原著論文

相対エントロピーを用いたファジィ測度の推定†

本田 あおい*・岡崎 悦明*

有限集合上のファジィ測度に対して、一部の事象系の既知の測度値から残りの事象の測度値を、相対エントロピーを用いて推定する方法を提案する。真のファジィ測度の推定されたファジィ測度に対する相対エントロピーの値が小さいほどよい推定とする。また λ -ファジィ測度と χ -ファジィ測度を、より自由度の高いクラスである (λ, p) -ファジィ測度と拡張 χ -ファジィ測度に拡張し、これらのクラスに対する提案手法の適用例も示す。

キーワード：ファジィ測度の同定、相対エントロピー、 λ -ファジィ測度、 χ -ファジィ測度、 (λ, p) -ファジィ測度、拡張 χ -ファジィ測度

1. はじめに

ファジィ測度とは有界単調集合関数である。加法性を仮定しないので、通常の測度では表現できないような項目間の相互作用を表現することができ、主観的評価問題の分析や意思決定支援、パターン認識等さまざまな分野への応用が考えられている[1][8][9]。

測度が定義される全空間 X が有限集合である場合、加法性を持つ測度であれば X の全ての要素の一点集合の値が決まれば全体の測度が決まるが、ファジィ測度の場合は加法性を持たないため一点集合の値だけでは全体を決定することができない。全事象、即ち X の部分集合全てについての測度の値が必要である。しかしながら、実際の応用の場で全事象のファジィ測度値が既知測度値として予め与えられていることはまずない。そのため一部の既知測度値をもとに未知事象の測度値を推定する必要が生じる。この問題については、これまで λ -ファジィ測度、 χ -ファジィ測度、確率から導かれるファジィ測度などのクラスを利用した推定法が提案されてきた[1][2][3][6]。これらの手法は、1.一部の既知測度値をもとに、 λ -ファジィ測度、 χ -ファジィ測度、確率から導かれるファジィ測度などのクラスに限定して全体の同定を行う、2.未知事象の推定測度値には同定されたファジィ測度の値を用いる、3.同定されたファジィ測度と真のファジィ測度の近さは二乗誤差を用いて判定する、というものである。

同定に用いるファジィ測度のクラスは何らかの扱いやすい性質を持つものである。確率から導かれるファジィ測度のクラスは他のクラスに比べ、多くのファジィ測度を表現することができる。その反面、自由度が高いため、同定には複雑な手順を必要とする。 λ -ファジィ測度や χ -ファジィ測度のクラスは表現できるファジィ測度は限られているが、一点集合の測度値とパラメータの値でファジィ測度全体が決まるため、ファジィ測度の同定にはこれらの値を決定しさえすればよい。このときのパラメータの推定値は、従来法では既知測度値との二乗誤差が最小になるもの、すなわち最小二乗法による解である。

本論文ではパラメータで表現されるクラスを用いたファジィ測度の新しい同定法を提案する。二つのファジィ測度の近さをあらわす尺度として本田とGrabischにより提案された相対エントロピーを使うこととする[4]。そのためパラメータの推定は従来の最小二乗法ではなく相対エントロピーを最小にするものをパラメータの推定値とする。同時に従来の λ -ファジィ測度と χ -ファジィ測度のクラスをより自由度の高いクラスへ拡張し、提案手法によるこれらのクラスを用いた同定例を示し、従来のクラスとの比較を行う。

2. 準備

本論文を通して、 $X=\{x_1, \dots, x_n\}$ を有限集合、 n を X の要素の個数、 2^X を X のべき集合とする。また、コンマや集合を表す中括弧 $\{\cdot\}$ を誤解を与えない範囲で省略し、例えば2点集合 $\{x_1, x_2\}$ を x_1x_2 と書く。

定義1（ファジィ測度[8]） 集合関数 $v: 2^X \rightarrow [0, 1]$ が次の条件を満たすとき、 v をファジィ測度という。

† Estimation of Fuzzy Measures with Relative Entropy
Aoi HONDA and Yoshiaki OKAZAKI

* 九州工業大学情報工学部システム創成情報工学科
Department of Systems Innovation and Informatics, Faculty of
Computer Science and Systems Engineering, Kyushu Institute
of Technology

$$1. v(\emptyset) = 0, v(X) = 1,$$

$$2. \text{ 任意の } A, B \in 2^X \text{ に対して, } A \subset B \text{ ならば } v(A) \leq v(B).$$

1 を有界性条件, 2 を単調性条件という. 加法性は仮定しないので $v(A \cup B) > v(A) + v(B)$ (優加法的) や $v(A \cup B) < v(A) + v(B)$ (劣加法的) が起こりうる.

次に可能性測度, λ -ファジィ測度, χ -ファジィ測度の定義を示す.

定義 2 (可能性測度 [10]) ファジィ測度 v が次の性質を持つとき, v を可能性測度という.

$$\sup\{\pi(x) | x \in X\} = 1$$

を満たす関数 $\pi: X \rightarrow [0, 1]$ が存在して, 任意の $A \in 2^X$ に対して

$$v(A) = \sup\{\pi(x) | x \in A\},$$

ただし $v(\emptyset) = 0$.

定義 3 (λ -ファジィ測度 [8]) ファジィ測度 v が次の性質を持つとき, v を λ -ファジィ測度という.

任意の $A, B \in 2^X$, $A \cap B = \emptyset$ に対して

$$v(A \cup B) = v(A) + v(B) + \lambda v(A)v(B),$$

$$-1 < \lambda < \infty.$$

定義 4 (χ -ファジィ測度 [2] [3]) ファジィ測度 v が次の性質を持つとき, v を χ -ファジィ測度という.

ある χ が存在して, 任意の $A \in 2^X$ に対して

$$v(A) = \chi^{|A|-1} \left(\sum_{x_i \in A} v(\{x_i\}) \right),$$

ただし

$$\chi \geq 1 - \frac{\min_{x_i \in X} v(\{x_i\})}{\sum_{x_i \in X} v(\{x_i\})},$$

$|A|$ は A の要素の個数.

ここで, 集合系の概念を導入し, ファジィ測度の定義を拡張する.

定義 5 (集合系 [5]) 2^X の部分集合 $\mathcal{A}$ について $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ のとき $(X, \mathcal{A})$ を集合系とよぶ. X が明らかな場合は単に $\mathcal{A}$ と書く.

定義 6 $(X, \mathcal{A})$ を集合系とする. 集合関数 $v: \mathcal{A} \rightarrow$

$[0, 1]$ が次の条件を満たすとき, v をファジィ測度という.

$$1. v(\emptyset) = 0, v(X) = 1,$$

$$2. \text{ 任意の } A, B \in \mathcal{A} \text{ に対して, } A \subset B \text{ ならば } v(A) \leq v(B).$$

以後, ファジィ測度の定義域は $(X, 2^X)$ や $(X, \mathcal{A})$ のように集合系で表現する. 次は相対エントロピーの定義である.

定義 7 (相対エントロピー [4]) v, u を $(X, 2^X)$ 上のファジィ測度とする. このとき v の u に対する相対エントロピーは次のように定義される.

$$H(v; u) := \sum_{i=1}^n \sum_{A \subseteq X \setminus \{x_i\}} \gamma_{|A|}^n h[v(A, x_i); u(A, x_i)],$$

ただし $v(A, x_i) := v(A \cup \{x_i\}) - v(A)$, $u(A, x_i) := u(A \cup \{x_i\}) - u(A)$, $h(x; y) := x \log \frac{x}{y}$, $\gamma_k^n := (n-k-1)!k!/n!$

相対エントロピーは, 反射律を満たさないため距離にはならないが, 次の重要な性質を満たしている.

命題 8 ([4]) $(X, 2^X)$ 上の任意のファジィ測度 v, u に対して $H(v; u) \geq 0$ が成り立つ. また, $H(v; u) = 0$ のとき, かつそのときに限り $v = u$ である.

命題 9 ([4]) $(X, 2^X)$ 上の任意のファジィ測度 v, u ($v \neq u$) に対して $v_\alpha^\alpha := \alpha u + (1-\alpha)v$ とする. このとき $H(v_\alpha^\alpha; u)$ は $0 < \alpha < 1$ に対して狭義の減少関数である.

つまり $(X, 2^X)$ 上のファジィ測度 v, u に対して $H(v; u)$ は常に非負の値を取り, v が u に近づけば近づくほど, $H(v; u)$ の値は真に減少し v と u が一致するとき, かつそのときに限り, $H(v; u) = 0$ となる. これらの性質から, 相対エントロピーはファジィ測度間の近さを測るのに適した性質を持っていると言える.

次に, 同定の際に必要な極大鎖の概念を導入する. $A, B \in \mathcal{A}$ に対して, $A \subsetneq B$, かつ任意の $C \in \mathcal{A}$ について $A \subseteq C \subseteq B$ ならば $C = A$ が成り立つとき A は B に被覆されている (または B は A を被覆している) といい, $A \rightarrow B$ (または $B \rightarrow A$) と書く.

定義10(極大鎖) $(X, \mathcal{A})$ を集合系とする. $C = (c_0, c_1, \dots, c_m)$ が $\emptyset = c_0 \prec c_1 \prec \dots \prec c_m = X$, $c_i \in \mathcal{A}$, $c_i \in \mathcal{A}$, $i = 0, \dots, m$ を満たすとき C を $\mathcal{A}$ の極大鎖とよぶ.

$\mathcal{A}$ の極大鎖全体を $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ と書く.

例11 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ とする. $\mathcal{A} := \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, X\}$ とすると $\mathcal{A}$ の極大鎖は

$$(\emptyset, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}, X), (\emptyset, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}, X), \\ (\emptyset, \{x_3\}, X)$$

の3つ. また, 一般に 2^X には $n!$ 個の極大鎖が存在する. すなわち $|\mathcal{M}(2^X)| = n!$ である. 例えば $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ のとき 2^X の極大鎖は

$$(\emptyset, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}, X), (\emptyset, \{x_1\}, \{x_1, x_3\}, X), \\ (\emptyset, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}, X), (\emptyset, \{x_2\}, \{x_2, x_3\}, X), \\ (\emptyset, \{x_3\}, \{x_1, x_3\}, X), (\emptyset, \{x_3\}, \{x_2, x_3\}, X)$$

の6つ.

v を $(X, \mathcal{A})$ 上のファジィ測度とする. このとき $C := (c_0, c_1, \dots, c_m) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ に対して $p^{v,C}$ を次のように定義する.

$$p^{v,C} := (p_1^{v,C}, p_2^{v,C}, \dots, p_m^{v,C}) \\ = (v(c_1) - v(c_0), v(c_2) - v(c_1), \\ \dots, v(c_m) - v(c_{m-1})).$$

$p^{v,C}$ について, $p_i^{v,C} \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ と

$$\sum_{i=1}^m p_i^{v,C} = 1$$

が成り立つ.

$p^{v,C}$ を用いて, ファジィ測度の相対エントロピーは次のように別表現を与えることができる.

命題12 v, u を $(X, 2^X)$ 上のファジィ測度, $H(v; u)$ を v の u に対する相対エントロピーとする. このとき次が成り立つ.

$$H(v; u) = \frac{1}{|\mathcal{M}(2^X)|} \sum_{C \in \mathcal{M}(2^X)} H_S(p^{v,C}; p^{u,C}),$$

ただし $H_S(p; q)$ はShannonの相対エントロピー, すなわち X 上の確率測度 $p = (p_1, \dots, p_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n)$ に対して

$$H_S(p; q) := \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{p_i}{q_i},$$

である.

3. λ -ファジィ測度と λ -ファジィ測度の拡張

λ -ファジィ測度や λ -ファジィ測度の一つのパラメータで表現することができるため扱いやすい反面, 表現できるファジィ測度には限界がある. 例えば, 優加法性と劣加法性の両方を併せ持つようなファジィ測度を表現することができない. しかしながら, 人間の主観が一つの物事を評価するのに優加法的と劣加法的の両方を併せ持つ事は十分に考えられることである. 例えば, 何かを評価する際に中位程度に関しては差をつけにくく, 上位や下位については差をつけやすい場合がある. このような例は逆S字理論と呼ばれ, 実際の値と主観的評価の関係を示すグラフは逆S字型をしている(図1). 関数が凸関数になっている部分は優加法的, 凹関数になっている部分は劣加法的であることを意味する. 逆に, 塩辛さの評価等は中位程度に関しては敏感に反応するのに対し, 極端に塩辛い, または極端に味が薄い場合にはほとんど差をつけられないというような例もある. この場合, 主観的評価と実際の値の関係を表すグラフはS字型となる.

図1 逆S字関数のグラフ

ここでは, λ -ファジィ測度を λ -ファジィ測度の拡張を提案する.

定義13((λ, p) -ファジィ測度) ファジィ測度 v が次の性質を持つとき, v を (λ, p) -ファジィ測度という.

任意の $A, B \in 2^X$, $A \cap B = \emptyset$ に対して

$$v(A \cup B) = \sqrt[p]{v(A)^p + v(B)^p} + \lambda v(A)^p v(B)^p,$$

$0 < p \leq \infty$, $-1 < \lambda < \infty$.

(λ, p) -ファジィ測度は $p=1$ のとき λ -ファジィ測度であり, $p=\infty$ のとき可能性測度である.

定義14(拡張 χ -ファジィ測度) ファジィ測度 v が次の性質を持つとき, v を拡張 χ -ファジィ測度という.

関数 $\chi(k)$, $k=1, \dots, |X|$ が存在して, 任意の $A \in 2^X$ に対して

$$v(A) = \chi(|A|) \left(\sum_{x_i \in A} v(\{x_i\}) \right),$$

ただし $\chi(1) = 1$, $k=2, \dots, |X|$ に対して

$$\chi(k) \geq \chi(k-1) \cdot \max_{\substack{A \subseteq X \\ |A|=k}} \left(1 - \frac{\min_{x_j \in A} v(\{x_j\})}{\sum_{x_i \in X} v(\{x_i\})} \right),$$

$|A|$ は A の要素の個数である.

(λ, p) -ファジィ測度は優加法性と劣加法性の両方を同時に表すことができる (例15参照).

例15 (λ, p) -ファジィ測度は $p=2$ とすると, $\lambda v(A)v(B) \geq 2$ のとき $v(A \cup B) \geq v(A) + v(B)$, $\lambda v(A)v(B) \leq 2$ のとき $v(A \cup B) \leq v(A) + v(B)$ となる.

また, (λ, p) -ファジィ測度は次の性質を持つ.

命題16 (λ, p) -ファジィ測度は確率から導かれる. すなわち $(X, 2^X)$ の (λ, p) -ファジィ測度 v に対して $(X, 2^X)$ 上の確率測度 P と非減少関数 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ が存在し

$$v(A) = f \circ P(A)$$

とあらわせる.

証明 $v_{(\lambda, p)}$ に対して $P(A) := \log_{(1+\lambda)}(1 + \lambda v(A)^p)$,

$$f(x) := \sqrt[p]{\frac{(1+\lambda)x-1}{\lambda}}$$

とおくと, 任意の $A \in 2^X$ に対して $v(A) = f \circ P(A)$ が成り立ち, f は $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ の非減少関数である. また, $P(\emptyset) = 0$, $P(X) = 1$, $A, B \in 2^X$, $A \cap B = \emptyset$ に対して

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \log_{(1+\lambda)}(1 + \lambda v(A \cup B)^p) \\ &= \log_{(1+\lambda)}(1 + \lambda v(A)^p + \lambda v(B)^p + \lambda^2 v(A)^p v(B)^p) \\ &= \log_{(1+\lambda)}(1 + \lambda v(A)^p) + \log_{(1+\lambda)}(1 + \lambda v(B)^p) \\ &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \log_{(1+\lambda)}(1 + \lambda v(A)^p + \lambda v(B)^p + \lambda^2 v(A)^p v(B)^p) \\ &= \log_{(1+\lambda)}(1 + \lambda v(A)^p) + \log_{(1+\lambda)}(1 + \lambda v(B)^p) \\ &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$

が成り立つので P は確率である.

図2に $\lambda=3$, $p=1000$ のときの $f(x)$ のグラフを示す. 逆S字型をしていることがわかる.

図2 $f(x)$ のグラフ. $\lambda=3$, $p=1000$

要素の数が少ないときは優加法的で要素の数が多くなると劣加法的となる事柄や, あるいはその逆になるような事柄も当然起こりうるであろう. 拡張 χ -ファジィ測度はパラメータ $\chi(1), \dots, \chi(|X|)$ の値によって, 優加法性, 劣加法性の両方の性質を併せ持つことができる. $\chi(k) > 1$ のとき優加法的, $\chi(k) < 1$ のとき劣加法的となる. ただし, 要素の個数が同じものに対しては優加法的か劣加法的のどちらか一方しか選べない.

4. 提案手法

$\mathcal{A}$ を集合系とする. ファジィ測度の同定は $(X, \mathcal{A})$ 上のファジィ測度を $(X, 2^X)$ 上のファジィ測度に拡張することである.

v, u を $(X, \mathcal{A})$ 上のファジィ測度とする. v, u に対して $H^A(v; u)$ を次のように定義する.

$$H^A(v; u) := \frac{1}{|\mathcal{M}(A)|} \sum_{C \in \mathcal{M}(A)} H_S(p^{v,C}; p^{u,C}),$$

H^A についても命題8, 9の性質は同様に成り立つ (命題17, 18).

命題17 $(X, \mathcal{A})$ を集合系とする. $(X, \mathcal{A})$ 上の任意のファジィ測度 v, u に対して $H^A(v; u) \geq 0$ が成り立つ. また, $H^A(v; u) = 0$ のとき, かつそのときに限り $v=u$ である.

命題18 $(X, \mathcal{A})$ を集合系とする. $v, u (v \neq u)$ を $(X, \mathcal{A})$ 上のファジィ測度とし, $v_\alpha^\alpha := \alpha u + (1 - \alpha)v$ とする. このとき $H(v_\alpha^\alpha; u)$ は $0 < \alpha < 1$ に対して狭義の減少関数である.

証明の手順は命題8, 9とほぼ同様であるので省略する([4] Proposition 26, 27参照). 命題17, 18から $H(v; u)$ を最小にする u を $(X, 2^X)$ 上に拡張したものは v の同定測度として妥当な性質をもっていることがわかる.

同定を行う場合, 一点集合の測度を求めるため, 全ての X の要素についてなんらかの情報が必要である. つまり $\mathcal{A}$ は

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X \quad (1)$$

を満たす必要がある. 同定に用いるファジィ測度のクラスによって, さらに条件が付加される(例19参照).

例19 λ -ファジィ測度, (λ, p) -ファジィ測度, χ -ファジィ測度のクラスで同定を行う場合は(1)かつ, ある $|A| \geq 2$ を満たす $A \in \mathcal{A}$ が存在する必要がある. 拡張 χ -ファジィ測度のクラスで同定を行う場合は, (1)かつ, $|A_i| = i$ を満たす $A_i \in \mathcal{A}, i = 2, \dots, n-1$ が存在する必要がある.

以上を踏まえて, 同定及び推定の手順をまとめる.

1. v を $\mathcal{A}$ 上のファジィ測度とする. ただし $\mathcal{A}$ は同定に必要な条件を満たす集合系である. 一点集合の値とパラメータ族 θ で全体が決定されるファジィ測度のクラスを選び u とする.
2. $H^A(v; u)$ の値を最小にするパラメータ $\hat{\theta}$ と $\hat{u}(\{x_i\}), i = 1, \dots, n$ を求める. この $\hat{\theta}$ と $v(\{x_i\}), i = 1, \dots, n$ で定まる $\hat{u}$ を v の同定測度とする.
3. 未知データの推定値は同定されたファジィ測度 $\hat{u}$ の値を, それ以外は v の値を用いる. すなわち

$$\hat{v}(A) := \begin{cases} \hat{u}(A), & A \in \mathcal{A}, \\ v(A), & A \notin \mathcal{A} \end{cases}$$

である.

注意20 命題17, 18はファジィ測度 v, u に対して

成り立つ. つまり v, u は有界性条件及び単調性条件を満たしていなければならない. そのため, $u(X) := 1$ とする必要がある(例21参照).

例21 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ 上のファジィ測度について $\mathcal{A} := \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, X\}$ のみの値がわかっているとすると. このとき λ -ファジィ測度のクラスでの同定を行うとする. 極大鎖は

$$\begin{aligned} &(\emptyset, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}, X), \\ &(\emptyset, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}, X), \\ &(\emptyset, \{x_3\}, X) \end{aligned}$$

の3つである. よって v の同定として

$$\begin{aligned} H^A(v; u_\lambda) &= \frac{1}{3}h(v(x_1); u_\lambda(x_1)) + \frac{1}{3}h(v(x_2); u_\lambda(x_2)) \\ &\quad + \frac{1}{3}h(v(x_3); u_\lambda(x_3)) \\ &\quad + \frac{1}{3}h[v(x_1x_2) - v(x_1); u_\lambda(x_1x_2) - u_\lambda(x_1)] \\ &\quad + \frac{1}{3}h[v(x_1x_2) - v(x_2); u_\lambda(x_1x_2) - u_\lambda(x_2)] \\ &\quad + \frac{2}{3}h[1 - v(x_1x_2); 1 - u_\lambda(x_1x_2)] \\ &\quad + \frac{1}{3}h[1 - v(x_3); 1 - u_\lambda(x_3)], \end{aligned} \quad (2)$$

ただし $u_\lambda(x_1x_2) = u_\lambda(x_1) + u_\lambda(x_2) + \lambda u_\lambda(x_1)u_\lambda(x_2)$, を最小にする $\lambda = \hat{\lambda}$ と $\hat{u}_\lambda(\{x_i\}), i = 1, \dots, n$ を求める.

例えば, $v(x_1) = 0.1, v(x_2) = 0.2, v(x_3) = 0.3, v(x_1x_2) = 0.35$ のとき $\hat{\lambda}$ を最急降下法で求めると, $\hat{\lambda} = 2.381, \hat{u}_\lambda(\{x_1\}) = 0.100, \hat{u}_\lambda(\{x_2\}) = 0.201, \hat{u}_\lambda(\{x_3\}) = 0.300, H^A(v; u) = 3.419 \times 10^{-6}$ である. 同様に同じデータを用いて χ -ファジィ測度のクラスで同定すると, $\hat{\chi} = 1.241, \hat{u}(\{x_1\}) = 0.100, \hat{u}(\{x_2\}) = 0.100, \hat{u}(\{x_3\}) = 0.150, H^A(v; \hat{u}) = 3.444 \times 10^{-6}$ となる.

ここで式(2)の最後の2項において $u(X)$ に相当する部分を1としなければならないことに注意する. 例えば λ -ファジィ測度のクラスで同定を行う場合にこの項を

$$\begin{aligned} u_\lambda(X) &= u_\lambda(x_1) + u_\lambda(x_2) + u_\lambda(x_3) \\ &\quad + \lambda(u_\lambda(x_1)u_\lambda(x_2) + u_\lambda(x_1)u_\lambda(x_3) + u_\lambda(x_2)u_\lambda(x_3)) \\ &\quad + \lambda^2 u_\lambda(x_1)u_\lambda(x_2)u_\lambda(x_3) \end{aligned}$$

に置き換えることはできない. なぜなら $u(X) \neq 1$ のとき, 命題17, 18が成立しなくなるためである.

5. 推定例

被験者Aにノートパソコンを購入するときの評価項目 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{\text{ディスプレイのサイズ, 性能, 軽さ, 安定性}\}$ の重視度と複合項目の重視度を答えてもらったところ、表1に示す回答を得た[6]。例えば x_1, x_2 が0.25というのは $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 全体の重視度を1とすると、ディスプレイのサイズと性能を0.25重視するという意味である。

被験者Aの回答、すなわち評価尺度を v とおき、 v が各ファジィ測度のクラスとどのくらい近いかを調べたものが表2である。 $H(v; u_\theta)$ を最小にする θ と $u(\{x_i\})$, $i = 1, \dots, 4$ と、そのときの $H(v; u_\theta)$ を示す。

次に被験者Aの回答のうち $x_1, x_2, x_3, x_4, x_1x_2, x_1x_4, x_2x_4, x_1x_2x_3, x_1x_3x_4, X$ のみが既知であると仮定し、これらの既知データを元に残りを推定すること

表1 被験者Aの回答

x_1	x_2	x_3	x_4
0.10	0.10	0.15	0.20
x_1, x_2	x_1, x_3	x_1, x_4	x_2, x_3
0.25	0.30	0.45	0.35
x_2, x_4	x_3, x_4	x_1, x_2, x_3	x_1, x_2, x_4
0.50	0.85	0.60	0.80
x_1, x_3, x_4	x_2, x_3, x_4	X	
0.90	0.95	1.00	

表2 各クラスにおける $H(v; u)$ の値

u のクラス	$H(v; u)$	θ の値	$u(x_1)$	$u(x_2)$	$u(x_3)$	$u(x_4)$
λ -ファジィ測度	0.0678	$\lambda = 0.54$	0.116	0.146	0.242	0.353
χ -ファジィ測度	0.0503	$\chi = 1.27$	0.082	0.108	0.183	0.294
(λ, p) -ファジィ測度	0.0396	$\lambda = -0.006, p = 0.63$	0.073	0.096	0.160	0.257
拡張 χ -ファジィ測度	0.0372	$\chi(2) = 1.59, \chi(3) = 1.85$	0.070	0.096	0.160	0.257

表3 $H^A(v; u)$ の値と $\theta, u(x_i)$ の推定値

u のクラス	$H^A(v; u)$	θ の推定値	$\hat{u}(x_1)$	$\hat{u}(x_2)$	$\hat{u}(x_3)$	$\hat{u}(x_4)$
λ -ファジィ測度	0.0148	$\lambda = 0.94$	0.128	0.149	0.143	0.280
χ -ファジィ測度	0.0039	$\chi = 1.40$	0.087	0.098	0.132	0.243
(λ, p) -ファジィ測度	0.0035	$\lambda = 0.09, p = 0.63$	0.081	0.090	0.143	0.235
拡張 χ -ファジィ測度	0.0030	$\chi(2) = 1.51, \chi(3) = 1.98$	0.081	0.088	0.143	0.230

表4 推定結果

u のクラス	$\hat{v}(x_1 x_3)$	$\hat{v}(x_2 x_3)$	$\hat{v}(x_3 x_4)$	$\hat{v}(x_1 x_2 x_4)$	$\hat{v}(x_2 x_3 x_4)$
λ -ファジィ測度	0.273	0.294	0.427	0.569	0.584
χ -ファジィ測度	0.314	0.326	0.529	0.796	0.917
(λ, p) -ファジィ測度	0.337	0.353	0.575	0.772	0.916
拡張 χ -ファジィ測度	0.338	0.349	0.567	0.790	0.913

を考える。 $\mathcal{A} := \{\emptyset, x_1, x_2, x_3, x_4, x_1x_2, x_1x_4, x_2x_4, x_1x_2x_3, x_1x_3x_4, X\}$, $|\mathcal{M}(\mathcal{A})| = 8$ である。3章で示した提案手法によりファジィ測度を同定した結果を表3に、同定したファジィ測度から得た未知データの推定値 $\hat{v}$ を表4に示す。推定した値を用いて $H(v; \hat{v})$ を計算した結果が表5である。

(λ, p) -ファジィ測度、拡張 λ -ファジィ測度は自由度が高いため、当てはまりのよい、つまり $H(v; u_\theta)$ や $H^A(v; u_\theta)$ の小さいパラメータを選ぶことができる(表2, 表3)。推定値についても (λ, p) -ファジィ測度、拡張 λ -ファジィ測度ともにより推定値を得ている(表5)。

提案手法の問題点は次のとおりである。

1. $u(X)$ の値がパラメータの推定に反映しない。
そのため既知測度値が少ない場合に適切な解が得られない可能性がある。
2. H や H^A を最小にする θ を数値的に得く場合、パラメータの多いクラスで同定をするとより精密な近似ができるが、パラメータが多いため局所解が増え、局所解に陥る可能性が増す。初期値の与え方等を工夫する必要がある。
3. 推定結果について、既知データもついてはそのまま推定値として用いるため、推定されたファ

表5 $H(v;\hat{v})$ の値

u のクラス	$H(v;\hat{v})$
λ -ファジィ測度	0.2665
χ -ファジィ測度	0.0602
(λ, p) -ファジィ測度	0.0468
拡張 χ -ファジィ測度	0.0484

ジィ測度が単調性条件を満たさないことが起こりうる。単調性条件を満たさないと不都合がある場合は、推定値を適宜修正する、あるいは既知データについても同定されたファジィ測度を使用する、といった対策が必要である。

これらの問題について、今後検討の余地がある。

6. まとめと今後の課題

ファジィ測度間の近さは二乗誤差よりも相対エントロピーを用いた方が妥当であることを示し、相対エントロピーを用いたファジィ測度の推定法を提案した。相対エントロピーを最小にするパラメータを求めればファジィ測度が推定できるので、この問題は最適化問題へと帰着できる。

また、 λ -ファジィ測度、 χ -ファジィ測度を拡張し、より自由度の高いクラスを用いた推定について考察した。拡張されたクラスは、より多くのファジィ測度を表現でき、またよい推定ができることを示した。さらにより結果を得るためには、人間の主観の調査を行い、扱う問題に応じた適切なクラスを選ぶ必要があるであろう。

参考文献

- [1] 浅居喜代治, ファジィ経営学入門, オーム社, 1992.
- [2] 岡田勇, 田島博之, χ -ファジィ測度を用いた階層的意思決定法, 第12回ファジィシステムシンポジウム講演論文集, 1996, 875-878.
- [3] 岡田勇, 田島博之, χ -ファジィ測度の数理的性質と階層的意思決定法における同定, 第1回曖昧な気持ちに挑むワークショップ講演論文集, 1996, 35-36.
- [4] A. Honda and M. Grabisch, Entropy of capacities on lattices. Information Sciences, 176, pp. 3472-3489, 2006.
- [5] A. Honda and M. Grabisch, An axiomatization of entropy of capacity on set systems, working paper.
- [6] A. Honda and Y. Okazaki, Identification of fuzzy measures with distorted probability measures, Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, Vol. 9 No. 5, 2005, 467-476.
- [7] Shannon C.E. A mathematical theory of communication. Bell System Tech. Journ. 1948; 27; 374-423, 623-656.
- [8] M. Sugeno, Fuzzy measures and fuzzy integrals: a survey, in M.M. Gupta, G.N. Saridis, and B.R. Gains, editors, Fuzzy automata and decision processes, pp. 89-102, North Holland, Amsterdam, 1977.
- [9] Z. Wang and G.J. Klir, Fuzzy Measure Theory, Plenum Press, New York and London, 1992.
- [10] L.A. Zadeh, Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility, Fuzzy Sets and Systems, 1, 1978, 3-28.

(2006年8月15日 受付)

(2006年11月2日 採録)

[問い合わせ先]

〒820-8502 福岡県飯塚市川津680-4

九州工業大学情報工学部システム創成工学科

本田 あおい

TEL: 0948-29-7730

FAX: 0948-29-7709

E-mail: aoi@ces.kyutech.ac.jp

著者紹介

ほんだ あおい [正会員]

九州工業大学情報工学部システム創成工学科助手。博士(数理学)。ファジィ測度論及びファジィ測度を用いた主観的評価問題、ゲーム理論、測度論等の研究に従事。日本知能情報ファジィ学会、日本数学会、電子情報通信学会会員、日本知能情報ファジィ学会評価問題研究部会代表幹事(2006年～)。

おかざき よしあき [正会員]

1974年九州大学大学院修士課程理学研究科数学専攻修了。九州大学助手、九州工業大学情報工学部助教授を経て1993年九州工業大学情報工学部教授、現在に至る。理学博士。意思決定、評価、ファジィ測度論の研究に従事。

Estimation of Fuzzy Measures with Relative Entropy

by

Aoi HONDA and Yoshiaki OKAZAKI

Abstract :

Identifying fuzzy measures from known partial data using the relative entropy is proposed. We consider an estimation with less relative entropy is better. We also propose the generalizations of λ -fuzzy measure and χ -fuzzy measure which are called (λ, p) -fuzzy measure and generalized χ -fuzzy measure, and show examples of applying our proposed identification to them.

Keywords : estimation of fuzzy measure, relative entropy, λ -fuzzy measure, χ -fuzzy measure, (λ, p) -fuzzy measure, generalized χ -fuzzy measure

Contact Address : Aoi HONDA

Kyushu Institute of Technology

680-4 Kawazu, Iizuka 820-8502, JAPAN

TEL : 0948-29-7730

FAX : 0948-29-7709

E-mail : aoi@ces.kyutech.ac.jp