協力ゲームの一般化と解概念†

本田 あおい*¹・藤本 勝成*²

協力ゲームは人々の提携に伴う利得と、それに基づく利得配分を分析するための理論である。協力ゲームは特性関数で表現され、利得の配分は協力ゲームの解とよばれる。本稿では通常の提携型ゲームの定義域をより広いクラスへ一般化して議論し、1つの新たな解概念を導入する。この拡張により、多選択肢ゲーム、双容量などの束上のゲームおよびその解概念を統一的に取り扱うことができることを例を通して示す。

キーワード：協力ゲーム、ゲームの解、多選択肢ゲーム、正則集合

1. はじめに

人々の社会的、あるいは経済的行動の表現の一つに協力ゲームの概念がある。協力ゲームにおける提携のあり方に対して主要な2つの批判がある。

(I) プレイヤー間のあらゆる提携が実現可能であることを仮定している。しかしながら、このようなケースは一般的とは言えない。実際には提携を実現するためには提携内のメンバーが互いにコミュニケーションをとる必要がある。さらに、たとえコミュニケーションが取れた場合であっても、空間的制約や立場、イデオロギーなど様々な要因から実現不能な提携も存在する。

(II) プレイヤーは提携に参加するか否かの二者択一を強いられる。しかしながら、もう少し緩やかな参加形態も考えられる。例えば投票行動では、賛成、反対に加え第3の選択肢「棄権」が存在する。

これらの批判に耐えうるため、通常の協力ゲーム(提携型ゲーム)を拡張、一般化する形で様々なゲームとそのゲームにおける解概念が提案されている。(I)の批判に対して、Myerson[15]はプレイヤー間相互のコミュニケーション構造を無向グラフで表現し、提携をこのグラフネットワークによって実現可能なもののみに制限したコミュニケーションゲーム(communication

game, network-restricted game)とその解を提案した。これはマイヤースン値と呼ばれている。(II)の批判に対して、HsiaoとRaghavan[10]は提携に対する多段階の参加レベルを考慮した多選択肢ゲーム(multichoice game)を提案した。その後、FagleとKern[5]は、(I)の批判に対してプレイヤー間の階層・順序関係を考慮した新たなゲーム構造と解概念を提案した。このゲームの構造は多選択肢ゲームの拡張概念にもなっている。

現在ではMyersonに端を発するコミュニケーションゲームの文脈における様々な解概念の研究(e.g., ポジション値[3], Hamiache値[9]など)とFagleとKernによる階層・順序構造を考慮したゲームに端を発する様々な組合せ構造上のゲームの研究(e.g., games on union stable systems[1], on convex geometries[2], 3択投票ゲーム[6], 双容量[7]など)が2つの代表的な研究の方向となっている。

本論文では後者の流れに沿って組合せ構造一般としての集合系を考え、ある種の正則性を満たす集合系上でのゲームとその解概念について考察を行う。

本論文の構成は以下の通りである。第2節では本論文における基本概念および重要概念を与える。第3節では新たな解概念の提案とそれを特徴付ける公理系について述べる。第4節ではこの解の適用例、特に多選択肢ゲームと双容量への適用例を示す。

2. 準備

本論文を通して、 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ を空でない有限集合とし、 N の部分集合全体を 2^N で表す。

定義1 (協力ゲーム) プレイヤー全体の集合を N とし、その部分集合 $S \subseteq N$ を提携と呼ぶ。また、 $v(\emptyset) = 0$ なる関数 $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ を N 上の特性関数と呼び、 $v(S)$ に

† A generalization of cooperative games and its solution concept
Aoi HONDA and Katsushige FUJIMOTO

*1 九州工業大学 情報工学部 システム創成情報工学科
Department of system innovation and informatics, Faculty of
Computer Science and Systems Engineering, Kyushu Institute
of Technology

*2 福島大学 共生システム理工学類
College of Symbiotic Systems Science, Fukushima University

よって「提携 S によって実現可能な最大利得」を表す。これらからなる (N, v) を協力ゲームと呼ぶ。

例 2 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ に対して $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$1. v(\emptyset) = 0, v(N) = 1,$$

2. $S, T \in 2^N$ に対して $S \subseteq T$ ならば $v(S) \leq v(T)$, を満たすとき, v はファジィ測度または容量とよばれる。

ファジィ測度は単調性を持つゲームである。ファジィ測度を正負の両方向に値をとる関数に拡張したものが双容量である(定義23)。

定義 3 (集合系) $\mathfrak{N} \subseteq 2^N$ が $\emptyset$ と N を要素に持つとき $(N, \mathfrak{N})$ を集合系と呼ぶ。 N が明らかな場合は単に $\mathfrak{N}$ と書く。

定義 4 (一般化協力ゲーム) プレイヤー全体の集合を N とし, $(N, \mathfrak{N})$ を集合系とする。このとき $S \in \mathfrak{N}$ を実現可能な提携と呼ぶ。また $v(\emptyset) = 0$ なる関数 $v: \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathfrak{N}$ 上の特性関数と呼び, これらからなる $(N, \mathfrak{N}, v)$ を一般化協力ゲームと呼ぶ。ただし, 特に混乱の生じる恐れがないときは, $(N, \mathfrak{N}, v)$ と v を同一視し, v を $(N, \mathfrak{N})$ 上のゲームと呼ぶ。また, $(N, \mathfrak{N})$ 上の全てのゲームの集合を $\mathcal{G}(N, \mathfrak{N})$ で表す。つまり, $v \in \mathcal{G}(N, 2^N)$ は v が N 上の通常の協力ゲームであることを表す。

協力ゲームの解とは, 協力ゲームにおける各プレイヤーの平均的価値, あるいは平均的貢献度を意味する。Shapley[16]は協力ゲームにおける1つの解概念を与えた。

定義 5 (シャプレイ値) 協力ゲーム $v \in \mathcal{G}(N, 2^N)$ に関するシャプレイ値 $\Phi_{\text{sh}}(v) = (\Phi_{\text{sh}}^1(v), \dots, \Phi_{\text{sh}}^n(v)) \in \mathbb{R}^n$ は次のように定義される。

$$\Phi_{\text{sh}}^i(v) := \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \gamma_{|S|}^n [v(S \cup \{i\}) - v(S)],$$

$i = 1, \dots, n$. ただし,

$$\gamma_k^n := \frac{(n-k-1)! k!}{n!}.$$

次に一般化協力ゲームの解を定義するため, 極大鎖の概念を導入する。

定義 6 $(N, \mathfrak{N})$ を集合系とする。 $S \subseteq T$ なる $S, T \in \mathfrak{N}$ に対して, $S \subseteq U \subseteq T$ となるような $U \in \mathfrak{N}$ が存在しない

とき, S は T に被覆されている, あるいは T は S を被覆しているといい, $S \prec T$ または $T \succ S$ と書く。

定義 7 (鎖・極大鎖) $(N, \mathfrak{N})$ を集合系とする。任意の $S, T \in \mathfrak{N}$ が $S \subseteq T$ または $S \supseteq T$ を満たすとき, $(N, \mathfrak{N})$ を鎖と呼ぶ。 $\mathfrak{N}$ の部分集合, $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{N}$ が鎖であるとき, $\mathcal{C}$ を $\mathfrak{N}$ の鎖と呼ぶ。集合系(鎖とは限らない) $\mathfrak{N}$ の鎖 $\mathcal{C} = \{C_0, C_1, \dots, C_m\}$ が $\emptyset = C_0 \prec C_1 \prec \dots \prec C_m = N$ を満たすとき, $\mathcal{C}$ を $\mathfrak{N}$ の極大鎖と呼ぶ。例えば, $\mathfrak{N} = 2^N$ の極大鎖は $n!$ 個存在し, それらの長さはすべて n である。また $\mathfrak{N}$ の極大鎖全体の集合を $\mathcal{M}(\mathfrak{N})$ と書く。

長さが n である極大鎖 $\mathcal{C}$ は, 以下のような N 上の置換 $\sigma_{\mathcal{C}}: N \rightarrow N$ と 1 対 1 に対応する。

$$\{\sigma_{\mathcal{C}}(i)\} := C_i \setminus C_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

また同時に以下のような全順序集合 $(N, <_{\mathcal{C}})$ と同一視できる。

$$\sigma_{\mathcal{C}}(i) <_{\mathcal{C}} \sigma_{\mathcal{C}}(i+1), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

このことから, 長さ n の極大鎖 $\mathcal{C}$ は, プレイヤー $\sigma_{\mathcal{C}}(1)$ を起点(発起人)として, 各プレイヤーが序列 $<_{\mathcal{C}}$ に従って, 1 名ずつ提携に加わっていく全体提携の形成過程を表現していると解釈できる。

シャプレイ値は極大鎖を通して以下のように表現できる[4]。

命題 8 任意の $v \in \mathcal{G}(N, 2^N)$ に対して

$$\Phi_{\text{sh}}^i(v) = \frac{1}{|\mathcal{M}(2^N)|} \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{M}(2^N)} [v(\mathcal{C}_*(i) \cup \{i\}) - v(\mathcal{C}_*(i))],$$

$i = 1, \dots, n$. ただし, $\mathcal{C}_*(i) := \sup\{C \in \mathcal{C} \mid C \not\ni i\}$.

プレイヤー $i \in N$ のシャプレイ値 $\Phi_{\text{sh}}^i(v)$ は, 全ての全体提携の形成過程にわたってプレイヤー i の限界貢献度 $[v(\mathcal{C}_*(i) \cup \{i\}) - v(\mathcal{C}_*(i))]$ の平均をとったものである。

定義 9 (正則集合系[11]) 集合系 $(N, \mathfrak{N})$ が

$$\forall S, T \in \mathfrak{N} \quad S \prec T \Rightarrow |T \setminus S| = 1$$

を満たすとき, $(N, \mathfrak{N})$ は正則であるという。

以下の命題が直ちに導かれる。

命題10 $(N, \mathfrak{N})$ を集合系とする. このとき, 任意の $S \in \mathfrak{N}$ に対して, ある極大鎖 $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{N}$ が存在して, $S \in \mathcal{C}$ となる.

命題11 $(N, \mathfrak{N})$ が正則集合系るとき, $\mathfrak{N}$ の任意の極大鎖 $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{N}$ の長さは n である.

全ての実現可能な提携 $S \in \mathfrak{N}$ は, ある全体提携の形成過程 $\mathcal{C} = \{\emptyset = C_0, C_1, \dots, C_n = N\}$ における, ある一時点 $S = C_i$ として表される. また全ての全体提携の形成過程は, プレーヤーのある序列に従って1名ずつ提携に加わる形として表される. これは, 任意の全体提携形成過程 $\mathcal{C} = \{\emptyset = C_0, C_1, \dots, C_n = N\}$ において, それぞれのプレーヤー $i \in N$ は, $i \notin C_k, C_{k+1} = C_k \cup \{i\}$ となる $0 \leq k < n$ を持つことを意味する. これらのことを踏まえ, 正則集合系 $(N, \mathfrak{N})$ 上のゲーム $v \in \mathcal{G}(N, \mathfrak{N})$ に関する解として, 次の $\Psi(v)$ を導入する. これは, シャプレイ値, 及びFagleとKern[5]の解の一般化となっている.

定義12(一般化協力ゲームの解[11]) $(N, \mathfrak{N})$ を正則集合系とする. $v \in \mathcal{G}(N, \mathfrak{N})$ の解 $\Psi(N, \mathfrak{N}, v) = (\Psi^1(v), \dots, \Psi^n(v)) \in \mathbb{R}^n$ を次のように定義する.

$$\Psi^i(N, \mathfrak{N}, v) := \frac{1}{|\mathcal{M}(\mathfrak{N})|} \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{M}(\mathfrak{N})} [v(\mathcal{C}_*(i) \cup \{i\}) - v(\mathcal{C}_*(i))], \\ i = 1, \dots, n.$$

3. 一般化協力ゲームの解に関する公理系

本節では, 一般化協力ゲームの解 $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^n)$ として満たすべき諸性質の公理化について議論する. まずシャプレイ値を特徴づける4つの公理, 公理1-4を紹介する. シャプレイ値はこれら4つの公理を満たす唯一の解概念として与えられる[16].

公理1 (全体合理性) 任意の $v \in \mathcal{G}(N, 2^N)$ に対して,

$$\sum_{i=1}^n \Phi^i(v) = v(N)$$

が成り立つ.

公理2 (ナルプレイヤーのゼロ評価) プレーヤー $i \in N$ が $v \in \mathcal{G}(N, 2^N)$ に関するナルプレイヤー (i.e., $\forall S \subseteq N, v(S \cup \{i\}) = v(S)$) のとき,

$$\Phi^i(v) = 0$$

が成り立つ.

公理3 (対称性) プレーヤー $i, j \in N$ が $v \in \mathcal{G}(N, 2^N)$ に関して対称 (i.e., $\forall S \subseteq N \setminus \{i, j\}, v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$) であるとき,

$$\Phi^i(v) = \Phi^j(v)$$

が成り立つ.

公理4 (加法性) 任意の $v_1, v_2 \in \mathcal{G}(N, 2^N)$ に対して,

$$\Phi(v_1 + v_2) = \Phi(v_1) + \Phi(v_2)$$

が成り立つ.

次に Ψ の特徴付けのため, これらの公理を以下のように修正する.

公理1' (全体合理性) 集合系 $(N, \mathfrak{N})$ が鎖のとき任意の $v \in \mathcal{G}(N, \mathfrak{N})$ に対して,

$$\sum_{i=1}^n \Phi^i(v) = v(N)$$

が成り立つ.

公理2' (ナルプレイヤーのゼロ評価) 集合系 $(N, \mathfrak{N})$ が鎖のとき, 任意の $v \in \mathcal{G}(N, \mathfrak{N})$ に対して, プレーヤー $i \in N$ が v に関するナルプレイヤー (i.e., $\forall S \in \mathfrak{N}, S \cup \{i\} \in \mathfrak{N} \Rightarrow v(S \cup \{i\}) = v(S)$) のとき,

$$\Phi^i(v) = 0$$

が成り立つ.

公理3' (対称性) σ を N 上の置換とする. 集合系 $(N, \mathfrak{N})$ が鎖のとき, 任意の $v \in \mathcal{G}(N, \mathfrak{N})$ に対して,

$$\Phi^i(N, \mathfrak{N}, v) = \Phi^{\sigma(i)}(N, \sigma(\mathfrak{N}), \sigma \circ v)$$

成り立つ. ただし, $\sigma(\mathfrak{N}) := \{\sigma(S) \mid S \in \mathfrak{N}\}, \sigma \circ v(S) := v(\sigma^{-1}(S)), S \in \sigma(\mathfrak{N})$ とする.

公理4' (加法性) 集合系 $(N, \mathfrak{N})$ が鎖のとき, 任意の $v_1, v_2 \in \mathcal{G}(N, \mathfrak{N})$ に対して,

$$\Phi(v_1 + v_2) = \Phi(v_1) + \Phi(v_2)$$

が成り立つ.

公理5 (凸性) 集合系 $(N, \mathfrak{N})$ に対して, $\{\mathcal{M}(\mathfrak{N}_1), \mathcal{M}(\mathfrak{N}_2), \dots, \mathcal{M}(\mathfrak{N}_m)\}$ が $\mathcal{M}(\mathfrak{N})$ の分割となるような集

合系列 $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \dots, \mathfrak{N}_m \subseteq \mathfrak{N}$ が存在するとき, $\sum_{k=1}^m \alpha_k = 1$ なる $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in [0, 1]$ が存在して, 任意の $v \in \mathcal{G}(N, \mathfrak{N})$ に対して,

$$\Phi(N, \mathfrak{N}, v) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \Phi(N, \mathfrak{N}_k, v|_{\mathfrak{N}_k})$$

が成り立つ. ただし, $v|_{\mathfrak{N}_k}$ は v の $\mathfrak{N}_k$ への制限.

公理 5 は, Φ のサブドメインへの分解可能性に関する要請と条件付けを与えている. 例えば, $(N, \mathfrak{N})$ の任意の極大鎖 $\mathcal{C} = \{\emptyset = C_0, C_1, \dots, C_m = N\}$ は, $(N, \mathcal{C})$ 自身が一つの集合系となっている. ここで, $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ は要素に $\mathcal{C}$ のみを持つ 1 点集合であるので, 明らかに,

$$\mathcal{M}(\mathfrak{N}) = \bigcup_{\mathcal{C} \in \mathcal{M}(\mathfrak{N})} \mathcal{M}(\mathcal{C})$$

であり, $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j \in \mathcal{M}(\mathfrak{N})$ に対して,

$$\mathcal{C}_i \neq \mathcal{C}_j \Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{C}_i) \cap \mathcal{M}(\mathcal{C}_j) = \emptyset$$

が成り立つ. よって, $\{\mathcal{M}(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \in \mathcal{M}(\mathfrak{N})\}$ は $\mathcal{M}(\mathfrak{N})$ の分割であり, 公理 5 の必要条件として,

$$\Phi(N, \mathfrak{N}, v) = \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{M}(\mathfrak{N})} \alpha_{\mathcal{C}} \Phi(N, \mathcal{C}, v|_{\mathcal{C}}),$$

$\sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{M}(\mathfrak{N})} \alpha_{\mathcal{C}} = 1$, $\alpha_{\mathcal{C}} \in [0, 1]$ が導かれる.

定理13 ([14]) $(N, \mathfrak{N})$ を正則集合系とする. このとき, 公理1', 2', 3', 4', 5 を満たす解概念 $\Phi: \mathcal{G}(N, \mathfrak{N}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ がただ1つ存在し Ψ で与えられる.¹

定理13では $\Phi = \Psi$ なる必要十分条件を与えたが, 必要条件としては公理1' - 4' に関するより強い条件が成立する.

命題14 $(N, \mathfrak{N})$ を正則集合系とする. このとき, Ψ は任意の $v \in \mathcal{G}(N, \mathfrak{N})$ に対して全体合理性, ナルプレイヤーのゼロ評価, 対称性, 加法性を満たす.

つまり, 十分条件としては公理1' - 4' は鎖である正則集合系上のゲームについての条件であるが, 必要条件としては鎖も含めて一般の正則集合系上のゲームについての条件となっている.

4. 束上のゲームへの応用

この節では束上のゲームから導かれる正則集合系上

1 [13]では, これとは異なる特徴付けが与えられている.

のゲームについて考察し, 束上のゲームに関する1つの解概念を導入する.

定義15 (V既約元) $(L, \leq, \vee, \wedge, \top, \perp)$ を束とする. ただし, $(L, \leq)$ は空でない有限半順序集合, $\vee, \wedge$ は上限, 下限, $\top, \perp$ は最大元, 最小元をそれぞれ表すものとする. $x \in L$ が

1. $x \neq \perp$,
2. 任意の $a, b \in L$ に対して, $x = a \vee b$ ならば $x = a$ または $x = b$ である.

を満たすとき, x を L の **V既約元** と呼ぶ. また, L の V既約元全体の集合を $\mathcal{J}(L)$ で表す.

定義16 (束上の協力ゲーム) $(L, \leq, \vee, \wedge, \top, \perp)$ を束とする. このとき, $\mathcal{J}(L)$ をプレイヤー全体の集合とし, L の要素 $a \in L$ を **提携** と呼ぶ. また, $v(\perp) = 0$ なる関数 $v: L \rightarrow \mathbb{R}$ を L 上の **特性関数** と呼び, $(L, \leq, \vee, \wedge, \top, \perp, v)$ を **束上のゲーム** と呼ぶ. 一般化協力ゲームの時と同様, 混乱のない場合は単に (L, v) あるいは v を束上のゲームと呼ぶ.

次に束 L と束同型な集合系を生成する. まず, それぞれの $a \in L$ に対して,

$$\eta(a) := \{x \in \mathcal{J}(L) \mid x \leq a\}$$

を与える写像 $\eta: L \rightarrow 2^{\mathcal{J}(L)}$ を定義する. このとき, η は $(L, \leq, \vee, \wedge, \top, \perp)$ から $(\eta(L), \subseteq, \cup, \cap, \mathcal{J}(L), \emptyset)$ への束同型写像となる[11]. この $(\mathcal{J}(L), \eta(L))$ を **束 L から導かれる集合系** と呼ぶ.

定義17 (L, v) を束上のゲームとする. このとき, 束 L より導かれる集合系 $(\mathcal{J}(L), \eta(L))$ 上のゲーム $v^\eta \in \mathcal{G}(\mathcal{J}(L), \eta(L))$ を以下のように定義する.

$$v^\eta(S) := \eta \circ v(S) := v(\eta^{-1}(S)), \quad S \in \eta(L).$$

束同型写像 η により束から導かれる集合系が正則であるとき, 束上のゲームに対する1つの解概念が導かれる.

定義18 (束上のゲームの解) $(L, \leq, \vee, \wedge, \top, \perp)$ を束, $v: L \rightarrow \mathbb{R}$ を L 上のゲームとする. 束 L から導かれる集合系 $(\mathcal{J}(L), \eta(L))$ が正則であるとき, v の解 $\Phi(L, v) = \{\Phi^i(L, v)\}_{i \in \mathcal{J}(L)}$ を以下のように定義する.

$$\Phi^i(L, v) := \Psi^i(\mathcal{J}(L), \eta(L), v^\eta), \quad i \in \mathcal{J}(L).$$

例19 束 L_1 (図1) 上のゲーム v を考える. このとき, L_1 の V既約元全体の集合は $\mathcal{J}(L_1) = \{d, e, f\}$ となり,

図1 L_1 図2 $\eta(L_1)$

$\eta(a) = \{d, e, f\}$, $\eta(b) = \{d, e\}$, $\eta(c) = \{e, f\}$,
 $\eta(d) = \{d\}$, $\eta(e) = \{e\}$, $\eta(f) = \{f\}$, $\eta(g) = \emptyset$
 となる。つまり, $L_1 = \{d, e, f, b, c, a\}$ に

$$\eta(L_1) = \{\{d\}, \{e\}, \{f\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{d, e, f\}\}$$

が対応する。

また, $\eta(L_1)$ の極大鎖と L の極大鎖はそれぞれ以下
 のように対応する。

$$\begin{aligned} \{\emptyset, \{d\}, \{d, e\}, \{d, e, f\}\} &\leftrightarrow \{g, d, b, a\} \\ \{\emptyset, \{e\}, \{d, e\}, \{d, e, f\}\} &\leftrightarrow \{g, e, b, a\} \\ \{\emptyset, \{e\}, \{e, f\}, \{d, e, f\}\} &\leftrightarrow \{g, e, c, a\} \\ \{\emptyset, \{f\}, \{e, f\}, \{d, e, f\}\} &\leftrightarrow \{g, f, c, a\} \end{aligned}$$

例えば $\Phi^d(L, v)$ は, $\Phi(v) = \Psi(v^\eta)$ より,

$$\begin{aligned} \Phi^d(v) &= \frac{1}{4} ((v^\eta(\{d\}) - v^\eta(\emptyset)) \\ &\quad + (v^\eta(\{d, e\}) - v^\eta(\{e\})) \\ &\quad + (v^\eta(\{d, e, f\}) - v^\eta(\{e, f\})) \\ &\quad + (v^\eta(\{d, e, f\}) - v^\eta(\{e, f\}))) \\ &= \frac{1}{4} ((v(d) - v(g)) + (v(b) - v(e))) \\ &\quad + \frac{1}{2} (v(a) - v(c)) \end{aligned}$$

となる。

協力ゲームの拡張概念として提案されている多選択
 肢ゲーム (multichoice game) や双容量 (bi-capacity)
 [18] は束上のゲームとして扱うことができることが知
 られている [8] [11]。

定義20(多選択肢ゲーム[10]) プレイヤー全体の集合
 を N とする. $L_i = \{0, 1, \dots, l_i\}$ を, それぞれのプレ
 イヤー $i \in N$ の実現可能な多選択肢ゲームへの参加
 レベルの集合とし, $L = L_1 \times \dots \times L_n$ とする. また, s
 $= (s_1, \dots, s_n) \in L$ を多選択肢ゲームへの参加プロフ
 ァイルまたは多選択肢提携と呼ぶ. このとき, $l = \{l_1,$
 $\dots, l_n\}$ は最大参加レベルプロファイルと呼ばれ, 通常
 の協力ゲームにおける全体提携に対応する. 逆に $0 =$
 $(0, \dots, 0)$ は空提携に対応する. $v(0) = 0$ を満たす関数
 $v: L \rightarrow \mathbb{R}$ を L 上の特性関数と呼び, (N, L, v) を多
 選択肢ゲーム (multichoice game) と呼ぶ. 特に混乱の
 生じる恐れがない場合, 単に v を (N, L) 上の多選択
 肢ゲームと呼ぶ。

通常のゲーム (N, v) は, 全てのプレイヤー $i \in N$ が
 参加レベルの集合として $L_i = \{0, 1\}$ を持つ多選択肢
 ゲームとみなすことができる。

多選択肢ゲーム (N, L, v) の形式を用いて次のような
 状況を表現することができる。

例21 ある共同プロジェクトがあり, 合計 n 社の企
 業体 $N = \{1, \dots, n\}$ がこのプロジェクトに参加可能で
 ある. それぞれの企業体 $i \in N$ は, このプロジェクト
 に l_i 人までのスタッフの投入が可能である ($L_i = \{0, 1,$
 $\dots, l_i\}$). また, このプロジェクトにおける利得は, n
 社の各投入人数 $(s_1, \dots, s_n) \in L_1 \times \dots \times L_n$ によって決ま
 り, 利得関数 v によって $v(s_1, \dots, s_n)$ とあらわされる。

多選択肢ゲームに関する解概念も, 束から導かれる
 集合系上のゲームを通して導入することができる。

まず, 参加プロファイル全体の集合 $L = L_1 \times \dots \times L_n$
 の上に, 次のような自然な順序 $\leq$, $s = (s_1, \dots, s_n)$,
 $t = (t_1, \dots, t_n) \in L$ に対して

$$s \leq t \Leftrightarrow s_i \leq t_i \quad \forall i \in N,$$

を導入すると, $s, t \in L$ の上限, 下限は

$$s \vee t = (s_1 \vee t_1, \dots, s_n \vee t_n)$$

$$s \wedge t = (s_1 \wedge t_1, \dots, s_n \wedge t_n)$$

のように与えられ, $(L, \leq, \vee, \wedge, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, $\mathbf{1} := (l_1, \dots, l_n)$ は束をなす. よって, 多選択枝ゲーム (N, L, v) は, 束上のゲーム $(L, \leq, \vee, \wedge, \mathbf{0}, v)$ とみなせる. このとき, $\mathcal{J}(L)$ は

$$\mathcal{J}(L) = \{(s_i, \mathbf{0}_{-i}) \mid i \in N, s_i \in L_i\}$$

と表される. ただし, $s_i \in L_i$ と $\mathbf{t} \in L$ に対して,

$$(s_i, \mathbf{t}_{-i}) := (t_1, \dots, t_{i-1}, s_i, t_{i+1}, \dots, t_n)$$

と表記する. また, 明らかに $L = L_1 \times \dots \times L_n$ から導かれる集合系 $(\mathcal{J}(L), \eta(L))$ は正則集合系であるので, (4)式を通して,

$$\Phi^{(s_i, \mathbf{t}_{-i})}(N, L, v) := \Psi^{(s_i, \mathbf{t}_{-i})}(\mathcal{J}(L), \eta(L), v)$$

として多選択枝ゲームに1つの解概念 $\Phi^{(s_i, \mathbf{t}_{-i})}(N, L, v)$ を導くことができる.

多選択枝ゲームの解を考える際には解の意味合いについて若干の注意が必要である. 束 L 上のゲームでは, $\mathcal{J}(L)$ をプレイヤーの集合とみなして議論している. ここで, 多選択枝ゲームを束上のゲームとして見た場合, $\mathcal{J}(L)$ の要素は $(s_i, \mathbf{0}_{-i})$ なる形式で表わされる. つまり, この束上のゲームでのプレイヤーは, 実際のプレイヤー $i \in N$ とそのプレイヤーの参加レベル s_i との組となっている. そして束上でのゲームの解 $\Phi(v)^{(s_i, \mathbf{0}_{-i})}$ は, プレイヤー $i \in N$ の参加レベル s_i と s_{i-1} の, 平均的価値の差を表わしていることになる. また, プレイヤー i 全体の平均的価値は i の全ての選択枝についての解の合計,

$$\sum_{j=1}^{\ell_i} \Phi^{(s_i=j, \mathbf{0}_{-i})}(v)$$

となる.

例22 プレイヤー1, プレイヤー2が参加レベルの集合 $L_1 = \{0, 1, 2\}$, $L_2 = \{0, 1, 2, 3\}$ を持つような2-プレイヤー多選択枝ゲームを考える. このとき, $L = L_1 \times L_2$ には, 図3のような自然な束構造が入り, 束上のゲームとみなすことができる. また, $\mathcal{J}(L) = \{(1, 0), (2, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$ となり, 束 L より導かれる集合系 $(\mathcal{J}(L), \eta(L))$ は正則集合系である(図4). よって, (4)式を用いることにより, この多選択枝ゲームに対して解を与えることができる. そして, 例えば $\Phi^{(0,2)}(v)$ の値はプレイヤー2が参加レベルを1から2に増やしたときの平均的価値を意味する.

図3 2-players game

図4 2-players game

定義23(双容量[18]) $\mathcal{Q}(N) := \{(S, T) \in 2^N \times 2^N \mid S \cap T = \emptyset\}$ 上の関数 v が $v((\emptyset, \emptyset)) = 0$, $v((N, \emptyset)) = 1$, $v((\emptyset, N)) = -1$, かつ $(S_1, T_1) \leq (S_2, T_2)$ ならば $v((S_1, T_1)) \leq v((S_2, T_2))$ を満たすとき, v は双容量と呼ばれる. ただし $S_1 \subseteq S_2$ かつ $T_1 \supseteq T_2$ のとき $(S_1, T_1) \leq (S_2, T_2)$ と定義する. $|\mathcal{Q}(N)| = 3^n$ である.

$\mathcal{Q}(N)$ は束 $(\mathcal{Q}(N), \leq, \vee, \wedge, \top, \perp)$ となる. ただし, 上限, 下限, 最大元, 最小元はそれぞれ,

$$(S_1, T_1) \vee (S_2, T_2) = (S_1 \cup T_1, S_2 \cup T_2),$$

$$(S_1, T_1) \wedge (S_2, T_2) = (S_1 \cap T_1, S_2 \cap T_2),$$

$$\top = (N, \emptyset), \perp = (\emptyset, N)$$

で与えられる.

双容量は各プレイヤーがそれぞれ $\{-1, 0, 1\}$ という3つの選択枝を有する, 多選択枝ゲームの一種と見ることができる. 選択枝の0, 1はそれぞれ提携に参加する, 参加しないを, また-1は負の意味での参加を意味する. 例えば $(-1, 0, 1)$ に(反対, どちらでもない,

賛成), (邪魔をする, 何もしない, 協力する)といった意味付けが可能である. $(S, T) \in \mathcal{Q}(N)$ の S は1を選択したプレイヤーの集合, T は-1を選択したプレイヤーの集合である. $N \setminus (S \cup T)$ は0を選択したプレイヤーの集合である.

双容量は $v(\perp) = v(\emptyset, N) = -1$ であるので, 正確には束上の協力ゲームとは言えない(定義18). しかしながら,

$$v'((S, R)) := v((S, T)) + 1, \quad (S, T) \in \mathcal{Q}(N)$$

とすると $v'(\perp) = 0$ であり, さらに選択肢 $\{-1, 0, 1\}$ を $\{0, 1, 2\}$ と変換すると, v' は多選択ゲームとなるので多選択ゲームに帰着して考えることができる. 束 $\mathcal{Q}(N)$ を集合系に変換すると,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathcal{Q}(N)) = & \{(\{1\}, N \setminus \{1\}), (\emptyset, N \setminus \{1\}), \\ & (\{2\}, N \setminus \{2\}), (\emptyset, N \setminus \{2\}), \\ & \dots, \\ & (\{n\}, N \setminus \{n\}), (\emptyset, N \setminus \{n\})\}, \end{aligned}$$

$|\mathcal{J}(\mathcal{Q}(N))| = 2n$ また $|\mathcal{M}(\mathcal{J}(\mathcal{Q}(N)))| = (2n)!/2^n$ である. $(\mathcal{J}(\mathcal{Q}(N)), \eta(\mathcal{Q}(N)))$ は正則集合系系であるので, (4)式を通して,

$$\begin{aligned} \Phi^i(\mathcal{Q}(N), v) &:= \Psi^i(\mathcal{J}(\mathcal{Q}(N)), \eta(\mathcal{Q}(N)), v'), \\ i &\in \mathcal{J}(\mathcal{Q}(N)) \end{aligned}$$

として双容量に解概念 Φ を導くことができる.

$$\Phi(\{i\}, N \setminus \{i\}) \quad (1)$$

はプレイヤー i が1(選択肢の変換後は2)を選んだときと0(選択肢の変換後は1)を選んだときの平均的価値の差を,

$$\Phi(\emptyset, N \setminus \{i\}) \quad (2)$$

はプレイヤー i が0(選択肢の変換後は1)を選んだときと-1(選択肢の変換後は0)を選んだときの平均的価値の差を意味する.

実は, Ψ は平行移動不変である.

命題24 $(N, \mathfrak{N})$ を正則集合系とし, $(N, \mathfrak{N}, v)$ をゲームとする. このとき $(N, \mathfrak{N}, v')$ を $v'(S) := v(S) + a$, $S \in \mathfrak{N}$, $a \in \mathbb{R}$ と定義すると

$$\Psi(v') = \Psi(v), \quad i = 1, \dots, n.$$

証明

$$\begin{aligned} \Psi^i(v') &= \frac{1}{|\mathcal{M}(\mathfrak{N})|} \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{M}(\mathfrak{N})} [v'(\mathcal{C}_*(i) \cup \{i\}) - v'(\mathcal{C}_*(i))], \\ &= \frac{1}{|\mathcal{M}(\mathfrak{N})|} \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{M}(\mathfrak{N})} [(v'(\mathcal{C}_*(i) \cup \{i\}) - 1) \\ &\quad - (v'(\mathcal{C}_*(i)) - 1)], \\ &= \frac{1}{|\mathcal{M}(\mathfrak{N})|} \sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{M}(\mathfrak{N})} [v(\mathcal{C}_*(i) \cup \{i\}) - v(\mathcal{C}_*(i))], \\ &= \Psi^i(v). \end{aligned}$$

この命題より Ψ の計算のためには v' への変換は特に意味はないことがわかる. また選択肢を $\{0, 1, 2\}$ に変換することもあまり意味がない. そのため, 無理に変換せずに v のままとし, 選択肢も $\{-1, 0, 1\}$ のまま扱った方が, 全てのプレイヤーが0(何もしない)を選択したときの利得が $v(\emptyset, \emptyset) = 0$ となり意味合いがよくわかるであろう. (1)の値はプレイヤー i が1を選んだときの平均的価値, (2)の値はプレイヤー i が-1を選んだときの負の方向への平均的価値を意味する.

全体合理性のみ注意が必要である. v のまま扱う場合には,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{J}(\mathcal{Q}(N))} \Psi^j(v) &= v(\top) - v(\perp) \\ &= v((N, \emptyset)) - v((\emptyset, N)) \end{aligned}$$

の形で全体合理性が成り立つ. v' に変換すると $v(\perp) = v((\emptyset, N)) = 0$ であるので

$$\sum_{j \in \mathcal{J}(\mathcal{Q}(N))} \Psi^j(v) = v(\top) = v((N, \emptyset))$$

となり, 全体合理性が公理1, 公理1' の形で成立する.

例25 $N = \{1, 2, 3\}$ の場合, $|\mathcal{J}(\mathcal{Q}(N))| = (2+2+2)!/(2!2!2!) = 90$ となり, Ψ によって得られる解は, 例えばプレイヤー1が1を選んだ場合の貢献は,

$$\begin{aligned} \Psi^{\{1\}, \{2,3\}}(v) &= \frac{1}{90} \sum_{\substack{(A,B) \\ \in \mathcal{Q}(\{2,3\})}} \{v(\{1\} \cup A, B) - v(A, B)\} \end{aligned}$$

である.

5. まとめ

いくつかの一般的なゲームを集合系上のゲームと見なせることを示し, これらに統一的に適用できる新し

い解概念の提案を行い公理論的特徴付けと適用例を示した。今後は一般化協力ゲームをさらに一般的なゲームへと拡張し様々な文脈における解概念の研究を行うことが課題である。

参 考 文 献

- [1] E. Algaba, Extensión de juegos definidos en sistemas de conjuntos, Ph.D. Thesis, University of Seville, Spain, 1998.
- [2] J.M. Bilbao, Cooperative games on combinatorial structures, Kluwer Academic Publisher, 2000.
- [3] P. Borm, G. Owen, and S. Tijs, On the position value for communication situations, SIAM Journal on Discrete Mathematics, Vol.5, No.3, 305-320, 1992.
- [4] A. Dukhovny, General entropy of general measures, Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge-Based Syst. Vol.10, 213-225, 2002.
- [5] U. Faigle and W. Kern, The Shapley value for cooperative games under precedence constraints, Int. J. of Game Theory, Vol.21, 249-266, 1992.
- [6] D.S. Felsenthal and M. Machover, Ternary voting games, International Journal of Game Theory, Vol.26, No.3, 335-351, 1997.
- [7] M. Grabisch and Ch. Labreuche, Bi-capacities for decision making on bipolar scales, In EUROFUSE Workshop on Informations Systems, Varenna, Italy, September 2002.
- [8] M. Grabisch, Capacities and Games on Lattices : A Survey of Results, Int. J. of Uncertainty, Fuzziness, and Knowledge-Based Systems, Vol 14, No.4, 371-392, 2006.
- [9] G. Hamiache, A value with incomplete communication, Games and Economic Behaviour, Vol.26, 59-78, 1999.
- [10] C.R. Hsiao and T.E.S. Raghavan, Shapley value for multi-choice cooperative games, I, Games and Economic Behaviour, Vol.5, No.2, 240-256, 1993.
- [11] A. Honda and M. Grabisch, Entropy of capacities on lattices. Information Sciences, 176, 3472-3489, 2006.
- [12] A. Honda and M. Grabisch, An axiomatization of entropy of capacities on set systems, European Journal of Operational Research, Vol.190, 526-538, 2008.
- [13] A. Honda and Y. Okazaki, Axiomatization of Shapley value of Faigle and Kern type on set systems, Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, Vol.12 No.5, 2008, 409-415, 2008.
- [14] A. Honda and Y. Okazaki, A new characterization of a value of the generalized game, 九州工業大学情報工学テクニカルレポート, CSSE-32, 2009.
- [15] R. Myerson, Graphs and cooperation in games, Mathematics of Operations Research, Vol.2, No.3, 225-229, 1977.
- [16] L.S. Shapley, A value for n -person games, H.W. Kuhn and A.W. Tucker (eds.), Contributions to the Theory of Games Vol. II, Princeton, 307-317, 1953.
- [17] M. Sugeno, Fuzzy measures and fuzzy integrals: a survey, in M.M. Gupta, G.N. Saridis, and B.R. Gains, editors, Fuzzy automata and decision processes, 89-102, North Holland, Amsterdam, 1977.
- [18] ミシェル・グラビシュ, クリストフ・ラブルーシュ, 室伏俊明, 双極尺度のためのファジィ測度と積分, 知能と情報: 日本知能情報ファジィ学会誌, Vol.16, No.4, 311-318, 2004.

(2009年3月18日 受付)

(2009年7月6日 採録)

[問い合わせ先]

〒820-8502 福岡県飯塚市川津680-4

九州工業大学 情報工学部 システム創成情報工学科

本田 あおい

TEL : 0948-29-7730

FAX : 0948-29-7709

E-mail : aoi@ces.kyutech.ac.jp

著者紹介

ほんだ あおい [正会員]

九州工業大学情報工学部システム創成情報工学科助教。博士(数理学)。非加法的測度論及び非加法的測度を用いた主観的評価問題, ゲーム理論, パナッハ空間の幾何学の研究に従事。日本知能情報ファジィ学会, 日本数学会, 電子情報通信学会会員。日本知能情報ファジィ学会評価問題研究部会代表幹事(2006年～)。

ふじもと かつしげ 藤本 勝成 [正会員]

福島大学共生システム理工学類准教授。博士(理学)。非加法的測度論及び非加法的測度を用いた主観的評価問題, ゲーム理論, 施設の公共性評価, 鋼構造物の画像劣化診断の研究に従事。日本知能情報ファジィ学会, 日本建築学会会員。

A generalization of cooperative games and its solution concept by

Aoi HONDA and Katsushige FUJIMOTO

Abstract :

This paper discusses a generalization of the domain on which ordinary coalitional games are defined to a larger class, and introduces a new solution concept on the class. The generalization possesses some existing games, multi-choice games, bi-capacities and so on, on lattices. Therefore, we can apply the new solution concept to games on lattices.

Keywords : cooperative game, solution of game, multi-choice game, regular set system

Contact Address : Aoi HONDA

Department of systems innovation and informatics, Faculty of Computer Science and Systems Engineering, Kyushu Institute of Technology
680-4, Kawazu, Iizuka city Fukuoka, 820-8502, JAPAN
TEL : 0948-29-7730
FAX : 0948-29-7709
E-mail : aoi@ces.kyutech.ac.jp