連続微分可能、 t に関して連続な関数とする。

通常このような非線形常微分方程式の境界値問題を解析的に解くことは困難であるため、有限差分法等を用いて数値的に近似解を求めることになる。しかし、数値解が得られても、その近くに真の解が存在するか否かや、数値解がどの程度真の解に近いについては必ずしも明らかでないことが多い。このような近似解を精度保証する方法としては、占部による簡易 Newton 法の収束定理に関するもの [2, 3] がその先駆けとして知られている。その後、Cesari [1], Kedem [6], Kaucher-Miranker [7], 中尾 [8], Plum [12], 大石 [9, 11] などによる研究が行われている。また、高次の Taylor 展開と区間演算を用いて常微分方程式の解を包み込む方法が Loner [5], 柏木 [10] 等で提案されている。また、これらを利用して多点境界値問題の全解探索を行うアルゴリズムも文献 [16] で提案されて

いる。

本稿では、これらの中から、初期値問題、境界値問題及び全解探索に関する基礎的な手法をそれぞれ一つずつ紹介する。

2 初期値問題に対する精度保証

以下の初期値問題

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, t), t \in [0, 1] \\ x(0) &= a \end{aligned} \quad (2)$$

について考える。ただし a は n 次元ベクトルとする。本章では、上式の数値解に対する精度保証法として、柏木ら [10] の手法を紹介する。この文献では、多点境界値問題に対する精度保証法が提案されているが、その手法の一部として初期値問題の精度保証法も提案されているので、その概略を以下に説明する。

一般に、 $f(x, t)$ が x に関して Lipschitz 連続、かつ t に関して連続であれば式 (2) は一意解をもち、Picard の反復法を行うことで実際に解を求めることができる。Picard の反復法では、まず初期近似解 $x_0(t)$ を

$$x_0(t) = a \quad (3)$$

とする。これを元に、次式を用いて反復計算を行うことで近似解 $x_n(t)$ が得られる。

$$x_n = a + \int_0^t f(x_{n-1}, s) ds, (n = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

もし、近似解の列 $\{x_n(t)\}$ が収束すれば、その極限は初期値問題の解となる。ただし近似解が収束することは判っても、通常の計算では収束先（真の解）と近似解との間の距離は明らかにならない。そこで文献 [10] では、式 (4) の反復計算の過程において、各係数が区間で表現されたべき級数を用いることで、真の解の存在範囲を求めている。以下にその詳細を述べる。

まず、反復計算の際に用いるべき級数演算（Power Series Arithmetic, 以下 PSA と略す）は次に示す Type

† Numerical Validation of Solutions of Ordinary Differential Equations—From Initial Value Problems to Finding All Solutions—
Takao SOMA

* 東京都立短期大学経営情報学科
Dept. of Management, Tokyo Metropolitan College

- I PSA と Type-II PSA の二種類が定義されている。

Type-I PSA では, n 次のベキ級数を扱い, それより高次の項は切り捨てる. 以下, $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ という表記でベキ級数

$$a_0 + a_1 t + a_1 t^2 + \dots + a_n t^n \quad (5)$$

を表すことにする. 加算, 減算及び乗算は, 次のように行われる.

$$\begin{aligned} & [a_0, \dots, a_n] \pm [b_0, \dots, b_n] \\ &= [a_0 \pm b_0, \dots, a_n \pm b_n] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & [a_0, \dots, a_n] \times [b_0, \dots, b_n] \\ &= [c_0, \dots, c_n], \end{aligned} \quad (7)$$

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \quad (8)$$

また, 関数の適用は次のように行われる.

$$\begin{aligned} & f([a_0, \dots, a_n]) = f(a_0) \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(a_0) [0, a_0, \dots, a_n]^i \end{aligned} \quad (9)$$

除算は逆関数と乗算の組み合わせによって行われる ($x/y = x \times (1/y)$).

次に, Type-II PSA も Type-I と同様 n 次のベキ級数を取り扱う. Type-II PSA では, 取り扱う級数の定義域 (t の変域) を, $[0, d]$ のように定める.

$[a_0, \dots, a_n]$ の最後の項の係数 a_n は区間とし, $[a_0, \dots, a_n]$ で $f(t) \in a_0 + a_1 t + a_1 t^2 + \dots + a_n t^n$ in all t をみたすような $[0, d]$ 上で定義された連続関数の集合を表すものとする. 加算及び減算は Type-I と同様に計算する. 乗算は次の手順で行われる.

1. $[a_0, \dots, a_n]$ と $[b_0, \dots, b_n]$ を打ち切りなしで乗ずる. 計算結果 $C = [c_0, \dots, c_{2n}]$ は $2n$ 次となる.
2. C の次数を n に減らす (以下, これを減次と呼ぶ).

減次は次のように行われる.

$A = [a_0, \dots, a_m]$ をベキ級数 (Type-I, II を問わない) とし, n を $n < m$ を満たす自然数とする. このとき A の次数 n への減次は次の $B = [b_0, \dots, b_n]$ で定義される.

$$b_i = a_i \quad (0 \leq i \leq n-1) \quad (10)$$

$$b_n = a_n + \left\{ \sum_{i=n+1}^m a_i t^{i-n} \mid t \in [0, d] \right\} \quad (11)$$

式(11)は, $n+1$ 次以上の項について $a_i t^i$ を $a_i t^{i-n} t^n$ と

変形することで, 高次の剰余項を t^n の係数として評価したものである. よって, 乗算の結果 C は丸めなしの乗算によって得られる可能性のある結果を全て含むことになる. 関数は次のように適用される.

$$\begin{aligned} & f([a_0, \dots, a_n]) = f(a_0) \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(a_0) [0, a_0, \dots, a_n]^i \\ & + \frac{1}{n!} f^{(n)} \left(\sum_{i=0}^n a_i [0, d]^i \right) [0, a_0, \dots, a_n]^n \end{aligned} \quad (12)$$

以上 2 つのベキ級数演算を用いて, 区間 $[0, d]$, ($0 < d < 1$) における初期値問題の解を精度保証付きで求めるアルゴリズムを次に示す.

アルゴリズム 2.1 [10]

Step 1. ベキ級数ベクトル X を

$$X = \begin{pmatrix} [a_1] \\ \vdots \\ [a_n] \end{pmatrix} \quad (13)$$

のように初期化し, $m = 0$ とする.

Step 2. (近似解の生成) Step2-1~Step2-3 を適当な回数繰り返す.

Step 2-1 ベキ級数 T を $t_s + t$ を m 次で打ち切ったものとする

$$T = \begin{cases} [0] & (m=0) \\ [0, 1] & (m=1) \\ [0, 1, 0, \dots, 0] & (m>2) \end{cases} \quad (14)$$

Step 2-2 $X = f(X, T)$ を Type-I PSA で計算する. $X = a + f_0^t X dt$ を計算する. これらによって係数は m から $m+1$ となる.

Step 2-3 $m = m+1$

Step 3 $T = [0, 1, 0, \dots, 0]$ (m 次) とする.

Step 4 $Y = f(X, T)$ を Type-II PSA で計算し, $Y = a + f_0^t Y dt$ を計算し, Y の次数を $m+1$ から m に減次する.

Step 5

$$r = \max_{1 \leq i \leq n} |Y_i^{(m)} - X_i^{(m)}| \quad (15)$$

を計算する. ここで添字^(m)は t^m の係数を表す.

Step 6 $x_i^{(m)} = x_i^{(m)} + [-2r, 2r]$ ($1 \leq i \leq n$) を求める.

Step 7 $Y = f(X, T)$ を Type-II PSA で計算し, $Y = a + f_0^t Y dt$ を計算し, Y の次数を $m+1$ から m に減次する.

Step 8 (解の存在検証) 全ての i について $Y_i^{(m)} \subset X_i^{(m)}$ が成立すれば, Y に初期値問題の解が存在する.

Step 9 (解の改良) Step9-1~Sep9-2 を $Y_i^{(m)}$ が十分小さくなるまで繰り返す.

Step 9-1 $Y=f(X, T)$ を Type-II PSA で計算し, $Y=a+\int_0^t Y dt$ を計算し, Y の次数を $m+1$ から m に減次する.

Step 9-2 全ての i について $Y_i^{(m)} = Y_i^{(m)} \cap X_i^{(m)}$ とする.

Step 10 $x(t)$ は

$$x(t) = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m Y_i^{(i)} t^i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i=0}^m Y_n^{(i)} t^i \end{pmatrix} \quad (16)$$

で得られる.

以上のアルゴリズムによって区間 $[0, d]$ における解が求まる. さらに $x(d)$ を初期値として上記アルゴリズムを何度か繰り返せば, 区間 $[0, 1]$ における解を精度保証付きで求めることができる.

3 境界値問題に対する精度保証

続いて非線形常微分方程式の境界値問題

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, t), \quad t \in [t_s, t_e] \\ g(x) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

に対する精度保証について考える. ただし, g は境界条件を表す n 次元ベクトル値汎関数である. 例えば多点境界値問題の場合, $t_s = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_e$ とすると g は

$$g(x) = \sum_{i=0}^N B_i x(t_i) - b \quad (18)$$

のように表現できる. ここで $B_i (i=0, 1, 2, \dots, N)$ は $n \times n$ 行列, b は n -次元定ベクトルとする. 例えば, 初期値問題の場合 $g(x) = x(t_s) - b$ と表され, $N=1$ のとき 2 点境界値問題となる. また周期境界値問題は $g(x) = x(t_s) - x(t_e)$ と表される. (17) 式の近似解 $c(t)$ が与えられたとき, この近似解の近くに真の解が存在するか否かを検証する方法が大石 [9] に述べられているので本章ではこの手法を紹介する. これは, Krawczyk の方法を拡張したものである. なお, 本章の議論では関数解析の知識が若干必要となるので, 詳細については文献 [13] 等を参考にされたい.

本章で用いる区間関数はベキ級数等には限定せず, より一般的な形で以下のように定義されている.

定義3.1 [9] (区間関数, ベクトル値区間関数, 行列値区間関数) 区間 $[t_s, t_e] \subset R$ 上で定義された実数値連続関数 $x(t)$, $y(t)$ において,

$$x(t) \leq y(t) \text{ for all } t \in [t_s, t_e] \quad (19)$$

を満たす $x(t)$, $y(t)$ によって定まる関数の集合 $\{r(t) \mid x(t) \leq r(t) \leq y(t) \text{ for all } t, r(t) \text{ は連続}\}$ を区間関数といい, $[x(t), y(t)]$ と表す. また, 区間関数の値がベクトル, 行列である場合, それぞれベクトル値区間関数, 行列値区間関数という.

次に, $X = C([t_s, t_e]; R^n)$ で区間 $[t_s, t_e]$ 上で連続な実 n 次元ベクトル値関数 $x(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ の作るバナッハ空間を表すとする, ノルムは以下に示す scaled maximum norm

$$\|x\|_u = \sup_{t \in [t_s, t_e]} |x(t)|_u \quad (20)$$

で与える. ただし

$$|x|_u = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|x_i(t)|}{u_i} \quad (21)$$

$$u = (u_1, \dots, u_n)^T \in R^n, \quad u > 0 \quad (22)$$

とする. また, $Y = X \times R^n$ とする.

$D = C^1([t_s, t_e]; R^n)$ を実 n 次元ベクトル値関数 $x(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ で $x \in C([t_s, t_e]; R^n)$ かつ $dx/dt \in C([t_s, t_e]; R^n)$ となるもののつくるバナッハ空間とする, さらに, $C^1([t_s, t_e]; M)$ で区間 $[t_s, t_e]$ 上の $n \times n$ 行列値関数で行列の各成分が $C^1[t_s, t_e]$ の要素となるもののつくるバナッハ空間とする.

ここで, 作用素 $F: D \subset X \rightarrow Y$ を以下のように定義し, (17) 式を作用素方程式で表現する.

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(\frac{dx}{dt} - f(x, t), g(x) \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

ただし, $f: X \rightarrow X$, $g: X \rightarrow R^n$ は x で Fréchet 微分可能とする. このとき F は x について Fréchet 微分可能で $DF(x): D \subset X \rightarrow Y$ は

$$DF(x)h = \left(\frac{dh}{dt} - f_x(x, t)h, g'(x)h \right) \quad (24)$$

となる. ただし, $h \in D$, $f_x(x, t)$ は f の x に対するヤコビ行列, $g'(x)$ は g の Fréchet 導関数とする. ここで, (23) 式の近似解 $c(t)$ が得られたとする. このとき $f_x(c, t)$ と $g'(c)$ の近似として, $[t_s, t_e]$ 上で連続な実行列値関数 $A(t)$ とベクトル値線形汎関数 l を用いると,

$DF(c)$ の近似として線形作用素 L は

$$Lh = \left(\frac{dh}{dt} - A(t)h, lh \right) \quad (25)$$

と定義できる. さらに, 以下の線形斉次系の基本解行列を $\Phi(t)$ とする.

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\Phi(t) \quad (26)$$

$$\Phi(t_0) = E \quad (27)$$

ただし, E は単位行列とする.

このとき, L の逆作用素 L^{-1} は次で与えられることが, 文献 [3] に述べられている.

まず, $\phi_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) を $\Phi(t)$ の i 番目の列ベクトルとし, $G = l[\Phi(t)]$ を列ベクトル $l[\phi_i(t)]$ で構成された行列とする. G が正則であるならば, L^{-1} は

$$\begin{aligned} L^{-1}(\xi, \eta) = & \Phi(t) \int_{-1}^t \Phi^{-1}(s) \xi(s) ds \\ & - \Phi(t) G^{-1} l[\Phi(t) \int_{-1}^t \Phi^{-1}(s) \xi(s) ds] \\ & + \Phi(t) G^{-1} \eta \end{aligned} \quad (28)$$

と表される.

この L^{-1} を用いて Newton 作用素 $k: X \rightarrow X$ は

$$\begin{aligned} k(x) = & L^{-1}(L - F)x \\ = & L^{-1}(f(x, t) - A(t)x, l(x) - g(x)) \end{aligned} \quad (29)$$

で定義される.

このとき, ある $x^* \in X$ が k の不動点ならば, x^* は D の要素でもあり, $Fx^* = 0$ を満たす, すなわち, x^* はもとの微分方程式 (17) 式の解となる.

そこで, Newton 作用素 k の不動点の存在を検証するために Krawczyk 作用素を導入する. 近似解 $c(t)$ を中心とする区間関数 $I(t)$ を入力としたときの Krawczyk 作用素は

$$K(I) = k(c) + M(I - c) \quad (30)$$

で定義される. ただし

$$\begin{aligned} M = & L^{-1}(L - DF(I)) \\ = & L^{-1}(f_x(I, t) - A(t), l - g'(I)) \end{aligned} \quad (31)$$

である.

区間関数 $I(t)$ の中に (17) 式の真の解が存在するかどうかは以下の定理によって検証することができる.

定理 3.1 [9] $I(t)$ を有界な区間関数とする. もし

$$K(I(t)) \subset I(t) \quad (32)$$

$$\|M\|_u < 1 \quad (33)$$

の両式が成立するならば, Newton 作用素 k の不動点 x^* が $I(t) \subset X$ 内に唯一存在する. さらにこの x^* は $Fx^* = 0$ を満たす孤立解である.

4 精度保証付き全解探索法

次に, 多点境界値問題の全ての解を探索する方法について, 文献 [16] の手法を紹介する. これは, 与えられた超直方体の探索領域に対して, その内に初期値を持つ式 (17) の全ての解を見つけ出し, 同時に解そのものも誤差評価付きで得るための手法である.

区間演算を用いた一般的な全解探索法は次の手順で行われる. まず, 探索する領域に対して存在テスト及び非存在テストの両方を行い, どちらかが成功すればその領域の探索を終了する. もしどちらも成功しない場合は領域を分割し, 得られた領域に対して再度両テストを実施する. これを再起的に繰り返し, 探索領域全てに対して解の存在または非存在が証明できた時点で探索を終了する. このようなタイプの全解探索アルゴリズムで有限次元非線形方程式を対象としたものが Moore [4], 神澤ら [14] 等で提案されている.

文献 [16] では, これらの有限次元問題に対する全解探索法と同様の手法が無限次元の問題である常微分方程式に対しても構築可能であることが示されている. この手法において, 存在・非存在テストを行うための区間関数を作成する際, 前述の柏木ら [10] の方法を用いている, また解の存在テストには, 前述の大石 [9] の方法が用いられている.

以下に, 探索領域 $A \subset R^n$ 内に初期値を持つ全ての解を求めるアルゴリズムを示す.

アルゴリズム 4.1 [16]

Step 1. 探索する区間のリストを, 区間 $A \subset R^n$ で初期化する.

Step 2. リストが空ならば終了. そうでなければリストから要素を取り出して I とし, その要素をリストから削除する.

Step 3. 区間 I 内の全ての点 a に対する以下の初期値問題の解を包み込む区間関数 $T(t)$ を求める.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, t) \\ x(0) &= a \end{aligned} \quad (34)$$

もし, 求まらなければ **Step 8** へ.

Step 4. $g(T(t)) \neq 0$ ならば, 区間 I 内に初期値をも

つ解は存在しない。この場合は **Step 2** へ。

Step 5. $c(t) = \text{mid}(T(t))$ とする。 $DF(c(t))$ の近似として L を求め、 L^{-1} の存在を調べる。ただし、 L において、 $f_x(c(t), t)$ 及び g の近似を $A(t)$ 、 l とする。 L^{-1} が存在しなければ **Step 8** へ。

Step 6. 区間関数 $\hat{T}(t) = c(t) + S$ を計算する。区間 S は定数 $\rho > 1$ を用いて、次式により求める。

$$S = [-u, u], \quad (u \in R^n) \quad (35)$$

$$u_i = \max(\text{rad}(I_i), \rho \sup_{0 \leq t \leq 1} |\hat{V}_i(c(t))|), \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (36)$$

$$V(c(t)) = -c(t) + L^{-1}(f(c(t)) - A(t)c(t), g(c(t)) - lc(t)) \quad (37)$$

ただし $\hat{V}$ は V の区間包囲を表す。

Step 7. 次式を検証し、成立すれば $\hat{T}(t)$ 内に真の解が存在する。この場合は **Step 2** へ。

$$K(\hat{T}(t)) \subset \hat{T}(t) \quad (38)$$

$$\|M\| < 1 \quad (39)$$

Step 8. 区間 I を 2 つに分割し、リストに付け加え、**Step 2** へ。

本アルゴリズムにおいて、Step 3 で初期値問題を解く際、前述の柏木ら [10] の手法が用いられている。続いて Step 4 では、得られた区間関数に対して解の非存在テストが行われている。もし非存在テストに成功しなかった場合は Step 5 ~ 7 において、定理 3.1 に示した解の存在テストが実施される。

5 数値検証例

最後に前章で紹介したアルゴリズムを用いて全解探索を行った例を示す。現状の数値計算の多くは浮動小数点数を用いて行われているが、このアルゴリズムでは必要に応じて任意に高い精度で計算する必要があるため有理数演算が用いられている。

次の例題に対して全解探索を行った結果を示す。

$$\frac{dx}{dt} = 0.2\pi(2 + \cos(2\pi t))x - 0.1\pi x^2 - 0.2\pi \quad (40)$$

$$x(0) = x(1), \quad t \in [0, 1]$$

探索領域を区間 $[0, 4]$ としてアルゴリズムを実行し、表 1、2 の結果を得た。表 1 には解の存在テストに成功した区間が示してある。区間 # 2, 3, 4 は、 $\hat{T}(0)$ に共通部分が存在することから同じ解をとらえている。

表 1 : 探索結果 (解の存在領域)

	存在テスト検証区間 $\hat{T}(0)$	Krawczyk の写像適用後の 解の存在範囲 $K(\hat{T}(t)) _{t=0}$
# 1	[0.455688, 0.669312]	[0.531784, 0.626761]
# 2	[3.299787, 3.512713]	[3.403345, 3.495893]
# 3	[3.411660, 3.525840]	[3.435761, 3.462762]
# 4	[3.391526, 3.624099]	[3.393037, 3.506302]

表 2 : 解の非存在領域における分割の様子

	非存在領域	区間の平均半径	分割後の 区間数
# 1	[0, 0.5]	0.125000	4
# 2	[0.625, 3.375]	0.010629	129
# 3	[3.515625, 4]	0.002752	88

その詳細な存在範囲は $[3.435761, 3.462762]$ となる。また、解そのものの精度保証結果を図 1、2 に示した。図中の 2 本の端点関数で挟まれた範囲内に式 (40) の真の解が存在する。

また、定理 3.1 より区間 $K(\hat{T}(t))|_{t=0}$ および $\hat{T}(0)$ 内に存在する解は一つだけなので、区間 $\hat{T}(0)$ において $K(\hat{T}(t))|_{t=0}$ 以外の部分は解の非存在領域とみなせる。表 2 は解の非存在が示された 3 つの領域において、区間の分割が行われた様子を示している。図 3、4、5 は、**Step 3** で得られる区間関数 $T(t)$ の一例を、それぞれの非存在領域について示したものである。

6 おすび

本解説では、常微分方程式に対する精度保証について、初期値問題、境界値問題及び全解探索を例に 3 つ

図 1 : 式 (40) の解 (# 1)

図 2 : 式(40)の解 (#2)

図 4 : Step 3 で得られる $T(t)$ ($T(0) = [2.46875, 2.5]$) 図 3 : Step 3 で得られる $T(t)$ ($T(0) = [0, 0.25]$) 図 5 : Step 3 で得られる $T(t)$ ($T(0) = [3.9375, 4]$)

の手法を紹介した。他にも、解の存在検証に成功した区間関数に対して、再度 Krawczyk 写像を適用することで反復改良を行う手法も文献 [15] で提案されている。この手法と前述の全解探索法を組み合わせれば、任意に高い精度で解の存在範囲を絞り込むことが可能である。

参 考 文 献

- [1] L. Cesari: "Functional Analysis and Periodic Solutions of Nonlinear Differential Equations," Contributions to Differential Equations, 1, pp.149-187 (1963).
- [2] M. Urabe, "Galerkin's Procedure for Nonlinear Periodic Systems," Arch. Rational Mech. Anal., 20, pp.120-152, 1965.
- [3] M. Urabe: "An Existence Theorem for Multi-Point Boundary Value Problems," Funkcialaj Ekvacioj, vol. 9, pp. 43-60 (1966).
- [4] R. E. Moore and S. T. Jones, "Safe starting regions for iterative methods," SIAM J. Numer. Anal., vol. 14, no. 6, pp.1051-1065, Dec. 1977.
- [5] R. Lohner: "Enclosing the Solutions of Ordinary Initial and Boundary Value Problems," Computer Arithmetic (eds. E. Kaucher et al.), B. G. Teubner Stuttgart, pp. 255-286 (1987).
- [6] G. Kedem: "A posteriori error bounds for two-point boundary problems," SIAM J. Numer. Anal., 18, pp. 431-448 (1981).
- [7] E. W. Kaucher and W. L. Miranker: Self-Validating numerics for function space problems, Academic Press, New York (1984).
- [8] M. T. Nakao: "A Numerical Verification Method for the Existence of Weak Solutions for Nonlinear Boundary Value Problems," Journal Math. Anal. Appl. 164 pp. 489-507 (1992).
- [9] S. Oishi, "Two Topics in Nonlinear System Analysis through Fixed Point Theorems," IEICE Trans. Fundamentals, vol. E77-A, no. 7, pp.1144-1153, Jul. 1994.

- [10] M. Kashiwagi, "Power Series Arithmetic and its Application to Numerical Validation," Proc. of International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA '95), vol.2D-1, pp. 251-254, 1995.
- [11] S. Oishi: Numerical Verification of Existence of Connecting Orbits for Continuous Dynamical Systems", Proc. 1995 Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA '95 Symposium), Vol. 2, pp.1189-1195(1995).
- [12] M. Plum: "Existence and enclosure results for continua of solutions of parameter-dependent nonlinear boundary value problems," J. Comput. Appl. Math., 60, pp.187-200 (1995).
- [13] 大石進一: 非線形解析入門, コロナ社(1997).
- [14] 神沢雄智, 柏木雅英, 大石進一, 中村晴幸: "有限ステップで停止する非線形方程式のすべての解を精度保証付きで求めるアルゴリズム", 信学論(A), vol. J80-A, no.7, pp.1130-1137, Jul. 1997.
- [15] 相馬隆郎, 大石進一: "精度保証付き数値計算を用いた常微分方程式に対する反復改良法", 信学論(A), vol.J82-A, no.1, pp.11-20, Jun. 1999.
- [16] 相馬隆郎, 大石進一: "精度保証付き数値計算を用いた常微分方程式の全解探索アルゴリズム", 信学論(A), (2003年掲載予定)
- (2003年1月26日 受付)

[問い合わせ先]

〒196-8540 東京都昭島市東町3-6-33

東京都立短期大学経営情報学科

相馬 隆郎

電話: 042-543-3001

Fax: 042-543-3002

E-mail: souma@tmca.ac.jp

著者紹介

そう ま たか お
相馬 隆郎 [非会員]

平2早大・理工・電子通信卒, 平4同大
大学院理工学研究科

修士課程了, 平9同大大学院理工学研究
科博士課程満期退学, 平10博士(工学),

平8早大理工学部助手,

平11東京都立短期大学経営情報学科講
師, 現在に至る, 精度保証付き数値計算
の研究に従事,