原著論文

証拠理論における条件則が満たすべき要件と 新たな条件則†

キマラ ヴィラニー *1・山田 耕一 *2・畦原 宗之 *2

本稿では、証拠理論における条件則が満たすべき要件について検討・提案し、それらの要件を満たす新たな条件則を提案する。さらに、要件の1つを緩めた一般化条件則も提案する。

提案する要件とは、i)条件付基本確率の焦点要素は条件となる集合の部分集合に限られる、ii)条件が空集合でない限り条件付確率は定義される、iii)条件が全体集合である条件付基本確率は条件なしの基本確率に等しい、の3つである。i)は与えられた条件を完全に信頼することを意味し、ii)は証拠理論を頻度に関する不確実性ではなく、人間の信念の度合いを扱う理論とする解釈に起因し、iii)は全体集合が可能なものすべてを含むという事実から得られる。

本稿では上記3つの要件を満たす新たな条件則を提案する。さらに、条件に対する陽な信頼度を導入することによって要件i)を緩め、条件則を一般化する。一般化条件則は、条件の信頼度が1であるとき上記3要件を満たす条件則に一致し、0のときに条件なしの信念に一致する。信頼度が0と1の間の時は両者を線形補間する。

数値例によって主要な既存条件則と比較した結果、上記3要件のすべてを満たす条件則は本提案のみであることがわかる。また、Dempster条件則を始めとする正規化を含む条件則は、事前信念のわずかな違いに対して事後信念が大きく異なるという性質を持つが、本提案の条件則ではその不安定性が改善されている。

キーワード：証拠理論, Dempster-Shafer 理論, 条件則

1. はじめに

不確実性を表す測度を用いて不確実な知識を表現するには、その条件則を定める必要がある。例えば、「 A ならば B 」という知識が不確実性を含むとき、不確実性をモデル化する測度 M の条件則を用いて、その知識の不確実性を $M(B|A)$ のように表す。条件付確率は上述の知識表現の1つとして用いられる。

本稿では、特殊な場合として確率を含む意味で一般的な不確実性表現である証拠理論(またはDempster-Shafer理論)[1]に関し、条件則の満たすべき要件について検討・提案し、その要件を満たす新たな条件則を提案する。

証拠理論の条件則は数多く提案・研究されているが[1-15]、最初の、そして最もよく知られる条件則はDempster条件則である[1]。条件自身が不確実性を

含む場合の確率更新規則としてJeffrey規則[16]が知られているが、それに相当する条件則も提案されている[17]。さらに、事前の信念と条件の定義される全体集合が異なる場合の条件則に関する研究もある[18]。

Dempster条件則は事前信念のわずかな変化で、事後の信念が大きく変化することのある問題点が指摘されている[14,19]。また、事前信念と条件が「完全に矛盾」する場合(条件を B とすると $Pl(B)=0$ の場合)に条件則が未定義になる。これは、Shafer[20]やSmets[11]が主張するように、証拠理論を客観的な頻度の不確実性ではなく、人の信念の度合いとして解釈するのであれば応用上問題になる[21,22]。

Dempster条件則は結合則の特別な場合として得られる。全体集合(または識別フレーム) U 上に2つの信念 $m(\bullet)$ 、 $m'(\bullet)$ が定義され、 $m'(B)=1$ 、 $B \subseteq U$ であるとき、両者をDempster結合則で結合することにより条件 B による事後信念を得る。つまり、Dempster条件則では事前信念 $m(\bullet)$ と条件 B が全く対等に、対称的に扱われている。

本稿では、条件 B を事前信念 $m(\bullet)$ の後に得られる確実に正しい知識、優先的知識と解釈する。両者を非対称な情報と認識した上で、「部分的に矛盾」($X \cap B = \emptyset$ 、 X は $m(\bullet)$ の焦点要素、 $\emptyset$ は空集合)する場合の

† Requirements of Conditioning Rules and a New Conditioning in Evidence Theory

Vilany KIMALA, Koichi YAMADA and Muneyuki UNEHARA

*1 長岡大学 制御・情報工学専攻
Nagaoka University of Technology, Information Science and Control Engineering

*2 長岡大学 経営情報系
Nagaoka University of Technology, Management and Information Systems Science

質量の再割りあてを検討し、新しい条件則を提案する。

以下、第2節では条件則の解釈と満たすべき要件について論じ、第3節では2節の解釈に基づき新しい条件則を提案する。第4節では2節の要件を緩め、一般化した条件則を提案し、さらにその特徴を述べる。第5節では既存の条件則を簡単に紹介する。第6節では、既存条件則と提案則を数値例によって比較し、提案する条件則は2節で述べる要件を満足し、Dempster条件則の持つ問題点を解決出来ることを示す。さらに、一般化した提案条件則の特徴を明らかにする。

本稿では、 A が B の部分集合であること、真部分集合であることを、それぞれ $A \subseteq B$, $A \subset B$ で示す。 $\bar{B}$ は B の補集合である。また、基本確率 $m(\bullet)$ およびそれによって定義される信念測度、妥当性測度を事前信念、条件 B に対する条件付基本確率 $m(\bullet|B)$ およびそれによって定義される信念測度あるいは妥当性測度を事後信念と呼ぶ。

2. 条件則の解釈と満たすべき要件

本稿の議論で必要となる証拠理論の基礎を簡単にまとめ、条件則の解釈と、満たすべき要件について議論する。

2.1 証拠理論

U を有限離散な全体集合とする。証拠理論では、以下の性質を満足する関数 $m: 2^U \rightarrow [0,1]$ を U 上の基本確率(または質量関数)と呼ぶ。

$$m(\emptyset) = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{A \in 2^U} m(A) = 1 \quad (2)$$

ただし、 2^U は U のべき集合である。 $m(A) > 0$ を満たす A は焦点要素と呼ばれる。 $m(A)$ は U を定義域とする変数値が A 内にあると信じる程度だが、 A の部分集合や要素については全く無知で、厳密に A と主張する信念の度合いを表している。

上記の基本確率を用いて信念測度と妥当性測度が、それぞれ次のように定義される。

$$Bel(A) = \sum_{X \subseteq A} m(X) \quad (3)$$

$$Pl(A) = \sum_{X \cap A \neq \emptyset} m(X) \quad (4)$$

$Bel(A)$, $Pl(A)$ はともに定義域を 2^U 、値域を $[0,1]$ とする関数で $Bel(\emptyset) = Pl(\emptyset) = 0$, $Bel(U) = Pl(U) = 1$

である。 $m(\bullet)$, $Bel(\bullet)$, $Pl(\bullet)$ はそれぞれ相互に変換可能な関数である。

2つのそれぞれ独立な情報源から異なる信念 $m_1(\bullet)$, $m_2(\bullet)$ が得られるとき、これらを1つに結合するためのDempster結合則が提案されている。

$$m(A) = \frac{\sum m_1(X) \cdot m_2(Y)}{\sum_{X \cap Y \neq \emptyset} m_1(X) \cdot m_2(Y)} \quad (5)$$

ただし、 $A \neq \emptyset$ 。

また、前述のように $m(\bullet) = m_1(\bullet)$ を事前信念とし、 $m_2(B) = 1$ とすれば、上記の結合によって次のDempster条件則が得られる。

$$m_D(A|B) = \frac{\sum_{A=X \cap B} m(X)}{\sum_{X \cap B \neq \emptyset} m(X)} \quad (6)$$

なお、証拠理論の詳細は[1,23]を参照されたい。

2.2 条件則の解釈と要件

Dempster条件則 $m_D(A|B)$ は、 $X \subseteq U$ に与えられた質量(基本確率)を条件 B との共通部分である $X \cap B$ に割り当て、共通部分がない X の質量を棄却する(以降、本論文では B によって条件則の条件を示す)。証拠構造の観点からは質量の再配置(updating)と解釈されるが[6]、この再配置は、焦点要素 X と条件 B に矛盾(部分的矛盾、 $X \cap B = \emptyset$)がない場合に双方を100%信頼し、矛盾する場合には双方を全く信頼しないという方針に基づく[24]。

文献[5,8,9]で提案された条件則(後述)は、[10,12]では焦点化(focusing)として解釈される。焦点化とは、全体集合内の一部分である B に焦点を当てる(全体集合を B に変更する)という解釈である。また、伊藤らは条件 B を「ある情報源の主張」と解釈する条件則(後述)を提案した[14]。

このように条件則には様々な解釈が存在し得るが、本稿では、多くの応用問題で暗黙に仮定される解釈、具体的には「条件 B を完全に信頼する」あるいは「条件 B を100%正しいと仮定する」を前提とし、この前提に基づく質量再配置による条件則を検討する。

例えば、事前信念 $m(\bullet)$ に対して条件 B が与えられ、焦点要素 X と条件 B に部分的矛盾($X \cap B = \emptyset$)がある場合、Dempster条件則のように X の質量を棄却せず、 B を100%信用して B に X の質量をすべて再配置する。条件 B が100%正しいと仮定した場合の結論を

推測する現実の応用においては、有用な考え方と思われる。

さて、上述のように条件を解釈した上で、条件則が $m(A|B)$ 満たすべき要件を検討する。ただし、 $B=\emptyset$ である。

【要件 1】 $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$ の時、 $m(A|B)=0$ [15]。

条件 B を確実に正しいと考える場合、真の値は B 内にあるからこれは自明の要件である。要件 1 が満たされるとき、明らかに次式が成立する。

$$m(A|B) > 0 \Rightarrow A \subseteq B \quad (7)$$

$$B \subseteq A \Rightarrow Bel(A|B)=1 \quad (8)$$

$$Bel(A|B)=Bel(A \cap B|B) \quad (9)$$

ここで、 $\Rightarrow$ は含意である。

【要件 2】 $B=\emptyset$ の場合を除き、 $m(\bullet|B)$ を未定義としない。

後述のように、多くの条件則では $Pl(B)=0$ あるいは $Bel(B)=0$ の場合に条件則は未定義となる。これは、確率論において $P(B)=0$ のときに $P(A|B)$ が未定義になるのと同様である。

しかし、Shafer[20]やSmets[11]が主張するように、証拠理論を確率のような頻度に基づく不確実性ではなく、人の信念の度合いとして解釈するのであれば、応用上この性質は望ましくない。たとえ信念として $Pl(B)=0$ であっても、事実として事象 B が起きることはあり得る (人は誤った信念を持つ)。その時、 $m(A|B)$ が未定義では実際の応用には耐えない理論になる。

【要件 3】 $m(A|U)=m(A)$ 。

条件 U は U 内の要素のいずれかが真という意味であるから、条件に全体集合を与えるのに意味はないという考えは妥当であろう。

3. 提案条件則

前節で述べた 3 つの要件を満たす条件則を提案する。なお、Dempster 条件則が要件 1 と 3 を満たすのは容易に証明される。しかし要件 2 は満たさない。

提案する条件則では、条件 B が与えられたとき次のように質量再配置を行う。

(a) 焦点要素 X と条件 B が (部分的に) 矛盾しない場合には、焦点要素 X に条件による制約 B を課し、 $X \cap B$ に質量 $m(X)$ を再配置する。

(b) X と B が (部分的に) 矛盾する場合には、質量 $m(X)$ をいったん U に割り当てる。その上で条件 B による制約を課して、 $U \cap B=B$ に質量 $m(X)$ を再配置する。

本提案では条件 B が完全に正しいとする。そのため、(b) において X と B が矛盾する場合、 X に与え

られた質量を誤りと見なし、完全な無知を意味する U に質量 $m(X)$ をいったん割りあてる。その後の条件 B による制約は、(a) と同様である。

上述の再配置によって得られる事後信念が前節の 3 要件を満たすことは後述の定理 1 で示されるが、直観的には次のように説明される。

(a)、(b) の双方において B は事後信念の焦点要素に対する制約として働き、これによって要件 1 が満たされる。また、 $B=U$ の場合は常に (a) が適用されるが、 $X \cap U=X$ であるから、質量 $m(X)$ は事後信念でも X に再配置されるため、要件 3 が満たされる。

Dempster 条件則が要件 2 を満たさないのは、事前信念と条件が完全に矛盾する場合に (6) 式の分母が 0 になるからである。上述の再配置では、完全矛盾の場合には条件 B にすべての質量が割りあてられ、未定義にはならず要件 2 が満たされる。

上記 (a)、(b) に基づき質量を再配置して得られる事後信念を $m_K(A|B)$ で表すと、以下の式で得られる。

$$m_K(A|B) = \begin{cases} \sum_{A=X \cap B} m(X), & \text{if } A \neq \emptyset, A \subset B, \\ \sum_{B \subseteq X} m(X) + \sum_{X \cap B = \emptyset} m(X), & \text{if } A = B, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (10)$$

ただし、 $B \neq \emptyset$ 。

$A \subset B$ 、 $A=\emptyset$ の時は、 $A=X \cap B$ となる全ての焦点要素 X について $m(X)$ の和を取る。これは上述の (a) の再配置によるものである。また、 $A=B \neq \emptyset$ の場合は $B=X \cap B$ 、つまり $B \subseteq X$ である $m(X)$ と $X \cap B=\emptyset$ である $m(X)$ の和を取る。これは、上述の (a) と (b) の両方の再配置により与えられる。

なお、 $m_K(\emptyset|B)=0$ は明らか。また、すべての $A \subseteq U$ について $m_K(A|B)$ の和を取ると、すべての X について $m(X)$ の和を取ることにになり、1 になるのも明らかである。

以下に示すように $m_K(A|B)$ は、2 節で議論した 3 つの要件を満足する。

【定理 1】 $m_K(A|B)$ は 2 節で述べた 3 つの要件のすべてを満足する。

証明：(要件 1) (10) 式より $A \not\subset B$ 、 $A \neq B$ である A に対して $m_K(A|B)=0$ であるのは明らか。また、 $A \cap \bar{B} \neq \emptyset \Leftrightarrow A \not\subset B$ 、 $A \neq B$ であるから要件 1 は満たされる。(要件 2) $B \neq \emptyset$ であれば、(10) 式が任意の A に対して 0 以上、1 以下の値を与えるのは明らか。(要件 3) (10) 式の B を U に置き換えると、 $X \neq \emptyset$ である X に対して $X \cap U=X \neq \emptyset$ 。したがって、明らかに $m_K(A|U)=m(A)$ となる。(証明終)

また, Dempster条件則との間に次の定理が成立する。

【定理2】Dempster条件則による条件付信念測度, 妥当性測度をそれぞれ $Bel_D(A|B)$, $Pl_D(A|B)$ とし, 提案則によるものを $Bel_K(A|B)$, $Pl_K(A|B)$, とすると以下が成立する。

$$Pl_K(A|B) \geq Pl_D(A|B) \geq Bel_D(A|B) \geq Bel_K(A|B) \quad (11)$$

証明: (i) $A = \emptyset$ の時, $Bel_K(A|B) = Bel_D(A|B) = 0$.

(ii) $A = B \neq \emptyset$ の時, $Bel_K(A|B) = Bel_D(A|B) = 1$.

(iii) $A \subset B$, $A \neq \emptyset$ の時,

$$m_K(A|B) = \sum_{A=X \cap B} m(X) \leq \frac{\sum_{A=X \cap B} m(X)}{\sum_{X \cap B \neq \emptyset} m(X)} = m_D(A|B)$$

よって明らかに $Bel_K(A|B) \leq Bel_D(A|B)$.

(iv) $A \not\subset B$, $A \neq B$ の時, $Bel_K(A|B) = Bel_K(A \cap B|B) \leq Bel_D(A \cap B|B) = Bel_D(A|B)$.

以上, (i)-(iv) より $Bel_K(A|B) \leq Bel_D(A|B)$ が成立する。また, $Pl_K(A|B) = 1 - Bel_K(\bar{A}|B) \geq 1 - Bel_D(\bar{A}|B) = Pl_D(A|B)$ であるから, 定理は成立する。(証明終)

4. 条件則の一般化

2節で議論した3要件は条件 B を完全に信頼することを前提としたが, 本節では条件 B に信頼度 λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) を導入し, 前節の条件則を一般化する。 $\lambda = 1$ のとき前節までと同様に条件 B は確実に正しいとし, $\lambda < 1$ のとき条件 B は確実に正しいと言えない。具体的には, $\lambda < 1$ のとき要件1は必ずしも満たされないとする。つまり, $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$ である A, B に対して $m(A|B) > 0$ となることがある。ただし, 要件2と要件3は満たされるものとする。

条件 B が信頼度 λ で信頼できるとき, 質量の更新は前節の (a), (b) を拡張する形で, 次のように行う。

(a') $X \cap B \neq \emptyset$ の場合, 質量 $m(X)$ のうち B を信頼できる割合 ($\lambda m(X)$) だけを $X \cap B$ に再配置する。残り $((1-\lambda)m(X))$ は, 条件を U と見なし (= 条件がないものと見なし) $X \cap U = X$ に再配置する。

(b') $X \cap B = \emptyset$ のとき, 質量 $m(X)$ をいったん U (完全な無知) に割りあて, その上で条件 B を信頼できる割合 ($\lambda m(X)$) だけ $U \cap B = B$ に再配置する。残り $((1-\lambda)m(X))$ は条件がないものと見なし $X \cap U = X$ に再配置する。

上記手続きにおいて, $\lambda m(X)$ の再配置先は前節の (a), (b) における $m(X)$ の再配置先と同じである。条件 B に対する信頼度が λ である分だけ, 再配置する

質量が減らされている。残りの質量 $(1-\lambda)m(X)$ の再配置先は, 条件 B が信頼できないため, 条件が存在しないものとして考える。つまり, 条件が U であるとして再配置を行う。

上記再配置によって得られる事後信念が要件2と3を満たすことは後述の定理3で示されるが, 直観的には次のように説明される。

条件が $B=U$ のとき (a') によって再配置が行われるが, $\lambda m(X)$ も $(1-\lambda)m(X)$ も再配置先は $X \cap U = X$ である。したがって, $m(X)$ は事後信念でも X に再配置され, 要件3が満たされる。また, 条件と事前信念が完全に矛盾する場合, $\lambda m(X)$ は B へ, $(1-\lambda)m(X)$ は X へ再配置されるため未定義になることはなく, 要件2も満たされる。

(a'), (b') の再配置を整理すると次のようになる。

(1) $X \cap B \neq \emptyset$, $X \not\subset B$, $X \neq B$ のとき,

(i) $\lambda m(X)$ を $X \cap B$ に再配置。

(ii) $(1-\lambda)m(X)$ を X に再配置。

(2) $X \not\subset B$ のとき,

(iii) $\lambda m(X)$ を $X = X \cap B$ に再配置。

(iv) $(1-\lambda)m(X)$ を X に再配置。

(3) $X \cap B = \emptyset$ のとき,

(v) $\lambda m(X)$ を B に再配置。

(vi) $(1-\lambda)m(X)$ を X に再配置。

以上を式にすると, 次が得られる。

$$m_\lambda(A|B) = \begin{cases} \underbrace{\sum_{A=X \cap B} \lambda m(X)}_{(i) \text{ and } (iii)} + \underbrace{(1-\lambda)m(A)}_{(iv)}, & \text{if } B \supset A \neq \emptyset, \\ \underbrace{\sum_{A=B \subset X} \lambda m(X)}_{(i) \text{ and } (iii)} + \underbrace{(1-\lambda)m(B)}_{(iv)} + \underbrace{\sum_{X \cap B = \emptyset} \lambda m(X)}_{(v)}, & \text{if } A = B, \\ \underbrace{(1-\lambda)m(A)}_{(ii) \text{ or } (vi)}, & \text{if } A \not\subset B, A \neq B, A \neq \emptyset \\ 0, & \text{if } A = \emptyset. \end{cases} \quad (12)$$

ただし, $B \neq \emptyset$ 。

上式は次のように説明される。

$B \supset A \neq \emptyset$ の場合, ((i) & (iii)) $A = X \cap B$ となるようなすべての X について $\lambda m(X)$ を足し合わせ, (iv) さらに $(1-\lambda)m(A)$ を足したものが $m_K(A|B)$ となる。 $A = B \neq \emptyset$ の場合は, ((i) & (iii)) $A = B \subseteq E$ (この場合 $A = X \cap B$ と同値) を満たす X について $\lambda m(X)$ を足し合わせ, (iv) $(1-\lambda)m(B)$ を足し, (v) さらに $X \cap B = \emptyset$ を満たす X について $\lambda m(X)$ を足したものが $m_K(A|B)$ となる。また, $A \not\subset B$, $A \neq B$, $A \neq \emptyset$ の場合には, ((ii) or (vi)) $(1-\lambda)m(A)$ が $m_K(A|B)$ となる。

なお, $\lambda = 1$ のとき $m_\lambda(A|B) = m_K(A|B)$, $\lambda = 0$ のとき

$m_\lambda(A|B)=m(A)$ となること、およびすべての A に対して和を取ると 1 になることは容易に示される。また、要件 1 は満たさないが、以下のように要件 2 と要件 3 は満足される。

【定理 3】 $m_\lambda(A|B)$ は 2 節で述べた要件 2 と要件 3 を満足する。

証明：(要件 2) (12) 式で与えられる $m_\lambda(A|B)$ が、 $B \neq \emptyset$ であるときに必ず $[0,1]$ 間のいずれかの値を持つのは明らか。(要件 3) $B=U$ であるとき、(12) 式は以下のようになり、満たされる。

$$m_\lambda(A|U) = \begin{cases} \underbrace{\sum_{A=X} \lambda m(X)}_{(i) \text{ and } (iii)} + \underbrace{(1-\lambda)m(A)}_{(iv)}, & \text{if } U \supset A \neq \emptyset, \\ \underbrace{\sum_{A=U \subset X} \lambda m(X)}_{(i) \text{ and } (iii)} + \underbrace{(1-\lambda)m(U)}_{(iv)} + \underbrace{\sum_{X \cap U = \emptyset} \lambda m(X)}_{(v)}, & \text{if } A = U \neq \emptyset, \\ \underbrace{(1-\lambda)m(A)}_{(ii) \text{ or } (vi)}, & \text{if } A \not\subset U, A \neq U, A \neq \emptyset \\ 0, & \text{if } A = \emptyset. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lambda m(A) + (1-\lambda)m(A), & \text{if } U \supset A \neq \emptyset, \\ \lambda m(U) + (1-\lambda)m(U), & \text{if } A = U \neq \emptyset, \\ 0, & \text{if } A = \emptyset. \end{cases}$$

$$= m(A)$$

(証明終)

5. 既存の条件則

次節で比較するため、既存の条件則を簡単に紹介する。なお、以下ではすべて $B \neq \emptyset$ とする。

5.1 主な既存条件則

ここでは、比較的単純な式によって定義される主な既存提案の条件則を概観する。

(1) Dempster 条件則

Dempster 条件則の基本確率表現は (6) 式で与えられる。信念測度、妥当性測度ではそれぞれ次のように表現される。

$$Bel_D(A|B) = \frac{Bel(A \cup \bar{B}) - Bel(\bar{B})}{1 - Bel(\bar{B})} \quad (13a)$$

$$Pl_D(A|B) = \frac{Pl(A \cap B)}{Pl(B)} \quad (13b)$$

式から $Pl(B)=0$ の場合は未定義であることがわかる。また、Dempster 条件則は不確実性の区間 $[Bel(A|B), Pl(B|B)]$ が狭くなりすぎ、情報過多との批判もある [5,6]。

(2) 焦点化条件則

複数の研究者により独立に提案された条件則である [5,8,9]。

$$Bel_F(A|B) = \frac{Bel(A \cap B)}{Bel(A \cap B) + Pl(\bar{A} \cap B)} \quad (14a)$$

$$Pl_F(A|B) = \frac{Pl(A \cap B)}{Pl(A \cap B) + Bel(\bar{A} \cap B)} \quad (14b)$$

文献 [10,12] はこの条件則を全体集合内の一部分 (B) に焦点を当てた場合の信念と解釈し、Dempster 条件則を始めとする信念更新 (updating) とは異なるとする。[15] は焦点化条件則の基本確率表現について論じている。

(3) Zhang の条件則

Dempster 条件則では、 $A=X \cap B$ である焦点要素 X の質量 $m(X)$ のすべてが、 $Bel_D(A|B)$ の中に含まれる。Zhang はこれを過激であるとし、 $X \cap B$ が X に占める割合だけ含まれる以下の条件則を提案した [13]。

$$m_Z(A|B) = k \sum_{A=X \cap B} \frac{|X \cap B|}{|X|} m(X) \quad (15)$$

ただし、 k は正規化定数で、 $|\bullet|$ は集合の濃度である。

(4) 幾何的 condition 則

Dempster 条件則の信念測度と妥当性測度の式の形を入れ替えた条件則である [2,7]。

$$Bel_G(A|B) = \frac{Bel(A \cap B)}{Bel(B)} \quad (16a)$$

$$Pl_G(A|B) = \frac{Pl(A \cup \bar{B}) - Pl(\bar{B})}{1 - Pl(\bar{B})} \quad (16b)$$

基本確率表現は次式で与えられる。

$$m_G(A|B) = \begin{cases} \frac{m(A)}{\sum_{X \subseteq B} m(X)}, & \text{if } A \subseteq B, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (16c)$$

上式より、条件 B に含まれない焦点要素をすべて棄却し、残った焦点要素の基本確率を正規化したものと解釈できる。その意味で強い条件則であるが、 $Bel(B)=0$ の場合に未定義になる。

(5) Planchet の条件則

Planchet は次のような弱い条件則を提案した [4]。

$$Bel_P(A|B) = \frac{Bel(A) - Bel(A \cap \bar{B})}{Pl(B)} \quad (17a)$$

$$Pl_P(A|B) = \frac{Pl(A) + Pl(B) - Pl(A \cup B)}{Pl(B)} \quad (17b)$$

基本確率表現は次式で与えられる.

$$m_P(A|B) = \begin{cases} \frac{m(A)}{\sum_{X \cap B \neq \emptyset} m(X)}, & \text{if } A \cap B \neq \emptyset, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (17c)$$

基本確率表現を見ると, 幾何的条件則の強い制約を緩めたものと解釈できる. ただし, $A \subseteq B$ ではない A に対して $m_P(A|B) > 0$ となることや, $Bel(B|B) < 1$ となることがあり得る.

(6) 伊藤・稲垣の条件則

文献[14]は, 条件 B を事実による制約としてではなく, ある情報源の主張として解釈し, 以下の条件則を提案した.

(a) $Bel(\bar{B}) < 1$ の場合,

$$Bel_I(A|B) = \begin{cases} \{1 + k_B Bel(\bar{B})\} \{Bel(A \cup \bar{B}) - Bel(\bar{B})\}, & \text{if } A \neq U, \\ 1, & \text{if } A = U. \end{cases} \quad (18a)$$

ただし, k_B は $0 \leq k_B \leq 1/(1 - Bel(\bar{B}))$ を満足する定数.

(b) $Bel(\bar{B}) = 1$ の場合,

$$Bel_I(A|B) = \begin{cases} 1, & \text{if } A = U, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (18b)$$

この条件則は, 条件 B を確実なものと思わないため, Planchet条件測度同様, 一般に $Bel(B|B) \leq 1$ である. また, $k_B = 1/(1 - Bel(\bar{B}))$ においてDempster条件則と等しくなる.

ここに挙げた6つの条件則の他に, Bel を下限, Pl を上限とする確率測度の集合があるとし, 条件付確率をショケ積分することによって条件則を求める方法[6], 事前信念と焦点化条件則を線形結合する方法[15]も提案されている. また, 条件自身が基本確率で与えられる場合の条件則[17], 事前信念と条件の定義域が異なる場合の条件則研究もある[18].

5.2 結合則利用による条件則

Dempster条件則は, 条件 B を事前信念とは独立な別の信念($m'(B) = 1$)と考え, 結合則を適用することで得られる. そこで, 他の結合則を用いて同様の方法で条件則を求め, 次節の数値例比較に用いる. 4種類の結合則には, Yager結合則[25], DuboisらとHauらの結合則[26,27], 単純平均結合則[24,28], 集合和結

合則[26]の4種類を用いる. これらは, Dempster結合則の正規化によって生じる問題点[29](6.4節参照)を解決するために提案された結合則である.

(1) Yager結合則による条件則

Yager結合則は次式で与えられる[25].

$$m_Y(A) = \begin{cases} \sum_{A=X \cap Y} m_1(X) \bullet m_2(Y), & \text{if } A \neq U, \\ \sum_{(X \cap Y = U) \vee (X \cap Y = \emptyset)} m_1(X) \bullet m_2(Y), & \text{if } A = U. \end{cases} \quad (19)$$

ただし, $\vee$ は論理和である.

Dempster条件則を得た場合と同様に, $m(\bullet) = m_1(\bullet)$ を事前信念, $m_2(B) = 1$ を条件として結合すると, 次式が得られる.

$$m_Y(A|B) = \begin{cases} \sum_{A=X \cap B} m(X), & \text{if } A \neq U, \\ \sum_{(X \cap B = U) \vee (X \cap B = \emptyset)} m(X), & \text{if } A = U. \end{cases} \quad (20)$$

(2) DPHK結合則による条件則

Duboisら[26]とHauら[27]は次式による結合則を提案した.

$$m_H(A) = \sum_{(A=X \cap Y) \vee (X \cap Y = \emptyset \wedge X \cup Y = A)} m_1(X) \bullet m_2(Y) \quad (21)$$

ただし, $\wedge$ は論理積である.

この結合則を用いると条件則は次のようになる.

$$m_H(A|B) = \sum_{(A=X \cap B) \vee (X \cap B = \emptyset \wedge X \cup B = A)} m(X) \quad (22)$$

(3) 単純平均結合則による条件則

単純平均結合則[24,28]は次式で得られる.

$$m_A(A) = \frac{1}{2} \{m_1(A) + m_2(A)\} \quad (23)$$

この結合則を用いると条件則は次のようになる.

$$m_A(A|B) = \begin{cases} \frac{1}{2} m(A), & \text{if } A \neq B, \\ \frac{1}{2} \{m(A) + 1\}, & \text{if } A = B. \end{cases} \quad (24)$$

(4) 集合和結合則による条件則

集合和による結合則は次式で得られる[26].

$$m_U(A) = \sum_{A=X \cup Y} m_1(X) \bullet m_2(Y) \quad (25)$$

この結合則を用いると条件則は次のようになる.

$$m_U(A|B) = \sum_{A=X \cup B} m(X) \quad (26)$$

6. 数値例による比較と考察

6.1 数値例

前節に示した既存条件則と提案条件則の数値例を示し、比較する。伊藤・稲垣の条件則については $k_B = 1/2 \{1 - Bel(\bar{B})\}$ とした数値を例として示す。

【例題1】全体集合を $U = \{a, b, c\}$ 、事前信念を $m(\{a\}) = 0.9$ 、 $m(\{a, b\}) = 0.1$ とする。条件 $B = \{b\}$ 、 $B = \{c\}$ あるいは $B = \{a, b, c\}$ が与えられた時の事後信念を、それぞれ表1、2、3に示す。

【例題2】 $U = \{a, b, c, d\}$ 、 $B = \{b, c\}$ とする。事前信念が、 $m(\{a, b\}) = 0.01$ 、 $m(\{a, d\}) = 0.99$ のときの事後の信念を表4に示す。また、事前信念を $m(\{a, b\}) = 0.01$ 、 $m(\{a, d\}) = 0.98$ 、 $m(\{c, d\}) = 0.01$ とした時の結果を表5に示す。

表1 既存研究との比較-例1 $B = \{b\}$

	事後信念
Dempster	$m_{\pi}(\{b\} B) = 1.0$
Focusing	Undefined
Zhang	$m_Z(\{b\} B) = 1.0$
Geometric	Undefined
Planchet	$m_P(\{a, b\} B) = 1.0$
Ito&Inagaki	$m_I(\{b\} B) = 0.55$, $m_I(\{a, b, c\} B) = 0.45$
Yager	$m_Y(\{b\} B) = 0.1$, $m_Y(\{a, b, c\} B) = 0.9$
DPHK	$m_H(\{b\} B) = 0.1$, $m_H(\{a, b\} B) = 0.9$
Simple average	$m_A(\{a\} B) = 0.45$, $m_A(\{b\} B) = 0.5$, $m_A(\{a, b\} B) = 0.05$
Union	$m_U(\{a, b\} B) = 1.0$
Proposed $\lambda = 1.0$	$m_{\lambda}(\{b\} B) = 1.0$
Proposed $\lambda = 0.8$	$m_{0.8}(\{a\} B) = 0.18$, $m_{0.8}(\{b\} B) = 0.8$, $m_{0.8}(\{a, b\} B) = 0.02$
Proposed $\lambda = 0.5$	$m_{0.5}(\{a\} B) = 0.45$, $m_{0.5}(\{b\} B) = 0.5$, $m_{0.5}(\{a, b\} B) = 0.05$
Proposed $\lambda = 0.2$	$m_{0.2}(\{a\} B) = 0.72$, $m_{0.2}(\{b\} B) = 0.2$, $m_{0.2}(\{a, b\} B) = 0.08$

表2 既存研究との比較-例1 $B = \{c\}$

	事後信念
Dempster	Undefined
Focusing	Undefined
Zhang	Undefined
Geometric	Undefined
Planchet	Undefined
Ito&Inagaki	$m_I(\{a, b, c\} B) = 1.0$
Yager	$m_Y(\{a, b, c\} B) = 1.0$
DPHK	$m_H(\{a, c\} B) = 0.9$, $m_H(\{a, b, c\} B) = 0.1$
Simple average	$m_A(\{a\} B) = 0.45$, $m_A(\{c\} B) = 0.5$, $m_A(\{a, b\} B) = 0.05$
Union	$m_U(\{a, c\} B) = 0.9$, $m_U(\{a, b, c\} B) = 0.1$
Proposed $\lambda = 1.0$	$m_{\lambda}(\{c\} B) = 1.0$
Proposed $\lambda = 0.8$	$m_{0.8}(\{a\} B) = 0.18$, $m_{0.8}(\{c\} B) = 0.8$, $m_{0.8}(\{a, b\} B) = 0.02$
Proposed $\lambda = 0.5$	$m_{0.5}(\{a\} B) = 0.45$, $m_{0.5}(\{c\} B) = 0.5$, $m_{0.5}(\{a, b\} B) = 0.05$
Proposed $\lambda = 0.2$	$m_{0.2}(\{a\} B) = 0.72$, $m_{0.2}(\{c\} B) = 0.2$, $m_{0.2}(\{a, b\} B) = 0.08$

表3 既存研究との比較-例1 $B = \{a, b, c\}$

	事後信念
Dempster	$m_{\pi}(\{a\} B) = 0.9$, $m_{\pi}(\{a, b\} B) = 0.1$
Focusing	$m_F(\{a\} B) = 0.9$, $m_F(\{a, b\} B) = 0.1$
Zhang	$m_Z(\{a\} B) = 0.9$, $m_Z(\{a, b\} B) = 0.1$
Geometric	$m_G(\{a\} B) = 0.9$, $m_G(\{a, b\} B) = 0.1$
Planchet	$m_P(\{a\} B) = 0.9$, $m_P(\{a, b\} B) = 0.1$
Ito&Inagaki	$m_I(\{a\} B) = 0.9$, $m_I(\{a, b\} B) = 0.1$
Yager	$m_Y(\{a\} B) = 0.9$, $m_Y(\{a, b\} B) = 0.1$
DPHK	$m_H(\{a\} B) = 0.9$, $m_H(\{a, b\} B) = 0.1$
Simple average	$m_A(\{a\} B) = 0.45$, $m_A(\{c\} B) = 0.05$, $m_A(\{a, b\} B) = 0.5$
Union	$m_U(\{a, b, c\} B) = 1.0$
Proposed $\lambda = 1.0$	$m_{\lambda}(\{a\} B) = 0.9$, $m_{\lambda}(\{a, b\} B) = 0.1$
Proposed $\lambda = 0.8$	$m_{0.8}(\{a\} B) = 0.9$, $m_{0.8}(\{a, b\} B) = 0.1$
Proposed $\lambda = 0.5$	$m_{0.5}(\{a\} B) = 0.9$, $m_{0.5}(\{a, b\} B) = 0.1$
Proposed $\lambda = 0.2$	$m_{0.2}(\{a\} B) = 0.9$, $m_{0.2}(\{a, b\} B) = 0.1$

表4 既存研究との比較-例2
 $m(\{a, b\}) = 0.01$ 、 $m(\{a, d\}) = 0.99$

	事後信念
Dempster	$m_{\pi}(\{b\} B) = 1.0$
Focusing	Undefined
Zhang	$m_Z(\{b\} B) = 1.0$
Geometric	Undefined
Planchet	$m_P(\{a, b\} B) = 1.0$
Ito&Inagaki	$m_I(\{b\} B) = 0.505$, $m_I(U B) = 0.495$
Yager	$m_Y(\{b\} B) = 0.01$, $m_Y(U B) = 0.99$
DPHK	$m_H(\{b\} B) = 0.01$, $m_H(U B) = 0.99$
Simple average	$m_A(\{a, b\} B) = 0.005$, $m_A(\{a, d\} B) = 0.495$, $m_A(\{b, c\} B) = 0.5$
Union	$m_U(\{a, b, c\} B) = 0.01$, $m_U(U B) = 0.99$
Proposed $\lambda = 1.0$	$m_{\lambda}(\{b\} B) = 0.01$, $m_{\lambda}(\{b, c\} B) = 0.99$
Proposed $\lambda = 0.8$	$m_{0.8}(\{b\} B) = 0.008$, $m_{0.8}(\{a, b\} B) = 0.002$, $m_{0.8}(\{a, d\} B) = 0.198$, $m_{0.8}(\{b, c\} B) = 0.792$
Proposed $\lambda = 0.5$	$m_{0.5}(\{b\} B) = 0.005$, $m_{0.5}(\{a, b\} B) = 0.005$, $m_{0.5}(\{a, d\} B) = 0.495$, $m_{0.5}(\{b, c\} B) = 0.495$
Proposed $\lambda = 0.2$	$m_{0.2}(\{b\} B) = 0.002$, $m_{0.2}(\{a, b\} B) = 0.008$, $m_{0.2}(\{a, d\} B) = 0.792$, $m_{0.2}(\{b, c\} B) = 0.198$

表5 既存研究との比較-例2

$$m(\{a, b\})=0.01, m(\{a, d\})=0.98, m(\{c, d\})=0.01$$

	事後信念
Dempster	$m_p(\{b\} B) = 0.5, m_p(\{c\} B) = 0.5$
Focusing	Undefined
Zhang	$m_z(\{b\} B) = 0.5, m_z(\{c\} B) = 0.5$
Geometric	Undefined
Planchet	$m_p(\{a, b\} B) = 0.5, m_p(\{c, d\} B) = 0.5$
Ito&Inagaki	$m_i(\{b\} B) = 0.255, m_i(\{c\} B) = 0.255, m_i(U B) = 0.49$
Yager	$m_y(\{b\} B) = 0.01, m_y(\{c\} B) = 0.01, m_y(U B) = 0.98$
DPHK	$m_{dp}(\{b\} B) = 0.01, m_{dp}(\{c\} B) = 0.01, m_{dp}(U B) = 0.98$
Simple average	$m_s(\{a, b\} B) = 0.005, m_s(\{c, d\} B) = 0.005,$ $m_s(\{a, d\} B) = 0.49, m_s(\{b, c\} B) = 0.5, m_s(\{b, c\} B) = 0.5$
Union	$m_u(\{a, b, c\} B) = 0.01, m_u(\{b, c, d\} B) = 0.01, m_u(U B) = 0.98$
Proposed $\lambda = 1.0$	$m_{\lambda}(\{b\} B) = 0.01, m_{\lambda}(\{c\} B) = 0.01, m_{\lambda}(\{b, c\} B) = 0.98$
Proposed $\lambda = 0.8$	$m_{0.8}(\{b\} B) = 0.008, m_{0.8}(\{c\} B) = 0.008,$ $m_{0.8}(\{b, c\} B) = 0.784, m_{0.8}(\{a, b\} B) = 0.002,$ $m_{0.8}(\{a, d\} B) = 0.196, m_{0.8}(\{c, d\} B) = 0.002$
Proposed $\lambda = 0.5$	$m_{0.5}(\{b\} B) = 0.005, m_{0.5}(\{c\} B) = 0.005,$ $m_{0.5}(\{b, c\} B) = 0.49, m_{0.5}(\{a, b\} B) = 0.005,$ $m_{0.5}(\{a, d\} B) = 0.49, m_{0.5}(\{c, d\} B) = 0.005$
Proposed $\lambda = 0.2$	$m_{0.2}(\{b\} B) = 0.002, m_{0.2}(\{c\} B) = 0.002,$ $m_{0.2}(\{b, c\} B) = 0.196, m_{0.2}(\{a, b\} B) = 0.008,$ $m_{0.2}(\{a, d\} B) = 0.784, m_{0.2}(\{c, d\} B) = 0.008$

6.2 3要件に関する考察

表1をみると、Dempster, Zhang, 提案則($\lambda=1$)は要件1を満たしているが、Planchet, 伊藤・稲垣の条件則は満たさない。また、Yager, DPHK, 単純平均, 集合和による条件則も満たさない。提案則も $\lambda < 1$ の場合は満たさない。要件2については、表1, 2よりDempster, 焦点化, Zhang, 幾何的, Planchetが満たさない。さらに、表3より単純平均と集合和の条件則が要件3を満たさないことが分かる。これらの表だけ見ても、3つの要件のすべてを満たしたのは、提案則($\lambda=1$)だけであることが分かる。

一般に、Planchetと伊藤・稲垣を除く既存の条件則(Dempster, 焦点化, Zhang, 幾何的)はすべて要件1を満たすが要件2を満たさない(Planchetは両方を満たさず、伊藤・稲垣は要件1を満たさず、要件2を満たす)。これらの既存の条件則が要件1を満たすのは条件Bを完全に信頼するからであり、要件2を満たさないのは、もう一方の情報である事前信念をも完全に信頼し、両者が「完全に矛盾」する場合に対処できないからである。

一方、条件Bを独立な信念と解釈し、結合則を利用する方法は、Dempster条件則を除き、すべて(Yager,

DPHK, 単純平均, 集合和)が要件1を満たさず、要件2を満たす。これらが要件2を満たすのは、Dempster結合則の正規化が引き起こす問題を解決するために、基本確率の棄却と正規化を一切行っていないからである。2つの基本確率の焦点要素が「部分的に矛盾」する場合に、基本確率の棄却と正規化を行うと、「全面的に矛盾」する場合にはすべてを棄却することになり、結果として未定義になる。

しかし、これらの結合則は結合する2つの信念に対する完全な信頼を放棄することで問題点を解決した。例えば、Yager結合則は2つの焦点要素が部分的に矛盾する場合に、双方の質量の積を全体集合(完全な無知)に与える。DPHK結合則は少なくともどちらか一方のみが正しいと仮定して、2つの焦点要素の和集合に質量の積を与える。その操作は条件Bを信頼しないことを意味し、要件1が満たされなくなる。

それに対し、提案則($\lambda=1$)は、事前信念と条件Bが(部分的に)矛盾しない場合には双方を完全に信頼し、矛盾する場合には事前信念の情報を棄却し、条件Bのみを信頼する。つまり、いかなる場合でも条件Bを完全に信頼することによって、要件1と要件2の両方を満たしている。

6.3 条件を完全に信頼しない場合の考察

Planchet, 伊藤・稲垣, Yager, DPHK, 単純平均, 集合和の各条件則が要件1を満足しないのは、条件に完全な信頼を置かないからであるが、この場合 $A \subseteq B$ ではないAに対して $m(A|B) > 0$ になることがあり、その結果 $Bel(B|B) < 1$ となり得る。

提案則は、 $\lambda < 1$ の場合、要件1を満たさず要件2を満足するという点で、Planchetを除くこれらの条件則と同様であるが、以下に述べる特徴を持つ。

- (1) 条件Bに陽なる信頼度を導入している。この信頼度は、事前信念とは独立に与えられるもう一つの信念(具体的には $m'(B)$)ではなく、条件Bという情報そのものに対する信頼度である。
- (2) $\lambda=0$ は条件Bがないのと同等と考えられるが、この場合の事後信念は事前信念に一致する。
- (3) 数値例からも分かるように、 $m_{\lambda}(A|B)$ は λ によって $m(A)$ と $m_K(A|B)$ の間を線形補間する。

6.4 事前信念の変化に対する不安定性

Dempster結合則は、結合する証拠の双方で非常に小さな質量しか持たない焦点要素に、結合後、すべての質量に与えてしまうことがある[29]。Dempster条件則は、この結合則に基づいたものであるため、事前信念のわずかな変化によって事後の信念が大きく変化

することがある[14].

例えば, 表4と表5において, 事前信念はわずかに違うだけだが, Dempster条件則を適用した結果は大きく異なる. この不安定性は, 部分的に矛盾する焦点要素の質量の棄却と正規化を行うZhangやPlanchetの条件則でも同じである. この不安定性が十分解決されている条件則はDempster結合則の問題点を解決しようとした結合則に基づく条件則(Yager, DPHK, 単純平均, 集合和)と, 本稿で提案した条件則であることがわかる.

7. まとめ

証拠理論の条件則としてあるべき性質として3つの要件を述べ, それらの要件を満足する条件則を提案した. また, 与えられた条件の信頼度 λ を導入することで3要件の1つを棄却し, それにより条件則の一般化を行った. 一般化された条件則は $\lambda=1$ の時は3要件を満足し, $\lambda=0$ の時は事前信念と等しくなる. そして, $0 \leq \lambda \leq 1$ の場合は両者の信念を線形補間するという特徴を持つ.

また, 提案した条件則を既存の主要な複数の条件則と比較した. その結果, 3要件のすべてを満足する条件則は本稿で提案した条件則($\lambda=1$)のみであることを示した. さらに, 提案した条件則は, Dempster条件則を始め, 正規化を含む条件則が持つ不安定性の問題も解決していることを示した.

参考文献

- [1] G.A.Shafer : *Mathematical Theory of Evidence*, Princeton Univ. Press (1976)
- [2] D. Dubois, H. Prade : On the unicity of Dempster rule of combination, *Int. J. of Intelligent Systems* **1**, pp. 133-142 (1986)
- [3] H. E. Kyburg, Jr. : Bayesian and non-Bayesian evidential updating, *Artificial Intelligence* **31**, pp.271-293 (1987)
- [4] B. Planchet : Credibility and conditioning, *J. of Theoretical Probability* **2**, pp. 289-299 (1989)
- [5] L. M. De Campos, M.T. Lamata, S. Moral : The concept of conditional fuzzy measure, *Int. J. of Intelligent Systems* **5**, pp. 237-246 (1990)
- [6] S. Moral, L. M. de Campos : Updating uncertain information, *Uncertainty in Knowledge Bases : Proc. IPMU '90 (Lecture notes in computer science* **521**, eds. B. Bouchon-Meunier, R.R. Yager, L.A. Zadeh), pp. 58-67, Springer-Verlag. (1991)
- [7] D. Dubois, H. Prade : Updating with belief functions, ordinal conditional functions and possibility measures, in *Uncertainty in Artificial Intelligence* **6** (eds. P. P. Bonissone, M. Henrion, L. N. Kanal, J. F. Lemmer), pp.311-329 (1991)
- [8] J. Y. Halpern, R. Fagin : A new approach to updating beliefs, in *Uncertainty in Artificial Intelligence* **6** (eds. P. P. Bonissone, M. Henrion, L. N. Kanal, J. F. Lemmer), pp.347-373 (1991)
- [9] 前田, 市橋 : ベイズ定理の証拠理論への拡張について, システム制御情報学会論文誌 **5-12**, pp.481-490 (1992)
- [10] D. Dubois, H. Prade : Evidence, knowledge, and belief functions, *Int. J. of Approximate Reasoning* **6**, pp.295-319 (1992)
- [11] P. Smets : What is Dempster-Shafer's model?, in *Advances in the Dempster-Shafer Theory of Evidence* (eds. R.R.Yager, M.Fedrizzzi, and F.Kacprzyk), pp.5-34, John Wiley & Sons, Inc. (1994)
- [12] D. Dubois, H.Prade : Focusing versus updating in belief function theory, in the Dempster-Shafer theory, in *Advances in the Dempster-Shafer Theory of Evidence* (eds. R.R.Yager, M.Fedrizzzi, and F.Kacprzyk), pp.71-95, John Wiley & Sons, Inc. (1994)
- [13] L. Zhang, Representation, independence, and combination of evidence in the Dempster-Shafer theory, in *Advances in the Dempster-Shafer Theory of Evidence* (eds. R.R.Yager, M.Fedrizzzi, and F.Kacprzyk), pp.51-69, John Wiley & Sons, Inc. (1994)
- [14] 伊藤, 稲垣 : 証拠理論における確信関数の更新と新たな条件付けの提案, 計測自動制御学会論文集 **31-12**, pp.2011-2017 (1995)
- [15] E. C.Kulasekere, et al. : Conditioning and updating evidence, *Int. J of Approximate Reasoning* **36**, 75-108 (2004)
- [16] R. Jeffrey : *The Logic of Decision*, McGraw-Hill, New York (1965)
- [17] H. Ichihashi, H. Tanaka: Jeffrey-like rules of conditioning for the Dempster-Shafer theory of evidence, *Int. J. of Approximate Reasoning* **3**, pp.143-156 (1989)
- [18] K. Premaratne, D.A.Dewasurendra, P. H. Bauer : Evidence updating in a heterogeneous sensor environment, *Proc. 2003 International Symposium on Circuits and Systems*, Vol.4 pp. 824-827 (2003)
- [19] L. A. Zadeh : Review of books, a mathematical theory of evidence, *AI Magazine*, **5** (3), 81/83 (1984)
- [20] G. Shafer : Perspective on the theory and practice of belief function, *Int. J of Approximate Reasoning* **4**, 323/362 (1990)
- [21] キマラ・ヴィラニー, 山田耕一 : 証拠理論における新たな条件付けの提案, 第24回ファジィシステムシンポジウム, pp. 366-369 (2008)
- [22] K. Vilany, K. Yamada : Another conditioning rule in Evidence theory, *Proc. 11th Int. Conf. on Humans and Computers*, 323/328 (2008)
- [23] G. J. Klir : *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic : Theory And Applications*, Prentice Hall PTR (1995)
- [24] K. Yamada : A New Combination of Evidence Based on Compromise, *Fuzzy Sets and Systems* **159/13**, pp. 1689-1708 (2008)

- [25] R.R. Yager : On the Dempster-Shafer framework and new combination rules, *Information Sciences* **41**, 93/137 (1987)
- [26] D. Dubois : H. Prade, Representation and Combination of Uncertainty with Belief Functions and Possibility Measures, *Comput. Intelligence* **1**/1, pp.244-264 (1988)
- [27] H.Y. Hau, R.L. Kashyap : Belief combination and propagation in a lattice-structured inference network, *IEEE SMC* **20**/1, pp.45-58 (1990)
- [28] R.R. Yager : On the relationships of methods of aggregation of evidence in expert systems, *Cybernet. Systems* **16**, pp.1-21 (1985)
- [29] L.A. Zadeh : Reviews of books, a mathematical theory of evidence, *AI Magazine* **5**/3, pp.81-83 (1984)
(2008年12月13日 受付)
(2009年4月17日 採録)

[問い合わせ先]

〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町1603-1
長岡技術科学大学 制御・情報工学専攻
キマラ ヴィラニー
TEL : 02-5847-1611
E-mail : kimala@mis.nagaokaut.ac.jp

著者紹介

キマラ ヴィラニー [非会員]

長岡技術科学大学院情報・制御工学
2006年長岡技術科学大学院工学研究
科経営情報システム工学専攻修了。現
在、同大学博士後期課程在籍中。

やまだ こういち
山田 耕一 [正会員]

長岡技術科学大学・経営情報系・教
授。1980年東京工業大学大学院総合
理工学研究科(システム科学専攻)修
了。三菱総合研究所、日本DEC、山武
ハネウエル、長岡技術科学大学助教授
を経て現職。1991-1993国際ファジィ
工学研究所。博士(工学)。情報処理
学会、人工知能学会、感性工学会、
IEEE等の各会員。

うねはら むねたか
畦原 宗之 [正会員]

2005年筑波大学大学院システム情
報工学研究科修了。博士(工学)。同
年長岡技術科学大学経営情報系助手。
2007年同大学助教。現在に至る。人間
の主観、感性を考慮した知的システム、
生成的システム構築に関する研究
に従事。知能情報ファジィ学会、感性
工学会、人工知能学会、行動計量学会
各会員。

Requirements of Conditioning Rules and a New Conditioning in Evidence Theory

by

Vilany KIMALA, Koichi YAMADA and Muneyuki UNEHARA

Abstract :

The paper studies and proposes the requirements that a conditioning rule of Evidence theory should satisfy, and a new conditioning rule satisfying them. It also proposes a generalized conditioning rule that abandons one of the requirements.

The proposed requirements are i) focal elements of a conditional *basic belief assignment* are limited to subsets of a set representing the condition, ii) conditional *bba* must be defined except the case where the condition set is empty and iii) *bba* conditioned by the universal set equals *bba* without any condition. The first requirement represents that the given condition is completely reliable, the second is derived from the interpretation that Evidence theory deals with beliefs in human minds, not uncertainty related to frequency, and the third is the result from the fact that the universal set contains all possible elements.

The paper proposes a conditioning rule satisfying the above three requirements. Then, it generalizes the rule with abandoning the first requirement by introducing a degree of reliability. The generalized rule is equivalent to the one satisfying the three requirements when the degree is one, and to the original *bba* without any condition when the degree is zero. When the degree is between zero and one, the rule interpolates both the ends linearly.

Numerical examples show the difference between the proposed rule and well-known conventional conditioning rules. They show that only the proposed one satisfies all the three requirements. In addition, they also show that instability that a little difference between two prior beliefs may produce a large difference between the posterior beliefs, which is observed in the case of conditioning with normalization such as Dempster' rule, is solved with the proposed conditioning rule.

Keywords : Evidence theory , Dempster-Shafer theory of evidence , conditioning rule

Contact Address : **Vilany KIMALA**

Nagaoka University of Technology, Information Science and Control

1603-1, Kami-tomioka, Nagaoka, Niigata, JAPAN, 940-2188

TEL : 02-5847-1611

E-mail : kimala@mis.nagaokaut.ac.jp