原著論文

クリーネ代数の完全に 独立な公理系について†

二宮 智子*¹・向殿 政男*²

一般に、代数系で成立する多くの等式の中には、他の等式の組合せから導かれるものもあり、その場合は互いに独立ではないことになる。最低限どの等式を仮定すれば、すなわち、どの等式を公理系として採用すれば、その代数系で成立する他のすべての等式を導くことができるかが問題となる。代数の公理系の各公理が独立なとき、すなわち、各公理が他の公理の組み合わせから導けないとき、その代数の公理系を完全に独立な公理系と呼ぶ。本論文では、特に人工知能の分野において、あいまいで不確かな状態を表現するために重要な役割を果たしているクリーネ代数を対象として、最初に未定係数法を用いて、公理系における各公理の独立性を調べることにより、どの公理がより本質的な役割を持っているかを調べる。更に、この結果に基づき、各公理の公理系における役割を明らかにし、その上で32種類の完全に独立なクリーネ代数の公理系を示す。

キーワード：ファジィ論理、クリーネ代数、代数の公理系、未定係数法、完全に独立な代数の公理系

1. はじめに

クリーネ代数 (Kleene algebra) は、現在、ド・モルガン代数と共に、ファジィ論理の背後に横たわる最も基本的な代数系として、多くの研究者に興味を持たれて研究されている。クリーネ代数とは、クリーネ律を満たすド・モルガン代数のことである。ここで、クリーネ律とは、2値論理に対応する代数であるブール代数において成立している相補律 (排中律と矛盾律) の条件を弱くしたものである。したがって、クリーネ代数はブール代数より弱く、ド・モルガン代数より強い代数系といえる。近年、クリーネ代数は多くの分野で見出だされ、特に人工知能の分野においては、あいまいで不確かな状態を表現するために重要な役割を果たしている。

歴史的に振り返ると、クリーネ代数は involution の概念 (ド・モルガン否定に対応) の導入から始まった。これは、1958年、J. A. Kalman^[1] が工学的な立場から “normal i-lattice (N-lattice)” として、また、A. Bialynicki-Biura and H. Rasiowa^[2] が直観主義論理的立場から “Nelson algebra” として、それぞれ独立に提案している。Involution を持った代数系は、Lukasiewicz

ewicz の3値論理 L3の代数モデルにもなっており^[3]、L3で含意を含まない部分系がクリーネ代数である。R. Balbes & P. Dwinger^[4]の著書と D. Bringnole & A. Monterio^[5]の論文において、既に、“Kleene algebra” という名称で取扱われているが、筆者らの知る限りでは、この代数系に対して、誰が最初にクリーネ代数という名前を付けたのかは定かではない。一方、ファジィ論理が現実世界に存在するあいまいな状態や現象を扱うために L. A. Zadeh^[6]によって提案されてから、ファジィ論理の代数構造について多くの研究者により研究されてきた。それらのほとんどは、ファジィ論理をド・モルガン代数として特徴づけていた。一方、F. P. Preparata & R. T. Yeh^[7]と向殿^[8]は、ファジィ論理においてクリーネ律が成立することを指摘した (なお、当時、文献によっては、クリーネ代数を“ファジィ代数”あるいは“ソフト代数”と呼んでいた)。特に向殿は、1981年、最初にファジィ論理は“クリーネ代数”の1つのモデルであることを指摘して1組のクリーネ代数の独立な公理系を見出し^[9]、その後、クリーネ律を用いることで、ファジィ論理関数 (現在に至っては、クリーネ関数と呼ぶ方が適切かもしれない) においてクリーネ代数の標準形を提案し^[10]、クリーネ代数が、本質的に3値論理であることを明らかにして、これらに基づいて、ファジィ論理関数の数の数え上げを行うと共に^{[11],[12]}、ファジィ論理関数の最簡形式を導き出した^{[13],[14]}。

その後、クリーネ代数は、多くの応用分野を持つことが知られるようになり、数学的な研究^[15]だけでなく、不確定入力を持つ論理回路の設計^[16]や不確定状態を含

† Complete and Independent Sets of Axioms of Kleene Algebra

Tomoko NINOMIYA, Masao MUKAIDONO

*1 玉川大学 経営学部・国際経営学科

Tamagawa Univ., School of Business Administration,
Department of International Business Administration

*2 明治大学 理工学部・情報科学科

Meiji Univ., School of Science & Technology, Department of Computer Science

む場合のシステムの記述^[17]等に応用されて来ている。特に、曖昧さを含む論理は、基本的にクリーネ代数として定式化され、人工知能の分野等では、最近、多く利用されている^{[18]-[21]}。一方、わが国においても、ファジィ論理の代数系として、ド・モルガン代数と共にクリーネ代数の数学的な性質に興味を持たれ、近藤^[22]、森岡^[24]、中島^[25]、張、廣田ら^[26]、鄧、馬野、小田ら^[27]により、多くの興味ある成果が報告されている。また、区間真理値、台形真理値、及びファジィ真理値等に関連しても、クリーネ代数が研究されている^{[28]-[30]}。

本論文は、クリーネ代数の公理系について、特に独立な公理系について考察したものである。一般に、代数系で成立する多くの等式の中には、他の等式の組合せから導かれるものもあり、その場合は互いに独立ではないことになる。最低限どの等式を仮定すれば、すなわち、どの等式を公理系として採用すれば、その代数系で成立する他のすべての等式を導くことができるかが問題となる。ここで、ある代数の公理系の各公理がお互いに独立なとき、すなわち、各公理が他の公理の組合せから導けないとき、それをその代数の**完全に独立な公理系**であるという。ある代数の公理系が与えられた時、完全に独立な公理系を知ることは、理論的な興味だけでなく、与えられた公理系の中で各公理がどのような役割を担っているか、どの公理がより本質的な役割を持っているか等々を知ることができるために、公理系を解明するうえにおいて極めて重要である。本論文では、クリーネ代数の公理系を対象にして、最初に未定係数法^{[31],[32]}を用いて、公理系における各公理の独立性を調べる。この結果に基づき、各公理の公理系における役割を明らかにし、その上で32種類の完全に独立なクリーネ代数の公理系を示す。

2. ファジィ論理とクリーネ代数

ファジィ集合では、基本的な3つの集合演算である和集合 ($A \cup B$)、積集合 ($A \cap B$)、補集合 (A^c) は、それぞれ、次のように定義されている^[6]。

(定義 2-1)

$$\begin{aligned}\mu_{A \cup B}(a) &= \mu_A(a) \vee \mu_B(a) \\ \mu_{A \cap B}(a) &= \mu_A(a) \bullet \mu_B(a) \\ \mu_{A^c}(a) &= \sim \mu_A(a)\end{aligned}$$

ただし、 $\mu_A(a)$ と $\mu_B(a)$ は要素 a がそれぞれファジィ集合 A と B に所属する度合いを表すメンバーシップ関数の値であり、閉区間 $[0, 1]$ の任意の値をとる。ここで、 $\vee, \bullet, \sim$ はファジィ論理における論理演算子であり、次のように定義される。

(定義 2-2)

$$\begin{aligned}X \vee Y &= \max(X, Y) \\ X \bullet Y &= \min(X, Y) \\ \sim X &= 1 - X\end{aligned}$$

ただし、 X と Y は $[0, 1]$ の要素。

ファジィ論理における論理演算子 $\vee, \bullet$ は、さらにそれぞれ t -コルムと t -ノルムに一般化されるが、ここでは、最も基本的なこの定義に基づいてファジィ論理を考えることにする。

ファジィ集合の集合演算が、表 1 に示される代表的な等式を満足していることは定義 2-2 より容易に示され、したがって、ファジィ論理における論理演算子の集合 $\{\vee, \bullet, \sim\}$ も同様に、閉区間 $[0, 1]$ において表 1 の等式(ただし、演算子 $\cup$ を $\vee$, $\cap$ を $\bullet$ とみなす)を満足している。これらの等式は、最も基本的なファジィ論理やファジィ集合で成立する等式である。

表 1 演算子が満たす等式
(クリーネ代数で成立する代表的な等式…公理系(1))

[1] 交換律:	(a) $X \cup Y = Y \cup X$ (b) $X \cap Y = Y \cap X$
[2] 結合律:	(a) $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$ (b) $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$
[3] 吸収律:	(a) $X \cup (X \cap Y) = X$ (b) $X \cap (X \cup Y) = X$
[4] 分配律:	(a) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ (b) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
[5] ベキ等律:	(a) $X \cup X = X$ (b) $X \cap X = X$
[6] ド・モルガン律:	(a) $\sim (X \cup Y) = \sim X \cap \sim Y$ (b) $\sim (X \cap Y) = \sim X \cup \sim Y$
[7] 復帰律:	$\sim(\sim X) = X$
[8] 最小元の存在:	(a) $0 \cup X = X$ (b) $0 \cap X = 0$
[9] 最大元の存在:	(a) $1 \cup X = 1$ (b) $1 \cap X = X$
[10] クリーネ律:	(a) $(X \cup \sim X) \cup (Y \cap \sim Y) = X \cup \sim X$ (b) $(X \cup \sim X) \cap (Y \cap \sim Y) = Y \cap \sim Y$

一般に、もし代数系が[1]交換律、[2]結合律、[3]吸収律と[5]ベキ等律を満足している場合は束であり、[4]分配律、[8]最小元の存在と[9]最大元の存在を満たす束は分配束であり、[6]ド・モルガン律と[7]復帰律を満たす分配束はド・モルガン束である。問題は、[10]のクリーネ律であり、これは、通常、束において、すべての X, Y について

$(Y \cup \sim Y) \geq X \cap \sim X$ ———— クリーネ律
が成立することと同じである。クリーネ律は、プール

代数で成立している相補律といわれる二つの等式

$$(Y \cup \sim Y) = 1 \quad \text{——— 排中律}$$

$$X \cap \sim X = 0 \quad \text{——— 矛盾律}$$

よりは弱い条件を表している。

クリーネ代数とは、クリーネ律を満たすド・モルガン代数のことであることは、既に述べた。したがって、表1の等式の集合は、クリーネ代数の公理系として採用することが出来る。

(定義2-3)

代数系 $\langle F, \cup, \cap, \sim, 1, 0 \rangle$ が表1の全ての等式を満たす時、クリーネ代数という。ただし、1, 0, X, Y, Z は F の要素である。

以上の定義より、ファジィ論理の代数系 $\langle [0, 1], \vee, \bullet, \sim \rangle$ はクリーネ代数である、すなわち、ファジィ論理はクリーネ代数の1つのモデルまたは解釈となっている。クリーネ代数の各等式を公理として扱う場合、表1の等式の集合はクリーネ代数の一つの公理系となる(以後、公理系(1)と呼ぶ)。表1の全ての公理は互いに独立であるとはかぎらない(すなわち冗長である)。表2の公理系は向殿により発見された完全に独立なクリーネ代数の公理系の例である^[9](以後、公理系(2)と呼ぶ)。すなわち、表2から表1のすべての等式が導けると共に、表2の各公理は他の公理からは導けないことが証明されている。

表2 公理系(2)

クリーネ代数の完全に独立な公理系の例

[1] 交換律:	(a) $X \cup Y = Y \cup X$
[4] 分配律:	(a) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
[6] ド・モルガン律:	(a) $\sim(X \cup Y) = \sim X \cap \sim Y$
[7] 復帰律:	$\sim(\sim X) = X$
[8] 最小元の存在:	(a) $0 \cup X = X$
[10] クリーネ律:	(a) $(X \cup \sim X) \cup (Y \cap \sim Y) = X \cup \sim X$

クリーネ代数の公理系を満足する真理値の元の数 n が 2 ~ 6 の場合のすべての有限モデルを図1に示す。すなわち、元の数 n が 2 ~ 6 の場合には、これしかないことも証明することが出来る。ここで、2 元のモデルと、4 元のモデルの(2)のみがブール代数である。

3. クリーネ代数の公理系の各公理の独立性

本論文では、未定係数法を用いて表1の公理系(1)の各公理の全てを対象として、その独立性を調べる。未定係数法は後藤^{[31], [32]}により、与えられた公理系に含まれる演算子の真理値表を計算機を用いて求めるために

図1 クリーネ代数の2～6元のモデル

提案された。そこでは、公理系に含まれる論理演算子を、意味が決まっていない未定義な演算子であるとみなして未知論理関数を用いて表し、公理系を等式として扱って未知論理関数についての連立論理代数方程式を得る。それらの連立論理代数方程式を計算機を用いて解くことにより、未知論理関数の解すなわち未定義演算子の真理値表を求めて演算子の意味を確定することができる。未定係数法を用いることにより、クリーネ代数の公理系の各公理の独立性を調べることができる。すなわち、クリーネ代数の公理系において、独立であることを調べたいある公理を除いた残りの公理系を満たす解を求める。その時、クリーネ代数のモデル以外の解が得られた場合には、その解は除いた公理以外の全ての公理を満足するが除いた公理は満足しないことになる。よって、この解は、除いた公理の独立性を証明する貴重な反例となる。ただし、逆に、この方法では、真理値の数 n_0 個の場合の n_0 元クリーネ代数の全てのモデルのみが解として得られたとしても、除いた公理はクリーネ代数の公理系において独立でないという証明にはなっていないことに注意しなければならない。なぜならば、 n_0 個よりも大きな個数の元で、反例が見つかるかもしれないからである(2.2 ド・モルガン律の独立性の節を参照)。

この章では、表1のクリーネ代数の公理系(1)を対象に各公理の独立性を調べる。表2の公理系(2)が完全に独立なクリーネ代数の公理系であることより、公理系(1)において、公理系(2)に含まれる公理以外の公理は明らかに独立でない。したがって、結合律、吸収律、ベキ等律と最大元の存在は公理系(1)において独立でないことになる。以下、公理系(2)に含まれる公理について、復帰律、ド・モルガン律、交換律、クリーネ律と分配律の順に、それぞれが公理系(1)においても独立であるかどうかを調べる(すなわち、表1において、他の公理の組み合わせからは導けないかどうかを調べる)。そのために、独立性を調べる公理を除いた公理系の解を未定係数法を適用して求め、クリーネ代数のモデル以外の解を含むかどうか調べる。クリーネ代数のモデル以外の解が得られた場合は、そのモデル以外の解の1つを、除いた公理が独立であることを証明する例として示すことにする。

3.1 復帰律の独立性

[7]復帰律： $\sim(\sim X) = X$

が独立であるかどうか検討する。(なお、復帰律は、二重否定律、または二周期律(period two)とも言われる)。

表1のクリーネ代数の公理系から復帰律のみを除いた公理系について、未定係数法を適用して解を求める。結果として、真理値の数が3である3元の場合には10種類の解が得られる。すべてを示すのは省略するが、例えば、表3と表4の2種類の解がそれに含まれている。表3の解はクリーネ代数の唯一つの3元モデルを表している(図1の3元のモデル参照)。表4の解はク

表3 3元のクリーネ代数のモデル

Y	1	2	0	Y	1	2	0	X	$\sim X$
1	1	1	1	1	1	2	0	1	0
2	1	2	2	2	2	2	0	2	2
0	1	2	0	0	0	0	0	0	1
XUY				XNY					

表4 復帰律の独立性を示す真理値表

Y	1	2	0	Y	1	2	0	X	$\sim X$
X				X					
1	1	1	1	1	1	2	0	1	1
2	1	2	2	2	2	2	0	2	1
0	1	2	0	0	0	0	0	0	1
XUY				XNY					

リーネ代数のモデルではない。したがって、クリーネ代数の公理系(1)において、復帰律は他のすべての公理に対して独立であり、表4の解が復帰律の独立性を証明する例となる。

3.2 ド・モルガン律の独立性

[6]ド・モルガン律： $(a) \sim(X \cup Y) = \sim X \cap \sim Y$
 $(b) \sim(X \cap Y) = \sim X \cup \sim Y$

の1つが独立であるかどうか検討する。

クリーネ代数の公理系(1)からド・モルガン律(a)とド・モルガン律(b)を除いた公理系について、未定係数法を適用して解を求める。その結果、3元の場合にはクリーネの3元モデルの解のみが得られる。したがってド・モルガン律は独立であるかどうかは不明であるが、さらに4元の場合の解を求めると5種類の解が得られ、その中に、例えば、表5-1、表5-2と表6の解がそれに含まれる。表5-1と表5-2の解はクリーネ代数の2つの4元モデルを表している(図1の4元のモデル(1),(2)参照)。しかし、表6の解はクリーネ代数のモデルではない。したがって、クリーネ代数の公理系(1)においてド・モルガン律(a)とド・モルガン律(b)の1つは他の公理に対して独立であることになり、表6の解がその独立性を証明する例となる。前述したように、一般に与えられた代数公理系において、ある公理を除いた公理系の n_0 元の解を求めてその代数のモデルのみが得られたからといって、除いた公理は他の全公理に対して独立でないとは言えない。なぜならば、この例のように n_0 個よりも多い真理値を持つ多元の代数の公理系の解を求めると、その代数のモデル以外の解が得られ、除いた公理が他の公理に対して独立であること

表5-1 4元のクリーネ代数のモデル(1)

Y	1	2	3	0	Y	1	2	3	0	X	$\sim X$
X					X						
1	1	1	1	1	1	1	2	3	0	1	0
2	1	2	2	2	2	2	2	3	0	2	3
3	1	2	3	3	3	3	3	3	0	3	2
0	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0	1
XUY					XNY						

表5-2 4元のクリーネ代数のモデル(2)

Y	1	2	3	0	Y	1	2	3	0	X	$\sim X$
X					X						
1	1	1	1	1	1	1	2	3	0	1	0
2	1	2	1	2	2	2	2	0	0	2	3
3	1	1	3	3	3	3	0	3	0	3	2
0	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0	1
XUY					XNY						

表6 ド・モルガン律の独立性を示す真理値表

Y	1	2	3	0	Y	1	2	3	0	X	~X
X					X						
1	1	1	1	1	1	1	2	3	0	1	2
2	1	2	3	2	2	2	2	2	0	2	1
3	1	3	3	3	3	3	2	3	0	3	0
0	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0	3
XUY					XNY						

が証明される場合があるからである。

3.3 交換律の独立性

同様に、未定係数法を用いて処理することにより、

[1] 交換律: (a) $X \cup Y = Y \cup X$

(b) $X \cap Y = X \cap Y$

の1つは他の公理に対して独立であることを示すことができる。この場合も、3元の解を求めても交換律の独立性は証明されないが、4元の解を求めることにより交換律(a)または交換律(b)のいずれか1つがクリーネ代数の公理系(1)の交換律以外の全公理に対して独立であることが証明できる。表7の真理値表は、交換律を除いた公理系から得られる解であるがクリーネ代数のモデルではない。したがって、交換律のいずれか1つが公理系(1)の他の公理に対して独立であることを証明する解の例となる。

表7 交換律の独立性を示す真理値表

Y	1	2	3	0	Y	1	2	3	0	X	~X
X					X						
1	1	1	1	1	1	1	2	3	0	1	0
2	1	2	1	2	2	2	2	0	0	2	3
3	1	1	3	3	3	3	0	3	0	3	2
0	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0	1
XUY					XNY						

3.4 クリーネ律の独立性

同様に、未定係数法を用いて処理することにより、

[10] クリーネ律: (a) $(\sim X \cup X) \cup (\sim Y \cap Y)$
 $= \sim X \cup X$

(b) $(\sim X \cup X) \cap (\sim Y \cap Y)$
 $= \sim Y \cap Y$

の1つは他の公理に対して独立であることを示すことができる。表8の真理値表は、クリーネ律を除いた公理系から得られる解であるがクリーネ代数のモデルではない。したがって、クリーネ律のいずれか1つが公理系(1)の他の公理に対して独立であることを証明する解の例となる。

表8 クリーネ律の独立性を示す真理値表

Y	1	2	3	0	Y	1	2	3	0	X	~X
X					X						
1	1	1	1	1	1	1	2	3	0	1	0
2	1	2	1	2	2	2	2	0	0	2	2
3	1	1	3	3	3	3	0	3	0	3	3
0	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0	1
XUY					XNY						

3.5 分配律の独立性

他の公理と同様に、未定係数法を用いて処理することにより、

[4] 分配律: (a) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

(b) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

の1つは他の公理に対して独立であることを示すことができる。この場合には3元と4元の解を求めても分配律の独立性は証明されないが、5元の解を求めることによりはじめて分配律(a)または分配律(b)のいずれか1つがクリーネ代数の公理系(1)の分配律以外の全公理に対して独立であることが証明される。表9の真理値表は、分配律を除いた公理系から得られる解であるがクリーネ代数の5元のモデルではない。したがって、分配律のいずれか1つが公理系(1)の他の公理に対して独立であることを証明する解の例となる。

表9 分配律の独立性を示す真理値表

Y	1	2	3	3	0	Y	1	2	3	4	0	X	~X
X						X							
1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	0	1	0
2	1	2	1	1	2	2	2	2	0	0	0	2	4
3	1	1	3	1	3	3	3	0	3	0	0	3	3
4	1	1	1	4	4	4	4	0	0	4	0	4	2
0	1	2	3	4	0	0	0	0	0	0	0	0	1
XUY						XNY							

4. 完全に独立なクリーネ代数の公理系

3章の検討結果から、クリーネ代数の公理系は表1の基本的な公理のうち少なくとも次の(1)~(5)の5種類の公理を含んでいなければならない。

(1) [7] 復帰律: $\sim(\sim X) = X$

(2) [6] ド・モルガン律: (a) $\sim(X \cup Y) = \sim X \cap \sim Y$
 (b) $\sim(X \cap Y) = \sim X \cup \sim Y$

の1つ

(3) [1] 交換律: (a) $X \cup Y = Y \cup X$
 (b) $X \cap Y = X \cap Y$

の1つ

- (4) [10]クリーネ律: (a) $(\sim X \cup X) \cup (\sim Y \cap Y)$
 $= \sim X \cup X$
 (b) $(\sim X \cup X) \cap (\sim Y \cap Y)$
 $= \sim Y \cap Y$

の1つ

- (5) [4]分配律: (a) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
 (b) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

の1つ.

さらに, $1 = \sim 0$ と定義することにより,

- (6) [8]最小元の存在: (a) $0 \cup X = X$ (b) $0 \cap X = 0$

[9]最大元の存在: (a) $1 \cup X = 1$ (b) $1 \cap X = X$

のいずれか1つが独立であることは容易に証明できる. したがって, クリーネ代数の公理系は最小元の存在と最大元の存在の1つを含んでいなければならない.

上記の(1)~(6)の6種類は, すべて独立であることが示されたので, もし, これらの6種類の独立な公理から構成される公理系から, 表1のクリーネ代数のすべての等式が得られるならば, その公理系は最小個数の基本的な公理で構成される完全に独立なクリーネ代数の公理系となる. 事実, 表2の公理系(2)は, この条件を満たしており, また, これ以外にもあり得る. 実際にそれらの公理系が完全に独立なクリーネ代数の公理系となるかを次のstep1とstep2の順に調べる.

Step1. (1)~(6)の6種類の公理で構成される公理系の全てについて, 未定係数法を用いて3元の解を求める.

ここで得られた解がクリーネ代数のモデルのみの場合は, 公理系はクリーネ代数の公理系の候補となる. 一方, クリーネ代数のモデル以外の解が存在する場合は, 明らかに公理系はクリーネ代数の公理系ではないことになる.

Step2. クリーネ代数の公理系の候補が実際にクリーネ代数の公理となるか証明を試みる.

Step1の結果, 3元においてはクリーネ代数の公理系の候補となっても, 4元以上の多元においてクリーネ代数のモデルのみが得られるかどうかは不明であり, また未定係数法を用いて全ての多元の解を調べることは不可能である. したがって, 候補の公理系から表1のその他の全ての公理が導出できるかどうかを数学的に調べる. もし全ての公理が導出できれば, その候補はクリーネ代数の公理系となる.

以下step1とstep2の処理結果の詳細を記述する.

4.1 Step1の処理と結果

(1)~(6)の6種類の公理のすべての組み合わせ64組について処理した結果, 次の①と②の事実が明らかとなった.
 ① (6)の[8]最小元の存在: (a) $0 \cup X = X$ または[9]最大元の存在: (b) $1 \cap X = X$ のいずれか1つと(1)~(5)の1

種類ずつの全ての組み合わせからなる32種類の公理系はクリーネ代数の公理系の候補となる.

② (6)の[8]最小元の存在: (b) $0 \cap X = 0$ または[9]最大元の存在: (a) $1 \cup X = 1$ のいずれか1つと(1)~(5)の1種類ずつの全ての組み合わせからなる32種類の公理系はクリーネ代数の公理系とはならない.

②の例として, 例えば, その組合せの一つである表10の公理系は, クリーネ代数の公理系とはならない. 何故ならば, この公理系を満足する3元の解の1つとして, 表11の真理値表で表される解が得られる. 解は明らかにクリーネ代数のモデルではない. したがって, 表10の公理系はクリーネ代数の公理系ではない. ②の6種類の公理からなるその他の公理系全てがクリーネ代数のモデルでない解を含んでいることを同様に示すことができる.

表10 公理系(3)

クリーネ代数の公理系でない例

[1]交換律:	(a) $X \cup Y = Y \cup X$
[4]分配律:	(a) $X \cap (Y \cup Z)$ $= (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
[6]ド・モルガン律:	(a) $\sim (X \cup Y) = \sim X \cap \sim Y$
[7]復帰律:	$\sim (\sim X) = X$
[8]最小元の存在:	(b) $0 \cap X = 0$
[10]クリーネ律:	(a) $(X \cup \sim X) \cup (Y \cap \sim Y)$ $= X \cup \sim X$

表11 表10の公理系がクリーネ代数の公理系でないことを示す真理値表

Y	1	2	0	Y	1	2	0	X	$\sim X$
X				X					
1	1	1	1	1	1	0	0	1	2
2	0	2	0	2	0	2	0	2	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$X \cup Y$

$X \cap Y$

4.2 Step2の処理と結果

表2の公理系(2)の公理から表1の公理系(1)の全ての公理は図2の手順で導出できることがすでに証明されている^[9]. また, 復帰律が成立している場合は, 明らかにド・モルガン律はいずれか一方から他方を導出でき, 復帰律とド・モルガン律が成立している場合は, 交換律のいずれか一方から他方を, 最小元の存在(a)から最大元の存在(b)が導出できる. 分配律とクリーネ律についても同様である. したがって, 証明のステップの詳細は省略するが, step1で得られた32組の候補は, 全て実際にクリーネ代数の完全に独立な公理系となることを, 図2と同様のステップで証明することが出来る. 表12

の公理(4)は、この場合の1つの例である。

表12 公理系(4)

クリーネ代数の完全に独立な公理系の例

[1]交換律:	(a) $X \cup Y = Y \cup X$
[4]分配律:	(a) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
[6]ド・モルガン律:	(b) $\sim(X \cap Y) = \sim X \cup \sim Y$
[7]復帰律:	$\sim(\sim X) = X$
[8]最小元の存在:	(a) $0 \cup X = X$
[10]クリーネ律:	(a) $(X \cup \sim X) \cup (Y \cap \sim Y) = X \cup \sim X$

5. 結言

クリーネ代数で成立する最も基本的な等式を10種類選び出し、未定係数法を適用することにより、それらの等式の集合の中から、6種類の等式が他の等式に対して独立であることを示すことができた。さらに、それらの6種類の等式から構成されるクリーネの公理系の中で、32種類の異なった“完全に独立なクリーネ代数の公理系”を見出し、それを証明した。また、他の32種類の等式の組合せは、クリーネ代数の公理系とならないことも証明できた。すなわち、6個の基本的な等式で構成される完全に独立なクリーネ代数の公理系は、証明された32種類以外には存在しないことが明らかとなった。このことより、クリーネ代数の公理系を

図2 クリーネ代数の基本的公理の導出順序

構成する最も基本的な公理は、クリーネ律、交換律、分配律、ド・モルガン律、復帰律と最小元の存在あるいは最大元の存在であることが明確になると共に、クリーネ律が成立すること、即ち、矛盾律および排中律が成立しないことが、二重否定律が成立つクリーネ代数の特徴であり、ファジィ論理の基本的性質であることが分かった。これらの6種類の公理を連立多値論理方程式と見なして、未定係数法を適用して、満足する解を網羅的に求めることにより、クリーネ代数の有限モデルをすべて導出することができるが、これらについては、次の機会に報告する予定である。

謝辞

査読者からのコメントと情報提供に対して感謝申し上げます。

参考文献

- [1] J. A. Kalman, Lattice with involution, Trans. Amer. Math. Soc. 87, pp485-491, 1958
- [2] A. Bialynicki-Biura and H. Rasiowa, On constructible falsity in constructive logic with strong negation, Colloquium Mathematicum 6, 287-310, 1958
- [3] H. Rasiowa, An Algebraic Approach to Non-Classical Logics, North-Holland, 1974
- [4] R. Balbes and P. Dwinger, Distributive Lattices, University of Missouri Press, pp.215, 1974
- [5] D. Bringnole and A. Monteiro, Caracterisation des algebras de Nelson par de egalities, Notas de Logica Matematica, Instituto de Matematica Universidad del sur Bahia Blanca, 20, 1964
- [6] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information Control, 8, pp. 338, 1965
- [7] F. P. Preparata and R. T. Yeh, Continuously valued logic, J. of Computer and Systems Science, 6, pp.397, 1972
- [8] 向殿政男, Fuzz 論理における 2, 3 の性質について, 電子通信学会論文誌, Vol.58-D, No.3, pp.150~157, 1975. 3
- [9] M. Mukaidono, A set of independent and complete axioms for a fuzzy algebra (Kleene algebra), Proceedings of The 8th International Symposium on Multiple-Valued Logic, IEEE, 1981
- [10] 向殿政男, Fuzz 論理関数の代数的構造とその最簡形式および既約形式, 電子通信学会論文誌, Vol.58-D, No.12, pp.748~755, 1975.12
- [11] M. Mukaidono, New canonical forms and their applications to enumerating fuzzy switching functions, Proceedings of the 12th International Symposium on Multiple-Valued Logic, IEEE, pp.275~279, 1982
- [12] J. Bermann and M. Mukaidono, Enumerating Fuzzy Switching Functions and Free Kleene Algebras, International Journal of Computer and Mathematics with Applications, Pergamon Press, Vol.

- 10, No.1, pp.25-35, 1984
- [13] M. Mukaidono, The representation and minimization of fuzzy switching functions, *The Analysis of Fuzzy Information*, Vol.1, edited by J. C. Bezdek, CRC Press, pp.213-229, 1987
- [14] 向殿政男, ファジィ論理, 日刊工業新聞社, 講座ファジィ第4巻, 1993
- [15] Dexter Kozen: On Kleene algebras and closed semirings, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol.452, pp. 26-47. Springer, 1990.
- [16] Y. Iguchi, T. Sasao, and M. Munehiro, On Properties of Kleene TDDs, *IEICE Trans. INF. & SYST.* Vol.E81-D, No.7, pp.716-723, July 1998
- [17] J. A. Brzozowski, Some Applications of Ternary Algebras, *Publications Mathematics*, Vol.54, Supplement, pp.583-589, 1999
- [18] H. Kikuchi and N. Takagi, Hierarchical Fuzzy Modeling and Jointly Expandable Functions, *International Journal of Intelligent Systems*, vol.17, no. 5, pp.515-530, 2002
- [19] N. Takagi and K. Nakashima, Discrete Interval Truth Values Logic and Its Application, *The Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Computers*, vol.49, no.3, pp.219-229, 2000
- [20] Y. Hata, K. Nakashima and K. Yamato, Some Fundamental Properties of Multiple-Valued Kleenean Functions and Determination of Their Logical Formulas, *IEEE Trans. On Comput.*, Vol. 42, No.8, pp.950-961, 1993
- [21] T. Araki, M. Mukaidono and F. Yamamoto, Ternary Kleenean Non-additive measure, *Beyond Two: Theory and Applications of Multiple-Valued Logic*, edited by M. Fitting and E. Orłowska, Springer-Physica Verlag, pp.237-250, 2003
- [22] 近藤通朗, クリーネ代数における量子化定理について, *日本ファジィ学会誌*, Vol.6, No.1, pp.124-129, 1994
- [23] 近藤通朗, クリーネ論理の特徴づけ, *日本ファジィ学会誌*, Vol.7, No.1, pp.95-102, 1995
- [24] 森岡正臣, 中心を持つクリーネ代数とド・モルガン代数の諸性質に関する研究, *日本ファジィ学会誌*, Vol.7, No.3, pp.572-584, 1995
- [25] 中島信之, 盛岡正臣, 不動核によるド・モルガン代数とクリーネ代数の特徴づけ, *日本ファジィ学会誌*, Vol.9, No.6. pp.988-994, 1997
- [26] 張昆竜, 廣田薫, 中川友紀子, 中心をもつクリーネ代数とド・モルガン代数, *日本ファジィ学会誌*, Vol.9, No.1, pp.131-139, 1997
- [27] 鄧建明, 馬野元秀, 小田哲久, 宇野裕之, ド・モルガン代数とクリーネ代数に関するいくつかの性質, *日本ファジィ学会誌*, Vol.12, No.2, pp.341-350, 2000
- [28] 向殿政男, 安井浩之, 区間真理値の代数的構造, *電子情報通信学会論文誌 D-I*, Vol.J81-D-I, No.8, pp.939-946, 1989
- [29] 大塚和彦, 江本全志, 向殿政男, ファジィ論理における台形真理値の性質について, *日本ファジィ学会誌*, Vol.11, No.2, pp.338-346, 1999
- [30] M. Emoto & M. Mukaidono, Necessary and sufficient conditions for fuzzy truth values to form a De Morgan algebra, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* Vol.7, No.4, pp.309-316, 1999
- [31] 加王森治, 後藤以紀, 公理中の無定義演算記号の真理値表を未定係数法で決定する方法について, *電気学会論文誌 A*, Vol.95, No.5, 1975
- [32] M. Goto, S. Kao and T. Ninomiya, Determination of many-valued truth tables for undefined operators in axioms by a computer and their applications, *Proceedings of the 7th International Symposium on Multiple-Valued Logic*, IEEE, 1977
- [33] T. Ninomiya and M. Mukaidono, Clarifying the axioms of Kleene algebra based on the method of indeterminate coefficients, *Proceedings of the 29th International Symposium on Multiple-Valued Logic*, IEEE, 1999
- [34] T. Ninomiya and M. Mukaidono, Independence of the axioms of Boolean algebra in multiple-valued logic, *Proceedings of the 30th International Symposium on Multiple-Valued Logic*, IEEE, 2000
- (2003年9月20日 受付)
(2003年12月2日 採録)
- [問い合わせ先]
〒194-8610 東京都町田市玉川学園6-1-1
玉川大学経営学部国際経営学科
二宮 智子
TEL: 042-739-8240
FAX: 042-739-8828
E-mail: ninomiya@bus.tamagawa.ac.jp

著者紹介

二宮 智子 [正会員]
にのみや ともこ

玉川大学経営学部国際経営学科
1968年 津田塾大学学芸学部数学科卒業、博士(理学)。2000年4月 玉川大学文学部英米文学科助教授、2001年から玉川大学経営学部国際経営学科助教授。この間明治大学情報科学センター等で多値論理代数公理系の解明やデータ分析の研究に従事。日本ファジィシステム学会、日本統計学会、日本行動計量学会、数学教育学会などの会員。

向 殿 政男 [正会員]
むかいどの まさお

明治大学理工学部情報科学科
1965年 明治大学工学部電気工学科卒業。1970年 明治大学大学院工学研究科博士課程修了、工学博士、同年明治大学工学部専任講師。1978年 同教授、現在、明治大学理工学部長、兼同大学院理工学研究科委員長。主に、情報学、安全学、論理学、特にその中でも、ファジィ理論、フェールセーフ論理、機械安全、多値論理の研究に従事。国際ファジィシステム学会 (IFSA) 副会長、日本ファジィ学会会長を歴任。現在、日本信頼性学会会長、私立大学情報教育協会常務理事、アジアファジィシステム学会 (AFSS) 会長、ISO/TC199(機械安全)国内審議会委員長、電子情報通信学会フェロー、日本知能情報ファジィ学会フェロー、国際ファジィシステム学会 (IFSA) フェロー。

Complete and Independent Sets of Axioms of Kleene Algebra

by

Tomoko NINOMIYA, Masao MUKAIDONO

Abstract :

In general, some equations can be reduced from others (that is, some equations are not independent from others) in a set of axioms of an algebra. Then, it is an important problem to find a complete and independent set of axioms, where each axiom is independent of each other. In this paper the research works on axioms of Kleene algebra are surveyed. At first, we show a given axiom of Kleene algebra is independent or not from the others by using the method of indeterminate coefficients. Next, through these investigations we can clarify the properties of each axiom of Kleene algebra and 32 kinds of complete and independent sets of axioms are shown.

Keywords : Fuzzy Logic, Kleene Algebra, a Set of Axioms of an Algebra, the Method of Indeterminate Coefficients, a Complete and independent Set of Axioms of an Algebra

Contact Address : **Tomoko NINOMIYA**

Tamagawa Univ., School of Business Administration, Department of International Business Administration

6-1-1 Tamagawagakuen, Machida-shi, Tokyo, 194-8610 Japan

TEL : 042-739-8240

FAX : 042-739-8828

E-mail : ninomiya@bus.tamagawa.ac.jp