原著論文

区間効率値に基づく出力値の改善†

円谷 友英*¹・市橋 秀友*²・田中 英夫*³

本研究では、DEAにおける区間効率値の改善方法を提案する。従来のDEAは、当該事業体に対して仮想出力の仮想入力に対する比の相対的な最大値を効率値として、事業体にとって有利な重み付けを行い評価する手法であるといえる。それに対して、真の効率値が存在する区間として区間効率値を求める手法が提案されている。区間効率値は、有利な立場からの評価である上限と不利な立場からの評価である下限により定められ、上限は従来のDEAによる効率値と一致する。下限は、従来のDEAでは最大効率値を求めるのに対して、最小効率値を求める最適化問題により求められる。改善対象となるDMUは、区間効率値の上限が1ではないDMU、すなわち有利な立場から評価しても効率的であると判断されないDMUとする。本研究では、区間効率値に基づき、従来のDEAの考え方と同様である区間効率値の上限を1に改善し、そのうち下限ができるだけ大きくなるような改善方法を提案している。区間効率値の下限は与えられる出力値に偏りがあるとき小さくなるので、下限を考慮して改善を行うと、DMUの与えられた各項目の入力値を配慮して、それらがバランスのよい出力値となるように改善することができる。出力値のみに着目して、与えられた出力値を減らすことなくDMUを改善する方法を示すが、入力値のみに着目する方法、入出力値を同時に考慮する方法についても同様に考えることができる。

キーワード：DEA, 区間効率値, 改善

1. はじめに

包絡分析法(Data Envelopment Analysis:DEA) [1] [2]は多入力多出力システムにおける効率性の評価手法であり、効率値を分析対象である各事業体(DMU: Decision Making Unit)に対してウェイト変数による仮想出力の仮想入力に対する比の相対的な最大値として定式化している。効率値は、各DMUの長所となる項目に大きなウェイトを与える有利な立場からの評価から、単一の実数値として求められる。一方、DMUにとって不利な立場から評価するIDEA [8]が提案されている。しかし、DEAとIDEAではそれぞれ定式化の方法が異なる。そこで、効率値を区間値として解析する手法が定式化されている [3]。これはDEAと同じ目的関数と制約条件を用い、その最大化により上限を、最小化により下限を求めることで効率値を区間値として求める手法である。区間効率値は、有利な立場の評価から得られる上限と、各DMUの欠点となる項目に大

きなウェイトを与える不利な立場の評価から得られる下限により定められる。区間効率値の上限は、従来のDEAと同じ考え方に基づいている。

本研究では、区間効率値を考慮したDMUの活動の改善方法を提案する。従来のDEAモデルでは効率値は実数値として得られ、入出力値を変化させて、効率値が1になるように改善することが考えられている。本研究では区間効率値モデルを用い、区間値として表される効率値を改善する手法を提案する。具体的には、従来のDEAの考え方と同様である区間効率値の上限を1にするという条件の下で、その下限をできるだけ改善する手法を提案することが目的となる。

改善対象となるDMUは区間効率値の上限が1に満たないDMUとする。これらは従来の効率値の意味からも改善対象となるDMUであり、都合のよい立場から評価されたとしても改善の余地があるDMUである。すなわち、区間効率値の上限と等しい従来の効率値に基づき改善する必要があるならば、下限を考慮して改善すべきであるという考えに基づいている。以上のように、与えられた入出力データによる生産可能集合に基づき改善を考えるので、区間効率値の上限(従来の効率値)が1であるDMUは改善対象ではない。このようなDMUの中には、出力項目のどれかが極端に悪いものも存在し、この項目がよくなるように改善することも考えられる。しかし、これは別の改善問題となるので、本研究では検討しないことにする。

有利な立場からの評価である区間効率値の上限が1

† An approach to improvement by adjusting outputs considering interval efficiency values

Tomoe Entani, Hidetomo Ichihashi, Hideo Tanaka

*1 高知大学

Kochi University

*2 大阪府立大学大学院

Osaka Prefecture University

*3 広島国際大学

Hiroshima International University

未満である DMU について、それを 1 にし、さらに区間効率値の下限を考慮して DMU の出力値を変化させる。区間効率値の下限は DMU にとって都合の悪い項目に着目した相対的な効率値であり、不利な立場からの評価となっている。下限が小さいことは DMU が特異な出力値を含んでいることを意味し、この出力値が下限を低下させている。したがって、下限を考慮すると DMU は特に劣っている項目がなくなるように改善される。このようにいずれかの項目への偏りが少なくなるように改善した出力値をバランスのとれた出力値であるという。改善する必要がある DMU に対して、できるだけ偏りが少ない方向を改善案として示すことは望ましく、またバランスがよい出力値は改善目標として説得性がある。

DMU の効率値の改善として、出力値を増やす方法、入力値を減らす方法、その両方を同時に行う方法の 3 種類が考えられる。これらのどの方法が用いられるかは問題の状況に委ねられるが、本論文では出力のみを考えた改善方法を提案する。入力のみを考える場合も同様に考えることができ、さらに入力と出力を同時に考慮する場合へと拡張することができる。

本論文では、まず 2 章で DEA の区間効率値モデル[3]について簡単に紹介する。次に、3 章で 1 入力 2 出力の例を用いて図から改善方向および改善方法を説明し、4 章で出力のみを考える出力に関する改善の定式化を行う。5 章で 3 章で用いる 1 入力 2 出力の数値例に加えて 2 入力 2 出力の場合の出力に関する区間効率値の改善結果を示す。

2. 区間効率値モデル

DEA は分析対象である各事業体(DMU)にとって有利な立場からウェイト付けし、その効率値を求める手法である。一方、DMU にとって不利な立場から評価する IDEA[8]が提案されている。しかし、DEA と IDEA ではそれぞれ定式化の方法が異なる。すなわち、目的関数や制約条件が異なる。そこで新たに提案されているのが、DEA の効率値を区間値として解釈する区間効率値モデル[3]であり、同じ目的関数と制約条件を用いてその最大化問題と最小化問題を定式化し、相対的な効率値の上下限値を求めるものである。効率値はその上限と下限により区間値として求められる。区間効率値の上限は DMU にとって有利な立場から、下限は不利な立場からの評価を表している。

まず、区間効率値の上限を求めるモデルは次のように定式化されている。

$$\begin{aligned} \theta_o^E = \max_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} & \frac{\mathbf{u}^t \mathbf{y}_o}{\mathbf{v}^t \mathbf{x}_o} \\ & \max_j \frac{\mathbf{u}^t \mathbf{y}_j}{\mathbf{v}^t \mathbf{x}_j} \\ \text{s.t. } & \mathbf{u} \geq 0 \\ & \mathbf{v} \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 $\mathbf{x}_j$ と $\mathbf{y}_j$ は、それぞれ DMU_j に対する入出力ベクトルであり、 $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, \dots, x_{jk}) \geq 0$ と $\mathbf{y}_j = (y_{j1}, \dots, y_{ji}) \geq 0$ で表される。 $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は出力ウェイトベクトルと入力ウェイトベクトルを表している。 $j=1, \dots, n$ として、DMU は n 個あるとする。

(1) 式では、すべての DMU に対する(仮想出力)/(仮想入力)の最大値を基準に、分析対象である DMU_o の(仮想出力)/(仮想入力)を効率値とみなし、その比を最大化する。(1) 式と従来の DEA で用いられている LP 問題の最適目的関数値は等しい。すなわち、区間効率値の上限は、以下の DEA の基本モデルである CCR(Charnes Cooper Rhodes)モデル[1][7]から得られる。

$$\begin{aligned} \theta_o^E = \max_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} & \mathbf{u}^t \mathbf{y}_o \\ \text{s.t. } & \mathbf{v}^t \mathbf{x}_o = 1 \\ & \mathbf{u}^t \mathbf{y}_j - \mathbf{v}^t \mathbf{x}_j \leq 0 \quad (\forall j) \\ & \mathbf{u} \geq 0 \\ & \mathbf{v} \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

次に、区間効率値の下限を求めるモデルは次のように定式化されている。

$$\begin{aligned} \theta_o^E = \min_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} & \frac{\mathbf{u}^t \mathbf{y}_o}{\mathbf{v}^t \mathbf{x}_o} \\ & \max_j \frac{\mathbf{u}^t \mathbf{y}_j}{\mathbf{v}^t \mathbf{x}_j} \\ \text{s.t. } & \mathbf{u} \geq 0 \\ & \mathbf{v} \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

区間効率値の上限(1)式はそれぞれの DMU にとって有利な立場からの評価であるので(仮想出力)/(仮想入力)の比が最大化されたが、下限は不利な立場からの評価であるので、逆にこれが最小化される。(3)式の最適目的関数値は、次の値と等しいことが示されている。

$$\theta_o^E = \min_{p, r} \frac{y_{op}}{x_{or}} \max_j \frac{y_{jp}}{x_{jr}} \quad (4)$$

これは、(3)式の入力ウェイトベクトル $\mathbf{v}$ の第 r 番目の要素と出力ウェイトベクトル $\mathbf{u}$ の第 p 番目の要素が 1 で、それ以外が 0 となる場合である。すなわち、第 r 番

目の入力値と第 p 番目の出力値のみを考えている。例えば y_{j1}/x_{j2} は、入力 2 と出力 1 のみを考えた場合である。区間効率値の下限は DMU_o が相対的に劣っている入出力項目 1 つずつにより評価されたときの効率値を表している。(4) 式では最大化と最小化のみを行うことにより区間効率値の下限を求めることができ、LP 問題を解く必要はない。詳細については、文献[3]を参照されたい。

3. 下限を考慮した改善方法

DMU の効率値の改善として、出力を増やす方法、入力を減らす方法、その両方を同時に行う方法の 3 種類が考えられるが、ここでは出力を増やすという観点からの改善を考える。従来の DEA モデルでの改善、すなわち区間効率値の上限を改善する方法として、いくつかの方法が提案されている[4][5][6][7]。文献[7]では、すべての出力項目を $1/\theta_o^*$ 倍するという方法が提案されており、この改善後の区間効率値の上限は 1 となる。

本研究では上限だけでなく下限を考慮して、出力値を増やすことに着目した改善方法を提案する。下限を考慮して出力項目ごとに異なる割合で値を増加させ、DMU の特に劣っている項目を重視した改善を行う。すなわち、区間効率値の上限を 1 にして、かつ下限をできるだけ大きくするような出力値を改善案として求める。各 DMU の与えられた出力値を減らすことなく最大限に区間効率値を改善し、与えられた出力値より大きい、または等しい出力値が改善後の出力値として得られる。したがって、改善対象となるのは区間効率値の上限が 1 未満となる DMU であり、これらは従来の効率値の意味からも改善対象となっている。また、本研究では、効率性評価の基準として用いる区間効率値が DMU の効率値として可能性があるものをすべて考慮した区間値であるので、その上限が 1 となることが DMU にとって有利な立場から評価すれば効率的であると判断されることを意味する点からも妥当である。

簡単のため 1 入力 2 出力の例を用いて、その改善方法の考え方を以下に説明する。図 1 において、横軸は出力 1/入力 1 ($z_1 = y_1/x_1$) であり、縦軸は出力 2/入力 1 ($z_2 = y_2/x_1$) である。この例では、区間効率値の上限が 1 となる DMU は A, E, J であり、これらを結ぶ直線上では区間効率値の上限が 1 となり、これは効率的フロンティアと呼ばれる。さらに、A から水平に伸びる線と J から垂直に伸びる線までを考慮すると、すべてのデータはこの線で囲まれる領域内に包み込まれることになる。この領域を生産可能集合と呼び、次式で表される。

図 1：従来の改善と下限を考慮した改善

$$P = \{(x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0\} \quad (5)$$

ここで、 X, Y はそれぞれすべて DMU の入出力値からなる行列である。(5) 式は、データ空間上で、入力がより大きくて出力がより小さい DMU は生産可能となることを表している。

図 1 に示す 1 入力 2 出力において、B の改善を考える。B の区間効率値の下限は (4) 式により、以下のよう求められる。

$$\begin{aligned} & \min \left\{ \frac{\frac{y_{B1}}{x_{B1}}}{\max_j \frac{y_{j1}}{x_{j1}}}, \frac{\frac{y_{B2}}{x_{B1}}}{\max_j \frac{y_{j2}}{x_{j1}}} \right\} \\ & = \min \left\{ \frac{z_{B1}}{\max_j z_{j1}}, \frac{z_{B2}}{\max_j z_{j2}} \right\} \end{aligned}$$

すなわち、区間効率値の下限は、出力 1 に関する効率値と出力 2 に関する効率値との最小値で与えられる。この 2 つの効率値が等しくなり、共に 1 となるところを B の理想点と定義する。既存の DMU を基に考えられる区間効率値の下限が最大となる仮定の DMU が理想点である。図 1 において * で表されている理想点の座標は、

$$(\bar{z}_{B1}, \bar{z}_{B2}) = \left(\max_j \frac{y_{j1}}{x_{j1}}, \max_j \frac{y_{j2}}{x_{j1}} \right)$$

となり、そのときの理想出力値は、

$$\begin{aligned} & (\bar{y}_{B1}, \bar{y}_{B2}) \\ & = \left(\max_j \frac{y_{j1}}{x_{j1}} x_{B1}, \max_j \frac{y_{j2}}{x_{j1}} x_{B1} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

となる。このとき、出力 1 と出力 2 に関する効率値は共に 1 となるので (4) 式が 1 となる。区間効率値の下限は原点から理想点に近づくほど大きくなるが、理想点

は明らかに生産可能集合の外側にある。そこで、理想点と原点とを結ぶ直線と効率のフロンティアが交わる B' を、 B の目標点とする。目標点では生産可能集合内で区間効率値の下限が最大となり、上限は 1 となる。このような目標点を求める問題を 4 章の step 1 で考える。

改善対象となるのは、有利な立場からの評価である区間効率値の上限が 1 未満の DMU である。これらの DMU について、区間効率値の上下限を共に考慮することで、特定の出力項目への偏りが少なくバランスのよい改善目標を示す。図 1 では効率のフロンティア上にある A, E, J 以外の DMU であり、これらについて従来の改善と提案手法との比較を行う。本研究では従来の効率値の意味からも改善対象となる DMU について、その区間効率値の下限を考慮することで、いずれかの項目への偏りが少ないバランスのよい出力値を求める。点線矢印は、出力 1, 2 ともに $1/\theta_o^p$ 倍することにより、区間効率値の上限を 1 にするという従来の改善を示している。それに対し、区間効率値を考慮すると、実線矢印のような改善を考えることができる。図 1 より実線矢印による改善は、点線矢印で示される改善案よりもバランスがよい出力値を示していることがわかる。この改善後は区間効率値の上限が 1 となり、下限は改善を行う前よりも最大限に大きくなっている。区間効率値の下限がより大きくなる方向を決定するのが*で表された理想点となる。区間効率値の下限はこれとの比較により求められる。

図 1 の例では、区間効率値の上限が 1 ではないすべての DMU に対する理想点は*となる。よって、生産可能集合内で区間効率値の上限が 1 となり下限が最大となる目標点は、4 章の step 1 により求められ、すべての DMU に対して唯一 B' である。ただし、区間効率値の下限が最大となる理想点や目標点は、各 DMU の入力値を反映しているので、例のように唯一に決まるとは限らない。

ここでは、出力値を減らさずに増やすことをだけを考えるので、すべての出力値が目標点 B' よりも小さい B, D, F は目標点 B' に改善される。また、C, G は z_2 が目標点 B' より大きくなっているため、出力 2 の値を固定し出力 1 を増加させる。同様に、H, I は z_1 が B' より大きくなっているため、出力 1 を固定し出力 2 を増加させる。このように目標点 B' よりも大きい出力値がある DMU は、出力 1 または出力 2 を固定したままでもう一方の出力値を増加させることで、区間効率値の上限が 1 となるように改善する。これを 4 章での step 2 で考える。下限を考慮して改善を行うとき、改善対象となる DMU は、次の (a) と (b) の 2 種類に分類される。

- (a) すべての項目の出力値が目標点よりも小さい：固定する出力項目がない DMU (例では B, D, F)
- (b) 目標点より大きな出力値をもつ項目が存在する：固定する出力項目がある DMU (例では C, G, H, I)

(a) の DMU は目標点へと改善され、(b) の DMU はいくつかの項目は変化させずに目標点に近づくように改善される。図 1 で実線矢印に示される提案法では、DMU に特に劣っている項目がある場合はそれに着目し、そのような項目がない場合は全体的に出力値を増加させる方向へと改善される。区間効率値の下限を考慮すると、欠点となる項目を強化するよう改善が行われる。たとえば、C は出力 2 に対し出力 1 が劣っているため出力 1 を増加させ、逆に出力 2 が劣っている H は出力 2 を増加させる。

4. 出力に関する改善の定式化

出力項目のみを考える改善、すなわち出力を増やすという観点からの定式化を行う。区間効率値の上限が 1 となる効率のフロンティア上へ改善するために、生産可能集合の定義(5)式を用いる。また、下限をできるだけ大きくするために 3 章で述べた理想点を考慮する。この章では、まず step 1 で理想点を用いた目標点の求め方を示し、step 2 で改善後の出力値を求める問題の定式化を行う。

多入力多出力に対する理想点は以下のように求められる。 DMU_o についての理想点の第 p 番目の出力値を、(6) 式と同様に (4) 式を考慮して、次のように定義する。

$$\bar{y}_{op} = \max_r \left\{ \left(\max_j \frac{y_{jp}}{x_{jr}} \right) x_{or} \right\} \quad (7)$$

これは DMU_o の入力値に対して、既存の DMU との比較から考えられる理想的な出力値である。この理想点と原点を結ぶ直線と効率のフロンティアが交わる点が目標点であり、そのとき区間効率値の上限が 1 となり、すべての出力項目に関する効率値が等しくなるので下限も最大となる。まず step 1 として、 DMU_o について生産可能集合内における区間効率値の下限が最大となる目標点を求める問題を考える。目標点を (x_o, y_o^{new}) とすると、これは理想点 $(x_o, \bar{y}_o)$ と原点とを結ぶ直線上にあるので、各出力項目を $y_{op}^{new} = \alpha_y \bar{y}_{op}$ とする。

$$\begin{aligned} & \max_{\alpha_y, \lambda} \alpha_y \\ \text{s.t. } & x_{or} \geq \lambda_1 x_{1r} + \dots + \lambda_n x_{nr} \quad (\forall r) \\ & \alpha_y \{ \bar{y}_{op} \} \leq \lambda_1 y_{1p} + \dots + \lambda_n y_{np} \quad (\forall p) \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

(8)式の制約式は $(x_o, \alpha_y \bar{y}_o)$ が生産可能集合 P に属することを要求している。(8)式はLP問題であり、求める変数 α_y は $[0, 1]$ の範囲を動く。生産可能集合内に存在するという制約のもとで α_y を最大化するので、区間効率値の上限が1となる。すなわち効率的フロンティア上へと改善するための α_y^* が求まる。 DMU_o の目標点 (x_o, y_o^{new}) の出力値は、

$$y_o^{new} = \alpha_y^* \bar{y}_o$$

となる。このとき区間効率値の上限が1となり、下限も生産可能集合内では最大となる。(7)式で定義する理想点から(8)式により求まる目標点は、各DMUの入力値によって異なる。目標点は、 DMU_o の入力値を反映して、既存のDMUに基づき極端に劣った項目が存在しないバランスのよい出力値であり、既存のDMUからの生産可能性を満足していると考えられる。ここで、目標点 $DMU_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ での区間効率値の上限は1となる。ただし、 $x_{n+1} = x_o, y_{n+1} = \alpha_y^* \bar{y}_o$ である。このことの証明を付録に示す。

次にstep 2として、まずstep 1で求めた目標点の出力値 y_{op}^{new} と改善対象であるDMUの出力値との比較を行い、DMUを(a)固定する出力項目がないDMUと(b)固定する出力項目があるDMUの2種類に分類する。そして、改善後の出力値 y_o^* を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} & \text{(a) if } y_o \leq y_o^{new} \text{ then } y_o^* = y_o^{new} \\ & \text{(b) else} \\ & y_{op}^* = \begin{cases} y_{op1}; y_{op1} \geq y_{op1}^{new} \\ y_{op2} + \omega_y (y_{op2}^{new} - y_{op2}); y_{op2} < y_{op2}^{new} \end{cases} \end{aligned}$$

ただし、 ω_y は出力の増加量を決める変数である。

すべての出力項目が目標点より小さいDMUは目標点へと改善される。目標点より大きい出力項目があればその出力項目 p_1 を変化させずに、それ以外の出力項目 p_2 のみを目標点に近づくように改善する。最適値 w_y^* は、次のLP問題を解くことにより求まる。

$$\begin{aligned} & \max_{\omega_y, \lambda} \omega_y \\ & \text{s.t. } x_{or} \geq \lambda_1 x_{1r} + \dots + \lambda_n x_{nr} \quad (\forall r) \\ & y_{op} \leq \lambda_1 y_{1p_1} + \dots + \lambda_n y_{np_1} \\ & \quad \quad \quad (p_1 = 1, \dots, l') \quad (9) \\ & y_{op_2} + \omega_y (y_{op_2}^{new} - y_{op_2}) \\ & \quad \leq \lambda_1 y_{1p_2} + \dots + \lambda_n y_{np_2} \quad (p_2 = l'+1, \dots, l) \\ & \lambda \geq 0 \\ & 0 \leq \omega_y \leq 1 \end{aligned}$$

ただし、(b)の上側を満足する項目が l' 個あると仮定している。出力に関する生産可能集合による制約式は固定する項目 p_1 と改善する項目 p_2 に分かれているが、まとめると出力項目の数 l だけである。

固定する出力項目が存在する場合は、 ω_y を最大化してできるだけ目標点 $y_{op_2}^{new}$ に近づける。改善する出力項目において、改善後の出力値は改善前の出力値 y_{op_2} ($\omega_y = 0$) から効率的フロンティア上にある目標点 $y_{op_2}^{new}$ ($\omega_y = 1$) まで動くことを意味している。 x, λ の条件は(5)式に従う。

(9)式の最適解 ω_y^* を用いて DMU_o はその出力値が

$$\begin{aligned} y_{op_1}^* &= y_{op_1} \\ y_{op_2}^* &= y_{op_2} + \omega_y^* (y_{op_2}^{new} - y_{op_2}) \end{aligned}$$

となるように

改善されると、 DMU_o の出力値を減らすことなく下限を最大限に改善する方向、すなわち目標点に近づく方向が示され、そのときの区間効率値の上限は1となる。

本論文では、目標点の条件として区間効率値の上限が1になることとしているが、そのうち弱効率的である場合を除くためには、入力之余剰と出力の不足を考慮すればよい。たとえばstep 1では、(8)式の最適解 α_y^* を用いて、以下のようなスラックを最大化する問題として定式化できる。

表1：入出力データと区間効率値

DMU	入出力値				区間効率値	
	入力1 x_1	入力2 x_2	出力1 y_1	出力2 y_2	(x_1, y_1, y_2)	(x_1, x_2, y_1, y_2)
A	1	3	1	8	[0.143, 1.000]	[0.056, 1.000]
B	1	4	2	3	[0.286, 0.522]	[0.083, 0.522]
C	1	1	2	6	[0.286, 0.824]	[0.286, 1.000]
D	1	5	3	3	[0.375, 0.652]	[0.100, 0.652]
E	1	2	3	7	[0.482, 1.000]	[0.250, 1.000]
F	1	1	4	2	[0.250, 0.696]	[0.250, 0.750]
G	1	3	4	5	[0.571, 0.957]	[0.222, 0.957]
H	1	6	5	2	[0.250, 0.826]	[0.056, 0.826]
I	1	1	6	2	[0.250, 0.957]	[0.250, 1.000]
J	1	5	7	1	[0.125, 1.000]	[0.033, 1.000]

$$\begin{aligned}
& \max_{\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y, \lambda} \quad \mathbf{e}\mathbf{s}_x + \mathbf{e}\mathbf{s}_y \\
& \text{s.t.} \\
& s_{xr} = x_{or} - (\lambda_1 x_{1r} + \dots + \lambda_n x_{nr}) \quad (\forall r) \\
& s_{yp} = \lambda_1 y_{1p} + \dots + \lambda_n y_{np} - \alpha_y^* \bar{y}_{op} \quad (\forall p) \\
& \lambda \geq 0 \\
& \mathbf{s}_x \geq 0 \\
& \mathbf{s}_y \geq 0
\end{aligned} \quad (10)$$

ただし、 $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)$ であり、 $\mathbf{e}\mathbf{s}_x = \sum_{r=1}^k s_{xr}$ 、 $\mathbf{e}\mathbf{s}_y = \sum_{p=1}^l s_{yp}$ である。

ここでは、入力之余剰と出力の不足の和が最大化されている。(10)式の最適解を λ^* 、 $\mathbf{s}_x^*$ 、 $\mathbf{s}_y^*$ とすると、目標点は $\mathbf{y}_o^{new} = \alpha_y^* \bar{\mathbf{y}}_o + \mathbf{s}_y^*$ となる。step 2の(9)式についても同様に、スラックを考慮して定式化を行うことが可能である。

入力を減らすことのみを考慮する入力に関する改善も、出力に関する改善と同様に考えることができる。さらに、出力に関する改善と入力に関する改善を融合すると、入力を減らすことと出力を増やすことを同時に行う改善を考えることが可能である。

5. 数値例

10個のDMUそれぞれについて2種類ずつの入出力値が表1の左側のように与えられている。入力1と出力1, 2から1入力2出力とする場合と入力1, 2と出力1, 2から2入力2出力とする場合について、(2)式と(4)式から定まる区間効率値が、表1の右側に示されている。5.1節と5.2節で、1入力と2入力のそれぞれの場合について出力に関する区間効率値の改善を行う。

5.1 1入力2出力データ

3章の図1での例(表1の入力1と出力1, 2)を用いて、区間効率値の改善を行う。改善対象となるDMUは、有利な立場から評価しても効率的であると判断されない、区間効率値の上限が1ではないB, C, D, F, G, H, Iの7つである。各DMUの改善後の出力値および区間効率値と目標出力値を表2の上段に示している。すべてのDMUの目標点は等しく、(7)式と(8)式より $\mathbf{y}_o^{new} = (4.35, 4.97)^t$ となる。比較のため下段には、図1で点線矢印で表されている従来提案されている効率値(区間効率値の上限)を1にするためのひとつの方法($\mathbf{y}_o^* = \mathbf{y}_o / \theta_o^*$)により改善する場合を示している。図2には、左から各DMUの改善前◇、提案法による改善後△、従来法による改善後□の区間効率値を示している。

B, D, Fの出力値は出力1, 2ともに目標点より小さいので目標点が改善案となる。C, Gの出力2とH, Iの出力1は目標点より大きいので変化させずに、C, Gの出力1とH, Iの出力2を目標点に近づくように増加させる。目標点では、区間効率値の上限は1となり、下限

図2：区間効率値の改善結果（1入力2出力）

表2：1入力2出力データ(入力1, 出力1, 2)の改善案

改善対象	改善前		改善後		区間効率値	目標点	
	出力1	出力2	出力1	出力2		出力1	出力2
B	2	3	4.35	4.97	[0.621, 1.000]	4.35	4.97
			3.83	5.75	[0.548, 1.000]		
C	2	6	3.67	6	[0.524, 1.000]	4.35	4.97
			2.43	7.28	[0.347, 1.000]		
D	3	3	4.35	4.97	[0.621, 1.000]	4.35	4.97
			4.60	4.60	[0.575, 1.000]		
F	4	2	4.35	4.97	[0.621, 1.000]	4.35	4.97
			5.75	2.87	[0.359, 1.000]		
G	4	5	4.33	5	[0.619, 1.000]	4.35	4.97
			4.18	5.22	[0.597, 1.000]		
H	5	2	5	4.00	[0.500, 1.000]	4.35	4.97
			6.05	2.42	[0.303, 1.000]		
I	6	2	6	2.50	[0.315, 1.000]	4.35	4.97
			6.27	2.09	[0.261, 1.000]		

上段：提案法 下段：従来法

表 3 : 2 入力 2 出力データ(入力 1, 2, 出力 1, 2)の改善案

改善対象	改善前		改善後		区間効率値	目標点	
	出力 1	出力 2	出力 1	出力 2		出力 1	出力 2
B	2	3	4.60 3.83	4.60 5.75	[0.192,1.000] [0.160,1.000]	4.60	4.60
D	3	3	4.60 4.60	4.60 4.60	[0.153,1.000] [0.153,1.000]	4.60	4.60
F	4	2	4 5.33	4.00 2.67	[0.500,1.000] [0.333,1.000]	3.73	4.27
G	4	5	4.33 4.18	5 5.23	[0.241,1.000] [0.232,1.000]	4.59	4.59
H	5	2	5 6.05	4.00 2.42	[0.111,1.000] [0.067,1.000]	4.60	4.60

上段：提案法 下段：従来法

図 3 : 区間効率値の改善結果 (2 入力 2 出力)

も既存の DMU から形成される生産可能集合内で最大となる。C, G, H, I の区間効率値の下限は目標点が改善案となっている B, D, F より小さくなっているが、与えられた出力を減らすことなく目標点にもっとも近づくように改善されている。すなわち下限が最大となる出力値を改善案として提示している。

C の出力 1, 2 の両方を増加させる従来法□に対して、提案法△は C の入力値から考えてすでに十分である出力 2 は変化させずに、代わりに出力 1 を重点的に増加させている。改善後の区間効率値は、C の欠点(出力 1)を強化する提案法の方が大きくなる。提案法は区間効率値の特に下限を考慮することで、改善対象に対してバランスのとれた目標を示すことができるという特徴がある。これは、区間効率値があらゆる立場から評価した場合の効率値をすべて含んでいるためである。

5.2 2 入力 2 出力データ

表 1 の入力 1, 2 と出力 1, 2 を用いて、出力に関する区間効率値の改善を行う。改善対象となるのは、区間効率値の上限が 1 ではない B, D, F, G, H の 5 つである。これらの提案法による改善後の出力値および区間効率値と目標出力値を表 3 の上段に、下段には従来法

により改善を行う場合を示し、図 3 に改善前とそれぞれの改善後の区間効率値を示している。

目標点は改善対象となる DMU の入力値を反映するので、DMU ごとにそれぞれ異なる。B, D は目標点があるまま改善案となり、F, H は出力 2 のみ、G は出力 1 のみを増加させ目標点に近づくように改善される。

F の出力 2 を重点的に増加させる提案法による改善後の区間効率値△は、出力 1, 2 ともに増加させる従来法によるもの□よりも大きい。提案法は F の入力値を反映し既存の DMU から考えられるバランスのよい改善目標(目標点)を考えることで、F の特に欠点に着目した改善を行っている。区間効率値を考慮して改善することは、有利な立場から高く評価されるだけでなく、不利な立場を含むさまざまな立場から高く評価される改善目標を設定することができる点で有意義である。D の従来法と提案法の結果は等しいが、これは D の目標点が改善前の出力 1, 2 をともに等倍(効率値の逆数: 1.53)したものであり、出力値には偏りがなかったためである。目標点を設定することで、DMU に特に劣っている出力項目がある場合はその欠点を重点的に増加させる改善ができ、またそのような項目がない場合はすべての出力項目を増加させることになる。

6. おわりに

本研究では、すべての DMU からなる生産可能集合内で、与えられた出力値を減らさずに、区間効率値を改善するような出力値を求める方法を提案した。DMU の効率性を区間効率値を用いて測り、その上限が 1 未満の DMU、すなわち有利な立場から評価しても効率的であると判断されない DMU について、生産可能集合内でもっともバランスがよく、極端に劣った項目がない改善目標を示した。具体的には、区間効率値の下限が 1 となる理想点を定義し、これから区間効率値の上

限が1で下限が生産可能集合内で最大化される目標点を求め、目標点またはこれに近づく改善案を求めた。出力に関する改善での目標点は、改善対象となるDMUの入力値を反映して、既存のDMUから生産可能であると考えられるもっとも優れた出力値として求められる。区間効率値の特に下限を考慮した改善の特徴として、各DMUの欠点を強化することに重点をおいた改善がなされ、結果としてバランスのよい出力値(目標点)へ近づくように改善されることが挙げられる。これは、有利な立場からの評価である区間効率値の上限に対して、下限が不利な立場からの評価となっており、DMUが相対的に劣っている項目に着目した効率値を表しているためである。本研究は、区間効率値を改善する出力値を求めているが、これは従来の効率値から改善する必要があると判断されるDMUについて、区間効率値の下限も考慮して改善すべきであるという考えに基づいている。このことから、従来の効率値を1にする出力値を求めるという改善のひとつの方法であるとみなすこともできる。出力項目のみを考える出力に関する改善を定式化しているが、入力に関する改善も同様に考えることができ、さらに入力を減らすことと出力を増やすことを同時に考える改善へと拡張できる。

参考文献

- [1] A. Charnes, W.W. Cooper, E. Rhodes, Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*, 2, 429-444, 1978.
- [2] A. Charnes, W. W. Cooper, E. Rhodes, Evaluating program and managerial efficiency: An application of data envelopment analysis to program follow through, *Management Science*, 27(6), 668-734, 1981.
- [3] T. Entani, Y. Maeda, H. Tanaka, Dual models of interval DEA and its extension to interval data, *European Journal of Operational Research*, 136(1), 32-45, 2002.
- [4] B. Golany, E. Tamir, Evaluating efficiency - effectiveness - equality trade-offs: A data envelopment analysis approach, *Management Science*, 41(7), 1172-1184, 1995.
- [5] 伊藤竜一, 生田目崇, 山口俊和, DEAモデルに基づく経営資源再分配問題, *日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌*, 42(2), 149-166, 1999.
- [6] E. Takeda, An extended DEA model: Appending an additional input to make all DMUs at least weakly efficient, *European Journal of Operational Research*, 125(1), 25-33, 2000.
- [7] 刀根薫, 経営効率性の測定と改善, 日科技連, 1993.
- [8] 山田善晴, 松井和己, 杉山学, DEAモデルに基づく新たな経営効率性分析の提案, *日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌*, 37(2), 158-167, 1994.

付録

(8)式により決まる目標点 DMU_{n+1} での区間効率値の上限が1となることを証明する。このため、(8)式の双対問題を考えると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} \min \quad & v^t, \mu \\ \text{s.t.} \quad & \mu^t \bar{y}_o = 1 \\ & -v^t x_j + \mu^t y_j \leq 0 \quad (\forall j) \\ & \mu \geq 0 \\ & v \geq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

(11)式の最適解を v^*, μ^* とし、(8)式の α_y の最適値を α_y^* とすると、次の関係が成り立つ。

$$\alpha_y^* = v^{*t} x_o \quad (12)$$

$$\mu^{*t} \bar{y}_o = 1 \quad (13)$$

$$-v^{*t} x_j + \mu^{*t} y_j \leq 0 \quad (\forall j) \quad (14)$$

目標点 DMU_{n+1} ($x_{n+1} = x_o, y_{n+1} = \alpha_y^* \bar{y}_o$) の区間効率値の上限 θ_{n+1}^{E*} は、以下のLP問題より求められる。

$$\begin{aligned} \theta_{n+1}^{E*} = \max_{u, v} \quad & u^t y_{n+1} \\ \text{s.t.} \quad & v^t x_{n+1} = 1 \\ & -v^t x_j + u^t y_j \leq 0 \quad (j=1, \dots, n, n+1) \end{aligned} \quad (15)$$

$$u \geq 0$$

$$v \geq 0$$

ここで、 $-v^t x_{n+1} + u^t y_{n+1} \leq 0$ より、 $\theta_{n+1}^{E*} \leq 1$ は明らかである。

また、 $v' = v^* / \alpha_y^*, u' = \mu^* / \alpha_y^*$ とすると、

$$v'^t x_{n+1} = \frac{1}{\alpha_y^*} v^{*t} x_o = 1 \quad [(12)\text{式より}]$$

$$-v'^t x_j + u'^t y_j$$

$$= -\frac{1}{\alpha_y^*} v^{*t} x_j + \frac{1}{\alpha_y^*} \mu^{*t} y_j \leq 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad [(14)\text{式より}]$$

$$-v'^t x_{n+1} + u'^t y_{n+1}$$

$$= -\frac{1}{\alpha_y^*} v^{*t} x_o + \frac{1}{\alpha_y^*} \mu^{*t} \alpha_y^* \bar{y}_o = 0 \quad [(12)\text{式}, (13)\text{式より}]$$

が成り立つので、 u', v' は(15)式の可能解である。よって、(13)式より、

$$\theta_{n+1}^{E*} \geq u' y_{n+1} = \frac{1}{\alpha_y^*} \mu^{*t} \alpha_y^* \bar{y}_o = 1$$

となる. すなわち, $\theta_{n+1}^{E*} \leq 1$ であり, $\theta_{n+1}^{E*} \geq 1$ であるから, $\theta_{n+1}^{E*} = 1$ となる. (Q.E.D.)

(2003年9月5日 受付)

(2004年1月26日 採録)

[問い合わせ先]

〒780-0915 高知市曙町2-5-1

高知大学 人文学部 社会経済学科

円谷 友英

TEL: 088-844-8212

FAX: 088-844-8225

E-mail: entani@cc.kochi-u.ac.jp

著者紹介

えんたに ともえ
円谷 友英 [正会員]

2002年大阪府立大学大学院工学研究科博士後期課程電気・情報系専攻修了. 同年高知大学人文学部社会経済学科講師, 現在に至る. 博士(工学). 包絡分析法, 階層分析法, ラフ集合の研究に従事. 日本知能情報ファジィ学会, 日本経営工学会, 日本オペレーションズ・リサーチ学会の会員.

いちはし ひでとも
市橋 秀友 [正会員]

1971年大阪府立大学工学部経営工学科卒業. 同年松下電器産業(株)入社, 1981年大阪府立大学工学部経営工学科助手, 1987年同講師, 1989年同助教授, 1993年同教授, 現在に至る. 工学博士. ファジィ理論やニューラルネットワークなどでのデータ解析法の知的システムや認知工学分野への応用研究に従事. IEEE, 日本知能情報ファジィ学会, システム制御情報学会, 電子情報通信学会, 日本経営工学会などの会員.

たなか ひでお
田中 英夫 [正会員]

1962年神戸大学工学部計測工学科卒業. 同年ダイキン工業株式会社総合研究所入社. 1969年大阪市立大学大学院工学研究科(電気工学専攻)博士課程修了. 同年大阪府立大学工学部経営工学科勤務. 1972-1973年カリフォルニア大学電気・計算機学科研究員, 1975-1977年アーヘン工科大学 OR 学科フンボルト財団招へい研究員, 1981-1982年カンザス州立大学化学工学科研究員, 2000年大阪府立大学名誉教授, 同年豊橋創造大学経営情報学部教授, 2002年広島国際大学人間環境学部教授, 現在に至る. 工学博士. ファジィシステム理論とその応用の研究に従事. FSS の Area Editor, 数社の国際学術誌の編集委員, IE レビュー貢献賞, 日本ファジィ学会著述賞・業績賞受賞, 国際ファジィシステム学会 Fellow.

An approach to improvement by adjusting outputs considering interval efficiency values

by

Tomoe Entani, Hidetomo Ichihashi, Hideo Tanaka

Abstract :

We improve the efficiency of a DMU considering its interval efficiency value based on DEA by adjusting its outputs. The DEA model to obtain an interval efficiency value which consists of evaluations from both the optimistic and pessimistic viewpoints has been formulated. DMUs which are not rated as efficient in the conventional sense are improved by adjusting outputs so that their lower bounds become as large as possible in the production possibility set and their upper bounds attain the maximum value one. The lower bound of interval efficiency value becomes small when the DMU's inputs and outputs are not balanced. Therefore considering the lower bounds in improvement, the adjusted outputs can keep the balance each other. A new approach to improvement by adjusting only outputs without decreasing the given outputs anymore is proposed in this paper. By extending the proposed approach, it is suggested that the approaches to improvement by adjusting only inputs and both inputs and outputs simultaneously can be obtained. Numerical examples are shown to illustrate our proposed approaches.

Keywords : DEA, Interval efficiency value, Improvement

Contact Address : **Tomoe Entani**

Kochi University

2-5-1 Akebono, Kochi, 780-8520 Japan

TEL : +81-88-844-8212

FAX : +81-88-844-8225

E-mail : entani@cc.kochi-u.ac.jp