解説

入門：ファジィ測度とその周辺 - 第2回：確らしさを表すファジィ測度 -[†]

藤本 勝成 *

今回は、確率(測度)の拡張概念としてのファジィ測度に注目する。つまり、「確らしさ」「不確かさ」を測る尺度として、なぜ、確率だけでは不十分なのか、なぜ、ファジィ測度が必要となったのかについて解説する。また、関連分野として、1.2節では、デンプスター・シェーファー理論(証拠理論)[13]について、2.1節では、プロスペクト理論[8, 14]について解説する。

1. 確率論では表現しにくい不確実性

「不確実(性)」は、単に確実でないこと、完全には予測出来ないことなど、感覚的にはなんとなく理解されていて、日常よく用いられる言葉である。連載第1回では、「あいまいさ」をアンビグイティー(ambiguity)とベイグネス(vagueness)に区別して考えたが、ここでは「不確実性」を「何が起るか」「どの程度起るか」の2つの観点から区別して考える(例えば、ナイト[9]や欧州環境庁[12, p.350]等参照)。まず、どちらも知られている場合の不確実性をリスク(risk)と呼ぶ。つまり、「何が起るか」=「事象(event)」, 「どの程度起るか」=「確率(probability)」が分かっている場合がリスクであり、これは確率論の枠組みにおいて取り扱うことができる。また、「何が起るか」は知られているが、「どの程度起るのか」については知られていないような不確実性を狭義の不確実性(uncertainty)と呼ぶ。つまり、「どの程度起るか」=「確率」が分からないため、確率論で扱うには非常にやっかいな種類の不確実性であり、これを取り扱うためにファジィ測度が用いられる。最後に、「何が起るか」「どの程度起るのか」のどちらも知られていない、つまり、何も知らない不確実性を無知(ignorance)と呼ぶ。

1.1 エルスバーグの壺と非加法的主観確率

例1.1(エルスバーグの壺[4]) 1つの壺がある。この壺には、赤玉(R)、黒玉(B)、黄玉(Y)の合わせて90個の玉が入っている。このうち、赤玉が30個入っていることはわかっているが、黒玉と黄玉のそれぞれの個数はわかっていない。このとき、次の2つの二者択一問題を考える：

問題I：壺の中から玉を1つ引く。

(I-1) 赤玉(R)ならば、賞金が貰える。

(I-2) 黒玉(B)ならば、賞金が貰える。

問題II：壺の中から玉を1つ引く。

(II-1) 赤玉(R)か黄玉(Y)ならば、賞金が貰える。

(II-2) 黒玉(B)か黄玉(Y)ならば、賞金が貰える。

この問題では、多くの人が(I-1)および(II-2)を選択するようである(読者の方は、いかがでしょうか?)。これを確率論の枠組みで考えてみる。まず、全体集合を $N := \{R, B, Y\}$ とし、被験者の「玉の出方に対する主観的な確率」を P で表わす(ここでは、高い確率で起こると認識している方を選択するものとして議論する)。

(I-1)を選択：(I-2)よりも(I-1)の方が、高い確率で起こる(と認識している)。

$$\Rightarrow P(\{R\}) > P(\{B\}) \quad (1)$$

(II-2)を選択：(II-1)よりも(II-2)の方が、高い確率で起こる(と認識している)。

$$\Rightarrow P(\{R, Y\}) < P(\{B, Y\}) \quad (2)$$

ここで、「赤玉を引く」という事象 $\{R\}$ 、「黄玉を引く」という事象 $\{Y\}$ 、「黒玉を引く」という事象 $\{B\}$ はそれぞれ相反な事象なので、

[†] Introduction to Fuzzy Measures and Adjacent Fields. Part II. Fuzzy Measures: A Tool for Representing Uncertainty Katsushige FUJIMOTO

* 福島大学共生システム理工学類
College of Symbiotic Systems Science, Fukushima University

$$P(\{R, Y\}) = P(\{R\}) + P(\{Y\}) \quad (3)$$

$$P(\{B, Y\}) = P(\{B\}) + P(\{Y\}) \quad (4)$$

となる。これら式(3)、(4)を式(2)に代入すると

$$P(\{R\}) < P(\{B\}) \quad (5)$$

となり、式(1)に矛盾する。つまり、これらの選択行動を確率論で説明しようとする和不都合が生じることがわかる。

1.1.1 非加法的主観確率の導入

客観的なデータ・情報が不足して「わからない」という部分をどう取り扱うか。これが、ここでの中心の話題となる。まず、例1.1において、客観的な確率の値が分かっているのは、

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\{R\}) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

$$P(\{B, Y\}) = \frac{90-30}{90} = \frac{2}{3}, \quad P(\{R, B, Y\}) = 1$$

だけである。「黒玉、黄玉がそれぞれ何個ずつ入っているのか分からない」ため、 $P(\{B\})$ 、 $P(\{Y\})$ 、 $P(\{R, B\})$ 、 $P(\{R, Y\})$ に対して、客観的な確率を割り当てることは出来ない。先の議論からもわかるように、たとえ主観的なものであっても、確率を割り当てることは出来なかった。ここでは、エルスバークの壺の問題を、非加法的主観確率 μ を用いて表現することを考える。ただし、確率の値が客観的に分かっている場合は、その値を採用することにする。つまり、

$$\mu(\emptyset) = P(\emptyset) = 0 \quad (6)$$

$$\mu(\{R\}) = P(\{R\}) = \frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\mu(\{B, Y\}) = P(\{B, Y\}) = \frac{2}{3} \quad (8)$$

$$\mu(\{R, B, Y\}) = P(\{R, B, Y\}) = 1 \quad (9)$$

とする。それでは、例1.1における選択を μ を用いて考える(μ の値が大きい方を選択するものとする)。

(I-1) を選択：

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \mu(\{R\}) > \mu(\{B\}) \quad (10)$$

(II-2) を選択：

$$\Rightarrow \mu(\{R, Y\}) < \mu(\{B, Y\}) = \frac{2}{3} \quad (11)$$

ここで、黒玉と黄玉を交換しても、本質的な差はない

ため、同様にして、

$$\frac{1}{3} = \mu(\{R\}) > \mu(\{Y\}) \quad (12)$$

$$\mu(\{R, B\}) < \mu(\{B, Y\}) = \frac{2}{3} \quad (13)$$

と考えられる。これらより、客観的な確率の値が既知である $\{R\}$ や $\{B, Y\}$ よりも、未知である $\{B\}$ 、 $\{Y\}$ (式(10)、(12))や $\{R, B\}$ 、 $\{R, Y\}$ (式(11)、(13))を避けていることが見て取れる。このような行動パターンは**不確実性回避**(uncertainty aversion)と呼ばれている。また、例1.1において、賞金が貰える色の種類が増えるほど、主観的な起こりやすさが増加することは明らかなので、 μ は単調性を満たすことになる。これと式(6)より μ はファジィ測度であると言える。ここで、エルスバークの壺の問題を表現するファジィ測度は、

$$0 = \mu(\emptyset) \leq \left\{ \begin{array}{l} \mu(\{B\}) \\ \mu(\{Y\}) \end{array} \right\} < \mu(\{R\}) = \frac{1}{3}$$

$$< \left\{ \begin{array}{l} \mu(\{R, B\}) \\ \mu(\{R, Y\}) \end{array} \right\} < \mu(\{B, Y\}) = \frac{2}{3}$$

$$< \mu(\{R, B, Y\}) = 1$$

の範囲で自由に決められる。また、式(10)、(12)および式(7)、(8)より、

$$\mu(\{B\}) + \mu(\{Y\}) < \mu(\{R\}) + \mu(\{R\})$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \mu(\{B, Y\}) \quad (14)$$

となる。この“ $\mu(\{B\}) + \mu(\{Y\}) < \mu(\{B, Y\})$ ”のような、“ $1+1$ が2にも3にもなる”ような状況を**優加法的**(superadditive)な状況であると言い、この場合、事象 $\{B\}$ と $\{Y\}$ の間には優加法的な関係があると言う。また、 μ が優加法的であるとは、互いに素であるすべての $A, B \in 2^N$ に対して

$$\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(\{B\})$$

が成り立つことを言う。一方で、優加法性と逆の不等号が成り立つとき、**劣加法的**(subadditive)であると言う。

1.2 デンプスター・シェーファー理論 (証拠理論)

デンプスター・シェーファー(DS)理論は、デンプスター(Dempster) [3]の研究を再構築する形で、シェーファー(Shafer) [13]によって提案された。また、これは「証拠理論」とも呼ばれている。以下において、シェーファー [13, Example 4.1 (p.80)] による例を通して、この理論を紹介する。

例1.2(菓子店に入った泥棒を探せ! [13])

シャーロック・ホームズは、菓子店に入った泥棒に関する事件を調査していた。そして、彼は、開けられた金庫を調べてるうちに、ある証拠(証拠I)を見つけ、高い確信をもって「犯人は左利きだ!」と推理した。また、続いて、別の証拠(証拠II)を見つけて「犯人は内部犯だ!」と推理した。

まず、犯人を「左利きで内部犯」、「左利きで外部犯」、「右利きで内部犯」、「右利きで外部犯」の4つの可能性に分類して考える。ここで、それぞれを、 LI , LO , RI , RO で表す(L はLeft-handed(左利き), R はRight-handed(右利き), I はInsider(内部), O はOutsider(外部)を表している)。また、 $L = \{LI, LO\}$, $I = \{LI, RI\}$ のように表すこととする。ここでは、全体集合を

$$\Theta = \{LI, LO, RI, RO\}$$

とする。まず、ホームズは証拠Iを見つけて、「犯人は左利き」であると高い確信をもった。この確信度を便宜上0.7とする。また同様に、「犯人は内部犯」であることの確信度を0.8として、話を進める。

まず、確率論の枠組みでは、

$$P(L) + P(R) = 1, \quad P(I) + P(O) = 1$$

が基本になる。つまり、「犯人は左利き」に対する確信度0.7を $P(L) = 0.7$ で表した場合、同時に $P(R) = 1 - P(L) = 1 - 0.7 = 0.3$ が要請されるので、「犯人は右利き」に対する確信度が0.3となる。しかし、「犯人が右利き」であることを示す証拠は見つかっておらず、ホームズはこのような確信度は持っていない。つまり、確率論の枠組みでは説明が困難であることがわかる。それでは、この状況を以下のように整理する。

1. 証拠Iは、「犯人が L の中にいる(左利きである)」ことを0.7の確信度をもって支持している。
2. 証拠IIは、「犯人が I の中にいる(内部犯である)」ことを0.8の確信度をもって支持している。
3. $\Theta = \{LI, LO, RI, RO\}$ の中に犯人がいることは明らかなので、このことを1.0の確信度をもって支持している。

1.2.1 単純支持関数

定義1.1(単純支持関数[13]) Θ を空でない有限集合、 F を空でない Θ の部分集合とし、 s を $0 < s \leq 1$ なる実数とする。このとき、次の集合関数 $S: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ を、 F を焦点(focus)とする支持度 s の単純支持関数

(simple support function)と呼ぶ。

$$S(E) := \begin{cases} s & \text{if } F \subseteq E \subseteq \Theta \\ 1 & \text{if } E = \Theta \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

この単純支持関数は、単一の証拠に対する確信度(支持度)を表すのに適している。例1.2の場合であれば、証拠I, 証拠IIに対応する単純支持関数 S_I , S_{II} として、

$$S_I(E) := \begin{cases} 0.7 & \text{if } L (= \{LI, LO\}) \subseteq E \subseteq \Theta \\ 1 & \text{if } E = \Theta \\ 0 & \text{その他,} \end{cases}$$

$$S_{II}(E) := \begin{cases} 0.8 & \text{if } I (= \{LI, RI\}) \subseteq E \subseteq \Theta \\ 1 & \text{if } E = \Theta \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と表すことができる¹。また、この S_I , S_{II} は正規ファジィ測度となっていることがわかる。

1.2.2 基本確率割当

定義1.2 (基本確率割当[13]) Θ を空でない有限集合とするとき、以下の2条件を満たす $m: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ を基本確率割当(basic probability assignment)という。

- 1) $m(\emptyset) = 0$
- 2) $\sum_{E \subseteq \Theta} m(E) = 1$

ここでは、まず、例1.2の証拠Iに注目し、そこから得られる確信度を次のような基本確率割当 $m_I: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ を用いて表す。

$$m_I(E) := \begin{cases} 0.7 & \text{if } E = L (= \{LI, LO\}) \\ 0.3 & \text{if } E = \Theta \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

これは、次のように解釈できる。証拠Iが直接、支持(説明)しているのは、「犯人は左利き($L = \{LI, LO\}$ の中に犯人がいる)」ということのみであり、その確信度は0.7である。基本確率割当は総計1を要請しているので(定義1.2: 条件2)、残りの0.3は、「誰が犯人かわからない($\{LI, LO, RI, RO\}$ の中に犯人がいる)」に割り当てられる。同様にして、証拠IIに対応する基本確率割当 $m_{II}: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ も、以下のように表される。

¹ 表記についての補足: $\{E: L (= \{LI, LO\}) \subseteq E \subseteq \Theta\} = \{LI, LO, \{LI, LO, RI\}, \{LI, LO, RO\}, \Theta\}$, $\{E: I (= \{LI, RI\}) \subseteq E \subseteq \Theta\} = \{LI, RI, \{LI, LO, RI\}, \{LI, RI, RO\}, \Theta\}$

$$m_{II}(E) := \begin{cases} 0.8 & \text{if } E = I (= \{LI, RI\}) \\ 0.2 & \text{if } E = \Theta \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

このとき、単純支持関数 S_I, S_{II} は、それぞれ、基本確率割当 m_I, m_{II} を通して、以下のように表すことができる。

$$S_I(E) = \sum_{F \subseteq E} m_I(F) \quad (15)$$

$$S_{II}(E) = \sum_{F \subseteq E} m_{II}(F) \quad (16)$$

例えば、 $E = \{LI, LO, RI\}$ の場合、(15)式は、

$$\begin{aligned} & S_I(\{LI, LO, RI\}) \\ &= \sum_{F \subseteq \{LI, LO, RI\}} m_I(F) \\ &= m_I(\emptyset) + m_I(LI) + m_I(LO) + m_I(RI) \\ &\quad + m_I(\{LI, LO\}) + m_I(\{LI, RI\}) + m_I(\{LO, RI\}) \\ &\quad + m_I(\{LI, LO, RI\}) \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0.7 + 0 + 0 + 0 = 0.7 \end{aligned}$$

となる。

1.2.3 2つの証拠の結合

証拠 I より、犯人は「左利き」「利き腕不明」の2つの状況に対して、それぞれ確信度 $m_I(L) = 0.7$ 、 $m_I(\Theta) = 0.3$ を割り当てた。また、証拠 II より、犯人は「内部犯」「内部犯か外部犯かわからない(内外不明)」に、それぞれ、確信度 $m_{II}(I) = 0.8$ 、 $m_{II}(\Theta) = 0.2$ を割り当てた。ここでは、この2つの証拠の結合を考える。証拠 I と証拠 II は、独立な証拠であると考えられるので、表1のようにして、2つの証拠を結合して得られる確信度 $m: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ を構成する²。

これにより、

$$m(E) := \begin{cases} 0.56 & \text{if } E = \{LI\} \\ 0.14 & \text{if } E = L = \{LI, LO\} \\ 0.24 & \text{if } E = I = \{LI, RI\} \\ 0.06 & \text{if } E = \Theta = \{LI, LO, RI, RO\} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (17)$$

2 上の2つ証拠(m_I と m_{II})の結合方法は、デンプスターの結合則と呼ばれ、以下のように定義されている。

(i) : $m(\emptyset) = 0$
(ii) : $m(E) = a^{-1} \cdot \sum_{F \cap G = E} m_I(F) \cdot m_{II}(G) \quad \forall E \neq \emptyset, a = 1 - \sum_{F \cap G = \emptyset} m_I(F) \cdot m_{II}(G).$

表1 証拠I(m_I)と証拠II(m_{II})の結合

	「左利き」 $L = \{LI, LO\}$ $m_I(L) = 0.7$	「利き腕不明」 $\Theta = \{LI, LO, RI, RO\}$ $m_I(\Theta) = 0.3$
「内部犯」 $I = \{LI, RI\}$ $m_{II}(I) = 0.8$	「左利き」かつ 「内部犯」 $L \cap I = \{LI\}$ $m_I(L) \cdot m_{II}(I) = 0.56$	「利き腕不明」かつ 「内部犯」 $\Theta \cap I = I$ $m_I(\Theta) \cdot m_{II}(I) = 0.24$
「内外不明」 $\Theta = \{LI, LO, RI, RO\}$ $m_{II}(\Theta) = 0.2$	「左利き」かつ 「内外不明」 $L \cap \Theta = L$ $m_I(L) \cdot m_{II}(\Theta) = 0.14$	「利き腕不明」かつ 「内外不明」 $\Theta \cap \Theta = \Theta$ $m_I(\Theta) \cdot m_{II}(\Theta) = 0.06$

となる。

1.2.4 ビリーフ関数

定義1.3(ビリーフ関数[13]) Θ を空でない有限集合とする。集合関数 $\text{Bel}: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ がビリーフ関数(belief function)であるとは、ある基本確率割当 $m: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ が存在して、

$$\text{Bel}(E) = \sum_{F \subseteq E} m(F) \quad (18)$$

と表されることをいう。

また、ビリーフ関数が確率測度になるための必要十分条件は、2要素以上の集合に対する基本確率割当が全て0になることである[13]。一方で、基本確率割当がすべて非負であることによりビリーフ関数はファジィ測度となることがわかる。

それでは、例1.2におけるホームズの「犯人に関するビリーフ関数」を構成する。証拠 I、証拠 II を結合して得られた確信度(基本確率割当) m (式(17))とビリーフ関数の構成式(式(18))より、

$$\text{Bel}(E) := \begin{cases} 0.56 & \text{if } E = \{LI\} \\ 0.7 & \text{if } E = \{LI, LO\} \text{ or } \{LI, LO, RO\} \\ 0.8 & \text{if } E = \{LI, RI\} \text{ or } \{LI, RI, RO\} \\ 0.94 & \text{if } E = \{LI, LO, RI\} \\ 1 & \text{if } E = \Theta \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

が得られる。これにより、「犯人が左利きの内部犯」であることに対する確信度を0.56、「犯人は左利きまたは内部犯(つまり、犯人は右利きの外部犯ではない)」

に対する確信度を0.94と推定できることがわかる。

また、DS理論では、この他にも「2つのピリーフ関数の結合(Dempsterの結合則)」、「証拠の独立性」、「条件付きピリーフ関数」、「証拠間の矛盾(conflict)」等を扱うための概念や方法論が提案されている。詳細については、Shafer[13]を参照されたい。

2. 期待効用では表現しにくい不確実性

リスク(確率がわかっている不確実性)下での意思決定において、期待効用最大化仮説に基づく期待効用理論^{補足}は予見的モデル・実証的モデルの両面で非常に有効・有用なモデルとしてよく用いられている。しかしながら、一方で、この仮説が成り立たない状況がしばしば起こることが指摘されている。

2.1 アレの反例とプロスペクト理論

例2.1(アレの反例(Allais paradox)[1]) 次の賞金が貰える2つの二者択一問題を考える：

問題I：

(I-1) もれなく1万円。

(I-2) 10%の確率で5万円、89%の確率で1万円。ただし、1%の確率で何も貰えない。

問題II：

(II-1) 11%の確率で1万円。ただし、89%の確率で何も貰えない。

(II-2) 10%の確率で5万円。ただし、90%の確率で何も貰えない。

この問題では、多くの人が(I-1)および(II-2)を選択するようである(読者の方はいかがでしょうか?)。はじめに、これを期待効用最大化仮説の枠組みで考える。まず、被験者の効用関数を U で表す(ただし、 $U(0)=0$)。

(I-1)を選択：(I-2)よりも(I-1)の期待効用の方が大きい。すると、以下の関係式が成り立つ。

$$1.0 \times U(1) > 0.1 \times U(5) + 0.89 \times U(1) + 0.01 \times U(0)$$

これを移項して整理すると、

$$0.11 \times U(1) > 0.1 \times U(5) \quad (19)$$

となる。

(II-2)を選択：(II-1)よりも(II-2)の期待効用の方が

大きい。すると、以下の関係式が成り立つ。

$$0.11 \times U(1) + 0.89 \times U(0) < 0.1 \times U(5) + 0.9 \times U(0)$$

これを移項して整理すると、

$$0.11 \times U(1) < 0.1 \times U(5) \quad (20)$$

となる。

明らかに、式(19)と式(20)は矛盾する。つまり、このような選択行動を期待効用最大化仮説の枠組みで表現しようとする、このような不都合が生じることがわかる。

2.1.1 プロスペクト理論

アレの反例に代表される「期待効用最大化仮説に対する反例」に対応するため、確率の加法性の緩和など、様々なタイプのモデルが「期待効用の一般化」として提案されている(例えば、[2, 5, 7, 8, 10, 16])。ここでは、その中の、カーネマン(Kahneman)とトバスキー(Tversky)によるプロスペクト理論(Prospect Theory)を紹介する(詳しくは、[8]を参照されたい)。プロスペクト理論は、彼らの心理実験を通して得られた次のようなリスク・利得・損失に対する一般的な対応を表現するために提案された。

- ・ある参照点(あるいは中立点)を基準に、それより大きい利得をそのまま「利得」、それより小さい利得を「損失」と考える。また、同額の場合、利得に比べて損失の方が大きく評価される(loss aversion)。
- ・利得と損失ではリスクに対する態度が反対になる(reflect effect)。
- －低確率の場合、利得に対してはリスク志向型、損失に対してはリスク回避型。
- －高確率の場合、利得に対してはリスク回避型、損失に対してはリスク志向型。
- ・確率1(必ず起こる)かどうか、確率0(絶対起きない)かどうかに関しては、確率の変化に非常に敏感となるが、それ以外のところでは確率の変化に対しては比較的鈍感である(diminishing sensitivity)。

また、プロスペクト理論では意思決定過程を2つの局面に分けて考える。1つは、与えられた問題を整理・再構成する編集(editing)過程で、もう1つは、最終評価を与える評価(evaluation)過程である。これを例2.1を用いて説明すると、まず、編集過程において、(I-1)から(II-2)は、プロスペクトと呼ばれる

- (I-1) (1, 1.0)
 (I-2) (5, 0.1; 1, 0.89)
 (II-1) (1, 0.11)
 (II-2) (5, 0.1)

なる形式に再構成(編集)される。例えば(I-2)は“プロスペクト(5, 0.1; 1, 0.89)”と呼ばれ、確率0.1(10%)で5万円が、確率0.89(89%)で1万円が貰える見込み(prospect)のくじ(ゲーム)を意味する。次に、評価過程では、編集されたプロスペクト $(x, p; y, q)$ の評価 $V(x, p; y, q)$ を、図1に示されるような、各財(基準点からの財の増減)に対する(ある種の)効用を表す価値関数 $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と確率に対するインパクトを表す重み関数 $\pi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を介して、

$$V(x, p; y, q) = \pi(p) \cdot v(x) + \pi(q) \cdot v(y) \quad (21)$$

のようにして与える³。ここで、図1における各関数の形状は、彼等の心理実験を通して得られた以下の知見を反映したものである：

図1 価値関数 v と重み関数 π

価値関数：1) 利得、損失のいずれの場合でも、金額が上がるにつれて感覚的な価値の増加は鈍くなり、2) 同額の利得と損失であれば、損失の方がよりインパクトが強い

これによって価値関数 v は、

- 1) 利得に対しては凹関数、損失に対して凸関数⁴
- 2) 利得よりも損失の方が急勾配

となる。

重み関数：1) 確率が大きいほど、そのインパクト

も大きい。2) 確率が0および1(の付近)を除いて、確率のインパクトは実際の確率の増加分よりも穏やかに増加する。しかし、確率が0および1(の付近)で、不連続または急激な変化が起きる。3) また、確率が一定倍率で上昇した際のインパクトは、確率の大きさが大きいとき程大きい。

これによって、重み関数 π は、以下のような性質をもつ関数となる。ただし、確率0および1に対するインパクトを、それぞれ $\pi(0)=0$ 、 $\pi(1)=1$ と正規化して考える。また、 $0 < p, q, r < 1$ とする。

- 1) $p \leq q \Rightarrow \pi(p) \leq \pi(q)$ [単調性]
- 2) $\pi(p) + \pi(1-p) < \pi(1) = 1$ [劣確実性]
- 3) $\frac{\pi(pq)}{\pi(p)} \leq \frac{\pi(pqr)}{\pi(pr)}$ [劣比例性]

ここでは、期待効用最大化仮説の枠組みでは表現できなかった例2.1をプロスペクト理論の枠組みで考える(つまり、式(21)を適用する)。

(I-1)を選択：プロスペクト(1, 1.0)の方が(5, 0.1; 1, 0.89)よりも高評価。

$\Rightarrow \pi(1.0) \times v(1) > \pi(0.1) \times v(5) + \pi(0.89) \times v(1)$
 移項して整理すると、

$$(\pi(1.0) - \pi(0.89)) \times v(1) > \pi(0.1) \times v(5) \quad (22)$$

(II-2)を選択：プロスペクト(5, 0.1)の方が(1, 0.11)よりも高評価。

$$\Rightarrow \pi(0.1) \times v(5) > \pi(0.11) \times v(1) \quad (23)$$

ここで、式(22)と式(23)より、

$$\frac{\pi(0.11)}{\pi(0.1)} < \frac{v(5)}{v(1)} < \frac{\pi(1) - \pi(0.89)}{\pi(0.1)}$$

となる。これは、以下のような解釈を通して、この問題がプロスペクト理論の枠組みで矛盾無く説明できることを示している：確率が10%から11%へ増加することよりも財が1万円から5万円に増加することの方がインパクトが大きい(左辺と中辺)。重み関数 π に劣確実性が見られる(左辺と右辺)。

2.2 累積プロスペクト理論とショケ積分

本節は発展的内容であるため、特に興味のある読者の方以外は読み飛ばしても差し支えない。

³ 任意の $0 \leq p \leq 1$ に対して $\pi(p)=p$ のとき、 $V(x, p; y, q)$ は期待効用と一致する。

⁴ 関数 f が凸であるとは、任意の $x_1 < x_2$ と任意の $0 \leq \lambda \leq 1$ に対して、常に $f(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2) \leq \lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda) \cdot f(x_2)$ が成り立つことをいう。凹であるとは、反対の不等号が成り立つことをいう。

カーネマンとトバスキーは、プロスペクト理論の拡張版として、累積プロスペクト理論(cumulative prospect theory) [14]を提案した。従来のプロスペクト理論では、 $(x, p; y, q)$ のような、リスク下における結果が高々2つのプロスペクトのみを対象としていたが、累積プロスペクト理論では、結果の数を任意個に、また、リスク下だけでなく、以下のような不確実性下でのプロスペクトにまで対象を拡張している。

定義2.1(不確実性下のプロスペクト[14])有限集合 S を自然の状態($A \subseteq S$ を事象と呼ぶ)とし、 $X \subseteq \mathbb{R}$ を結果の集合とする。このとき、関数 $f: S \rightarrow X$ を不確実性下のプロスペクト(uncertain prospect)と呼ぶ(特に、混乱を生じない場合は、単にプロスペクトと呼ぶ)。また、 S が有限であることにより(関数 $f: S \rightarrow X$ は $n(\leq |S|)$ 通りの値しか取らないので)、 $f(S) = \{x_1, \dots, x_n\}, x_1 \leq \dots \leq x_n$ のように書け、 $A_i := \{i \in S \mid f(i) = x_i\}$ とすれば、 $\{A_i\}_{i=1}^n$ は S の分割となり、プロスペクト f は、

$$f = \{(x_1, A_1), \dots, (x_n, A_n)\} \quad (24)$$

のように表すこともできる。

例2.2(even or odd)

A. サイコロを1つ振る。出た目 x が偶数であれば x 万円を受取り、出た目 x が奇数であれば x 万円を支払うゲームを行う。

このとき、自然の状態 S は、つまり、サイコロの目全体の集合

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

であり、結果の集合 X は、

$$X = \{-5, -3, -1, 2, 4, 6\}$$

となり、プロスペクト f_A は、

$$f_A = \{(-5, \{5\}), (-3, \{3\}), (-1, \{1\}), (2, \{2\}), (4, \{4\}), (6, \{6\})\}$$

と表される。また、

B. サイコロを1つ振る。出た目が偶数であれば1万円を受取り、出た目が奇数であれば1万円を支払うゲームを行う。

このときのプロスペクト f_B は、

$$f_B = \{(-1, \{1, 3, 5\}), (1, \{2, 4, 6\})\}$$

と表される。

2.2.1 不確実性下のプロスペクトの評価

累積プロスペクト理論では、プロスペクト

$$f = \{(x_{-m}, A_{-m}), \dots, (x_{-1}, A_{-1}), (0, A_0), (x_1, A_1), \dots, (x_n, A_n)\},$$

$x_{-m} < \dots < x_{-1} < 0 < x_1 < \dots < x_n$ の評価 $V(f)$ は、 $v(0)=0$ なる価値関数 $v: X \rightarrow \mathbb{R}$ と正の結果 x_i に関する重み π_i^+ と負の結果 x_j に関する重み π_j^- を介して、

$$V(f) = \sum_{i=0}^n \pi_i^+ \cdot v(x_i) + \sum_{j=-m}^0 \pi_j^- \cdot v(x_j) \quad (25)$$

のように表される。ただし、 π_i^+ および π_j^- は 2^S 上の、ある2つの容量 $W^+: 2^S \rightarrow [0, 1]$, $W^-: 2^S \rightarrow [0, 1]$ を用いて、

$$\pi_i^+ = \begin{cases} W^+(A_n) & \text{if } i = n \\ W^+(B_i) - W^+(B_{i+1}) & \text{if } 0 < i < n \end{cases} \quad (26)$$

$$\pi_j^- = \begin{cases} W^-(A_{-m}) & \text{if } j = -m \\ W^-(C_j) - W^-(C_{j+1}) & \text{if } 0 < j < m \end{cases} \quad (27)$$

のように表される。ただし、 $B_i := \bigcup_{k=i}^n A_k$, $C_j := \bigcup_{k=j}^m A_{-k}$ とする。つまり、 π_i^+ は、

$$W(x_i \text{ 以上の事象}) - W(x_i \text{ を超える事象})$$

として、 π_j^- は、

$$W(x_j \text{ 以下の事象}) - W(x_j \text{ に満たない事象})$$

として与えられている⁶。

実は、この不確実性下のプロスペクト f の評価 $V(f)$ は、連載第1回で定義されたショケ積分を用いて表わすことができるのである。実際、 2^S 上の正規ファジィ測度 W^+ , W^- に関するショケ積分によって、

$$V(f) = (C) \int f^+ dW^+ - (C) \int f^- dW^- \quad (28)$$

のように表される。ただし、 $f^+(i) = \max(f(i), 0)$, $f^-(i) = f(i) - f^+(i)$ とする。つまり、累積プロスペク

5 $W: 2^S \rightarrow [0, 1]$ が以下の3条件を満足するとき、 W は 2^S 上の容量と呼ばれる：(i) $W(\emptyset) = 0$, (ii) $W(S) = 1$, (iii) $A \subseteq B \subseteq S \Rightarrow W(A) \leq W(B)$ 。つまり、正規ファジィ測度に他ならない。

6 累積の名前は、“すくなくとも x_i 以上の結果が得られる事象”、“ x_i に満たない結果が得られる事象”のように、結果がそれ以下それ以上の事象を累積的に扱っていることに由来している。

ト理論におけるプロスペクト $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ の評価 $V(f)$ は、正の部分を正規ファジィ測度 W^+ に関するショケ積分で評価し、負の部分を W^- に関するショケ積分で評価して、その差を求めたものに他ならない。また、(累積)プロスペクト理論とファジィ測度の関係に関しては、成川[11]による解説が詳しい。

補足

例 次のような、サイコロを振って出た目に応じて賞金が貰えるゲームを行う。

1 か 2 $\Rightarrow$ 賞金15万円

3 か 4 か 5 $\Rightarrow$ 賞金10万円

6 $\Rightarrow$ 賞金無し

ここで、賞金に対する効用⁷を関数 $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で表す。例えば、 $U(15)$ で「15万円を貰った時のうれしさの大きさ」を表すものとする。このとき、1)期待値、2)期待値の効用、3)期待効用は以下のように与えられる。

$$[\text{期待値}] \quad \frac{2}{6} \times 15 + \frac{3}{6} \times 10 + \frac{1}{6} \times 0 \text{円} = 10 \text{(万円)}$$

$$[\text{期待値の効用}] \quad U(10)$$

$$[\text{期待効用}] \quad \frac{2}{6} \times U(15) + \frac{3}{6} \times U(10) + \frac{1}{6} \times U(0)$$

ここで、期待効用最大化仮説とは、「意思決定者は、期待効用を最大化するように行動する」、つまり、「リスク下で2つのモノを比較する際、必ず期待効用の大きい方を好むはずだ」という仮説である[15]。これは様々な意思決定問題において支持され、広く利用されている。

参考文献

- [1] M. Allais, Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque : Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Americaine, *Econometrica*, **21**, 503-546 (1953).

- [2] D. Bell, Regret in decision making under uncertainty, *Operations Research*, **30**, 961-981 (1982).
 [3] A. P. Dempster, Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping, *The Annals of mathematical statistics*, **38**, 325-339 (1967).
 [4] D. Ellsberg, Risk, Ambiguity, and Savage Axioms, *The Quarterly Journal of Economics*, **75**(4), 643-669 (1961).
 [5] P. Fishburn, Dominance in SSB utility theory, *Journal of Economic Theory*, **34**, 130-148 (1984).
 [6] 藤田恒夫・原田雅顕著, 決定分析入門, 共立出版 (1989).
 [7] H. Hazen, Subjective weighted linear utility, *Theory and Decision*, **23**, 261-282 (1987).
 [8] D. Kahneman and A. Tversky, Prospect theory : An analysis of Decision under risk, *Econometrica*, **75**, 643-669 (1979).
 [9] F. H. Knight, *Risk, Uncertainty and Profit*, Houghton Mifflin, Boston-NewYork (1921).
 [10] M. Machina, Expected utility analysis without the independence axiom, *Econometrica*, **50**, 277-323 (1982).
 [11] 成川康男, 非線形効用理論/累積プロスペクト理論, 日本知能情報ファジィ学会誌, **16**, pp.269-3002 (2004).
 [12] 欧州環境庁編, レイト・レッスンズ-14の事例から学ぶ予防原則-, 七つ森書館 (2005).
 [13] G. Shafer, *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton Univ. Press, Princeton (1976).
 [14] A. Tversky and D. Kahneman, Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty, *Journal of Risk and Uncertainty*, **5**, 297-323 (1992).
 [15] J. Von Neumann and O. Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton Univ. Press, Princeton (1953).
 [16] M. Yaari, The dual theory of choice under risk, *Econometrica*, **55**, 95-115 (1987).
 (2008年4月15日 受付)

[問い合わせ先]

〒960-1296 福島市金谷川1
 福島大学共生システム理工学類
 藤本 勝成
 TEL: 024-548-8436
 FAX: 024-548-8436
 E-mail: fujimoto@sss.fukushima-u.ac.jp

7 ここでは、効用＝「うれしさ、ありがたさ、幸せなどの大きさ」と考えれば十分である。