原著論文

サンプル値ファジィシステムに対するロバストオブザーバ設計†

米山 淳*

高木・菅野ファジィシステムは、広いクラスの非線形システムを記述することができ、多くの分野で用いられている。近年、ファジィシステムにより記述された非線形システムの解析や制御系設計が活発に行われている。そこで、本論文では、実システムへの適用を考慮したサンプル値ファジィシステムに対するロバストオブザーバの設計法を提案する。多くのシステムは連続時間システムであるが、サンプリング時間ごとに観測される出力は離散信号となる。サンプリング間隔は一律でないことも許容するが、その最大値は既知とする。まず、ファジィシステムとオブザーバによる誤差システムがむだ時間ファジィシステムとなることを示し、そのシステムの安定条件を線形行列不等式 (LMI) により与える。安定条件の保守性を軽減するために、ディスクリプタシステム形式を用いる。その安定条件に基づいて、オブザーバの設計法を提案する。さらに、不確かさを含むファジィシステムに対するロバストオブザーバの設計法に拡張する。最後に、数値例により提案した手法の有効性を示す。

キーワード：高木・菅野ファジィシステム、サンプル値システム、むだ時間、オブザーバ設計、不確かなファジィシステム

1. はじめに

高木・菅野ファジィシステムは広いクラスの非線形システムを効率的に記述することができる ([7], [8])。ゆえに、その安定性解析や制御系設計は、非常に重要な制御問題である。これまでに、文献 [8], [9], [10] を始めとして、ファジィシステムの安定性解析や制御系設計が活発に行われている。しかしながら、研究結果の多くは連続時間ファジィシステムを対象としている。そのため、実用性を考慮したサンプル値ファジィシステムの研究が不可欠となっている。文献 [6] において、サンプル値ファジィシステムに対する安定性解析がなされている。そこでは、連続時間システムと離散時間システムの混在するジャンプシステムアプローチによる解析が用いられ、サンプル値ファジィシステムに対する安定条件が与えられた。しかし、安定条件がジャンプ型リカッチ不等式となっているため、解が得られにくいことが欠点である。また、サンプリング間隔が一律な場合に限られていた。

一方、文献 [1], [4] では、サンプル値入力をむだ時間を含む入力と考えた線形システムの安定化が行われた。同様な考えを用いて、文献 [5], [11] では、サンプル値ファジィシステムに対する安定性解析と安定化制

御則の設計が行われた。さらには、文献 [12] において、ロバスト安定化制御則の設計が行われた。これらの研究結果は、線形行列不等式 (LMI) に基づくものであり、一律でないサンプリング時間にも対応した結果となっている。

本論文では、高木・菅野ファジィシステムに対するロバストオブザーバの設計法を提案する。上記に述べたサンプル値ファジィシステムの制御系設計とは異なり、サンプル値オブザーバの設計はまだ少ない。サンプリング時間における観測出力は、時変むだ時間信号と考えられるため、オブザーバの設計にも、むだ時間システムを利用した設計を用いる。まずは、ファジィシステムとオブザーバによる閉ループシステムが安定となる条件を導く。その際には、安定条件の保守性を低減することが知られているディスクリプタシステム形式を用いる ([2], [3])。その安定条件に基づき、ロバストオブザーバの設計法を提案する。最後に、数値例により提案した手法の有効性を示す。

2. サンプル値システム

この章では、対象となる高木・菅野ファジィモデルを紹介する。以下の IF-THEN 規則により記述される高木・菅野ファジィモデルを考える。

IF ξ_1 is M_{i1} and $\dots$ and ξ_p is M_{ip} ,
THEN $\dot{x}(t) = A_i x(t)$,
 $y(t) = C_i x(t)$, $i = 1, \dots, r$

† Robust observer for sampled-data fuzzy systems
Jun YONEYAMA

* 青山学院大学
Aoyama Gakuin University

ここで, $x(t) \in \mathcal{R}^n$ は状態, $y(t) \in \mathcal{R}^p$ は出力である. A_i, C_i は適当な次元をもつ行列である. r は IF-THEN 規則の数である. M_{ij} はファジィ集合で, $\xi_1, \dots, \xi_p$ は前件部変数である. $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_p]^T$ とおき, $\xi(t)$ は測定可能と仮定する.

状態方程式と出力方程式は, 以下のように定義される.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i(\xi(t)) A_i x(t), \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i(\xi(t)) C_i x(t)\end{aligned}\quad (1)$$

ここで,

$$\lambda_i(\xi) = \frac{\beta_i(\xi)}{\sum_{i=1}^r \beta_i(\xi)}, \quad \beta_i(\xi) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(\xi_j) \quad (2)$$

であり, $M_{ij}(\cdot)$ は M_{ij} のメンバーシップ関数のグレードである. すべての $\xi(t)$ に対して, $\beta_i(\xi(t)) \geq 0$, $i = 1, \dots, r$, $\sum_{i=1}^r \beta_i(\xi(t)) > 0$ と仮定する. したがって, すべての $\xi(t)$ に対して, $\lambda_i(\xi(t))$ は $\lambda_i(\xi(t)) \geq 0$, $i = 1, \dots, r$, $\sum_{i=1}^r \lambda_i(\xi(t)) = 1$ を満足する. なお, システム(1)は漸近安定と仮定する.

測定される出力はサンプル値出力とする. ただし, ホールド回路により零次ホールドされるとする. つまり, 以下のように記述される.

$$y(t) = y_d(t_k) = y_d(t - (t - t_k)) = y_d(t - h(t)), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad h(t) = t - t_k \quad (3)$$

ここで, y_d は離散的な測定信号であり, 時変むだ時間 $h(t) = t - t_k$ は以下の微分係数をもち区分的連続である.

$$\dot{h}(t) = 1 \quad \text{for } t \neq t_k.$$

t_k はサンプリング時間であり, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ を満たす. サンプリング間隔 $\bar{h}_k = t_{k+1} - t_k$ は, すべての t に対して, $h(t) \leq \bar{h}_k \leq h_M \forall k$ を満足する. ここで, $\bar{h}_k$ はサンプリング間隔であり, 一様とは限らないが, その最大値 h_M は既知と仮定する. この時, 測定出力 $y(t)$ は

$$y(t) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(\xi(t_k)) C_i x(t - h(t)).$$

となる.

本論文では, つぎのような IF-THEN 規則をもつファジィオブザーバを定義する.

$$\begin{aligned}\text{IF} \quad & \xi_1 \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } \xi_p \text{ is } M_{ip}, \\ \text{THEN} \quad & \hat{x}(t) = \hat{A}_i \hat{x}(t) + \hat{A}_{di} \hat{x}(t - h(t)) \\ & + \hat{B}_i y(t), \quad i = 1, \dots, r\end{aligned}$$

ここで, $h(t)$ は既知であり, $\hat{A}_{di}$ は

$$\hat{A}_{di} = \sum_{j=1}^r \lambda_j(\xi(t_k)) \hat{A}_{dij}$$

により定義される. このとき, サンプル値ファジィオブザーバは

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i(\xi(t)) \{ \hat{A}_i \hat{x}(t) \\ &+ \sum_{j=1}^r \lambda_j(\xi(t_k)) \hat{A}_{dij} \hat{x}(t - h(t)) + \hat{B}_i y(t) \}\end{aligned}\quad (4)$$

と定義される. 誤差を $e = x - \hat{x}$ とすると, (1)式と(4)式からなる閉ループシステムは以下になる.

$$\begin{aligned}\dot{x}_e(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i(\xi(t)) \lambda_j(\xi(t_k)) \\ &\times \{ \tilde{A}_{ij} x_e(t) + \tilde{B}_{ij} x_e(t - h(t)) \}\end{aligned}\quad (5)$$

ここで, $x_e = [x^T \quad e^T]^T$,

$$\begin{aligned}\tilde{A}_i &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ A_i - \hat{A}_i & \hat{A}_i \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}_{ij} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{B}_i C_j - \hat{A}_{dij} & \hat{A}_{dij} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

である. 本論文での問題は, 閉ループシステム(5)を安定にするようなサンプル値ファジィオブザーバ(4)の設計である.

注2.1 (4)式のオブザーバでは, (1)式にあるように前件部変数 $\xi(t)$ が連続時間にて与えられると仮定している. もし前件部変数がサンプリング時間ごとにしか得られない(つまり, $\xi(t_k)$ の場合には, (4)式のオブザーバにおいて, $\xi(t)$ を $\xi(t_k)$ として, 議論を進めればよい.

3. サンプル値オブザーバ

この章では, まず, 閉ループシステム(5)が安定となる条件を与え, その条件に基づいて, ロバストサンプル値オブザーバ(4)の設計法を提案する.

3.1 安定性解析

閉ループシステム(5)の安定性解析を行う.

定理3.1 オブザーバゲイン行列 $\hat{A}_i, \hat{A}_{dij}, \hat{B}_i, i, 1 = 1, \dots, r$ が与えられた時,

$$\Phi_{ij} = \begin{bmatrix} \Gamma_{ij} & -h_M P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{B}_{ij} \end{bmatrix} \\ -h_M [0 \quad \tilde{B}_{ij}^T] P & -h_M R \end{bmatrix} < 0, \quad i, j = 1, \dots, r \quad (6)$$

を満たす行列 $P_{11} > 0, P_{21}, P_{22}, R > 0$ が存在すれば, 閉ループシステム (5) は安定である. ここで,

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{ij} = P^T \begin{bmatrix} \tilde{A}_i + \tilde{B}_{ij} & -I \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{A}_i + \tilde{B}_{ij} & -I \end{bmatrix} P + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_M R \end{bmatrix}$$

である.

証明: $z(t) = \dot{x}_e(t)$ とおき, 閉ループシステム (5) をディスクリプタシステムに書き換える.

$$E \dot{x}_c(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i(\xi(t)) \lambda_j(\xi(t_k)) \times \left\{ \begin{bmatrix} 0 & I \\ \tilde{A}_i + \tilde{B}_{ij} & -I \end{bmatrix} x_c(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{B}_{ij} \end{bmatrix} \int_{t-h(t)}^t z(s) ds \right\}$$

ここで, $x_c = [x_e^T \quad z^T]^T$,

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

である.

つぎに, 以下に示すリアプノフ関数を考える.

$$\begin{aligned} V(x_c) &= V_1(x_c) + V_2(z) \\ V_1(x_c) &= x_c^T(t) E P x_c(t), \\ V_2(z) &= \int_{t-h_M}^t \int_{\theta}^t z^T(s) R z(s) ds d\theta \end{aligned}$$

$P, R > 0$ は適当な次元をもつ行列であり, P は

$$EP = P^T E. \quad (7)$$

を満足する. (7) 式より, P は

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

の形式を取ることがわかる. ここで, $P_{11} \in \Re^{2n \times 2n}$, $P_{21} \in \Re^{2n \times 2n}$, $P_{22} \in \Re^{2n \times 2n}$ である. $h(t) \neq 0$ の時, $V(x_c)$ を微分すると以下の式を得る.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} V(x_c) \\ &= 2 \dot{x}_c^T(t) E P x_c(t) + h_M z^T(t) R z(t) \\ & \quad - \int_{t-h_M}^t z^T(s) R z(s) ds \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i(\xi(t)) \lambda_j(\xi(t_k)) x_c^T(t) \bar{\Gamma}_{ij} x_c(t) \\ & \quad - \int_{t-h(t)}^t z^T(s) R z(s) ds \\ & \quad - \int_{t-h(t)}^t z^T(s) R z(s) ds \\ & \quad - 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i(\xi(t)) \lambda_j(\xi(t_k)) \\ & \quad \times \int_{t-h(t)}^t x_c^T(t) P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{B}_{ij} \end{bmatrix} z(s) ds \\ &\leq \frac{1}{h(t)} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i(\xi(t)) \lambda_j(\xi(t_k)) \\ & \quad \times \int_{t-h(t)}^t \zeta^T(t, s) \Psi_{ij} \zeta(t, s) ds \end{aligned}$$

ここで, $\zeta(t, s) = [x_c^T(t) \quad h(t) z^T(s)]^T$,

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{ij} & -P^T \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{B}_{ij} \end{bmatrix} \\ -[0 \quad \tilde{B}_{ij}^T] P & -h^{-1}(t) R \end{bmatrix}.$$

である. また, $h(t) = 0$ の時, 以下の式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x_c) &= 2 \dot{x}_c^T(t) E P x_c(t) + h_M z^T(t) R z(t) \\ & \quad - \int_{t-h_M}^t z^T(s) R z(s) ds \\ &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i(\xi(t)) \lambda_j(\xi(t_k)) x_c^T(t) \Gamma_{ij} x_c(t) \end{aligned}$$

$h(t) \neq 0$ および $h(t) = 0$ のどちらの場合にしろ, Schur の補完公式により, (6) 式が $\dot{V}(x_c) < 0$ となる十分条件であることが分かる. これにより, 閉ループシステム (5) の安定性が保証される.

注3.1 ディスクリプタ形式はむだ時間システムの安定条件の保守性を緩和することが知られている ([2]). さらに, 文献 [4] と異なり, 条件 (6) 式を求めるにあたり, 不要な行列不等式を用いていない. このことも十分条件の保守性を低減することになっている.

3.2 オブザーバ設計

この節では, サンプル値オブザーバの設計法を提案する. 定理3.1はオブザーバ行列 $\hat{A}_i, \hat{A}_{dij}, \hat{B}_i$ に対して LMI とはなっていないため, 新たな LMI 条件が

必要となる。そのために、 P^{-1} を用いて、LMI条件の書き換えを行い、その条件に基づいたサンプル値オブザーバの設計法を提案する。

定理3.2 あるスカラー $\varepsilon > 0$ に対し、

$$\begin{aligned} \Xi_{ij} &= \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12ij} & 0 & h_M Q_{21}^T \\ \Xi_{12ij}^T & \Xi_{22} & \Xi_{23ij} & h_M Q_{22}^T \\ 0 & \Xi_{23ij}^T & \Xi_{33} & 0 \\ h_M Q_{21} & h_M Q_{22} & 0 & \Xi_{44} \end{bmatrix} < 0, \\ \Xi_{11} &= Q_{21} + Q_{21}^T, \\ \Xi_{12ij} &= \begin{bmatrix} A_i^T P_1 & A_i^T P_2 - L_{ai}^T - C_j^T L_{bi}^T - L_{dij}^T \\ 0 & L_{ai}^T + L_{dij}^T \end{bmatrix} \\ &\quad - Q_{21}^T + Q_{22}, \\ \Xi_{22} &= -Q_{22} - Q_{22}^T, \\ \Xi_{23ij} &= h_M \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_{bi} C_j + L_{dij} & -L_{dij} \end{bmatrix}, \\ \Xi_{33} &= -\frac{h_M}{\varepsilon} \text{diag}[P_1 \ P_2], \\ \Xi_{44} &= -\varepsilon h_M \text{diag}[P_1 \ P_2] \quad i, j = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (8)$$

を満たすような行列 $P_1 > 0, P_2 > 0, Q_{21}, Q_{22}, L_{ai}, L_{bi}, L_{dij}, i, j = 1, \dots, r$ が存在すれば、ファジィシステム(1)に対するサンプル値オブザーバ(4)が設計可能である。この時、(4)式におけるオブザーバゲイン行列は

$$\hat{A}_i = P_2^{-1} L_{ai}, \hat{B}_i = P_2^{-1} L_{bi}, \hat{A}_{dij} = P_2^{-1} L_{dij} \quad (9)$$

で与えられる。

証明：もし(6)式を満たす P が存在すれば、 $P_{11} > 0$ であり、 Γ_{ij} の(2,2)ブロックより $-(P_{22} + P_{22}^T) < 0$ となることからわかる。ゆえに、 P^{-1} が存在し、このとき、

$$\Delta_1 = P^{-1} \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -P_{22}^{-1} P_{21} & P_{22}^{-1} P_{11} \end{bmatrix}, \\ \Delta = \text{diag}[\Delta_1, I].$$

を定義し、以下の変換を行う。

$$\begin{aligned} &\Delta^T \Phi_{ij} \Delta \\ &= \begin{bmatrix} \Delta_1^T \Gamma_{ij} \Delta_1 & -h_M \begin{bmatrix} 0 \\ P_{11} \tilde{B}_{ij} \end{bmatrix} \\ -h_M \begin{bmatrix} 0 & \tilde{B}_{ij}^T P_{11} \end{bmatrix} & -h_M R \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} &\Delta_1^T \Gamma_{ij} \Delta_1 \\ &= \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ \tilde{A}_i + \tilde{B}_{ij} & -I \end{bmatrix} \Delta_1 \\ &\quad + \Delta_1^T \begin{bmatrix} 0 & I \\ \tilde{A}_i + \tilde{B}_{ij} & -I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{11} \end{bmatrix} \\ &\quad + \Delta_1^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_M R \end{bmatrix} \Delta_1 \\ &= \tilde{\Xi}_{ij} + h_M \begin{bmatrix} Q_{21}^T \\ Q_{22}^T \end{bmatrix} (P_{11} R^{-1} P_{11})^{-1} [Q_{21} \ Q_{22}] \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_{ij} &= \begin{bmatrix} Q_{21} + Q_{21}^T & \tilde{\Xi}_{12ij} \\ \tilde{\Xi}_{12ij}^T & -Q_{22} - Q_{22}^T \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Xi}_{12ij} &= (\tilde{A}_i + \tilde{B}_{ij})^T P_{11} - Q_{21}^T + Q_{22}, \\ [Q_{21} \ Q_{22}] &= P_{11} P_{22}^{-1} [-P_{21} \ P_{11}]. \end{aligned}$$

である。よって、 $\Delta^T \Phi_{ij} \Delta < 0$ に Schur の補完公式を用い、 $R = \varepsilon^{-1} P_{11}$ とおくことで、

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12ij} & 0 & h_M Q_{21}^T \\ \Xi_{12ij}^T & \Xi_{22} & -h_M P_{11} \tilde{B}_{ij} & h_M Q_{22}^T \\ 0 & -h_M \tilde{B}_{ij}^T P_{11} & \frac{h_M}{\varepsilon} P_{11} & 0 \\ h_M Q_{21} & h_M Q_{22} & 0 & -\varepsilon h_M P_{11} \end{bmatrix} < 0, \quad i, j = 1, \dots, r \quad (10)$$

を得る。さらに、 $P_{11} = \text{diag}[P_1 \ P_2]$ と仮定すると、

$$\begin{aligned} &(\tilde{A}_i + \tilde{B}_{ij})^T P_{11} \\ &= \begin{bmatrix} A_i^T P_1 & A_i^T P_2 - L_{ai}^T - C_j^T L_{bi}^T - L_{dij}^T \\ 0 & L_{ai}^T + L_{dij}^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $L_{ai} = P_2 \hat{A}_i, L_{bi} = P_2 \hat{B}_i, L_{dij} = P_2 \hat{A}_{dij}$ とした。したがって、(8)式を得る。もし(8)式が成り立てば、オブザーバゲイン行列は(9)式より得られることが容易にわかる。

4. ロバストサンプル値オブザーバ

この章では、前章での理論を不確かさを含む高木・菅野ファジィモデルに対するロバストサンプル値オブザーバに拡張する。

4.1 不確かさを含むサンプル値システム

以下の IF-THEN 規則により記述される高木・菅野ファジィモデルを考える。

IF ξ_1 is M_{i1} and $\dots$ and ξ_p is M_{ip} ,
THEN $\dot{x}(t) = (A_i + \Delta A_i)x(t),$
 $y(t) = (C_i + \Delta C_i)x(t), \quad i = 1, \dots, r$

ここで、不確かな行列は以下を満たすものとする。

$$\begin{bmatrix} \Delta A_i \\ \Delta C_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1i} \\ H_{2i} \end{bmatrix} F_i(t) E_i, \quad i = 1, \dots, r$$

ここで, $F_i(t) \in \mathfrak{R}^l \times s$ は未知の時変行列であり,

$$F_i^T(t)F_i(t) \leq I, \quad \forall t$$

を満足するものとする. また, H_{1i} , H_{2i} , E_i はそれぞれ既知の定数行列である.

状態方程式と出力方程式は, 以下のように定義される.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i(\xi(t))(A_i + \Delta A_i)x(t), \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i(\xi(t))(C_i + \Delta C_i)x(t) \end{aligned} \quad (11)$$

ここで, $\lambda_i(\xi)$ は(2)式を満たす. 測定される出力は(3)式で表わされるサンプル値出力とする. つまり, 測定出力 $y(t)$ は

$$y(t) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(\xi(t_k))(C_i + \Delta C_i)x(t - h(t))$$

となる. このとき, ロバストサンプル値オブザーバは(4)式で表わされると仮定する. (11)式と(4)式からなる閉ループシステムは以下ようになる.

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_i(\xi(t))\lambda_j(\xi(t_k)) \\ &\quad \times \{\bar{A}_{ij}x_e(t) + \bar{B}_{ij}x_e(t - h(t))\} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_i &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ A_i - \hat{A}_i & \hat{A}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{1i} \\ H_{1i} \end{bmatrix} F_i(t) \begin{bmatrix} E_i & 0 \end{bmatrix} \\ &\triangleq \bar{A}_i + \tilde{H}_{1i}F_i(t)\tilde{E}_i, \\ \bar{B}_{ij} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\hat{B}_iC_j - \hat{A}_{dij} & \hat{A}_{dij} \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{B}_iH_{2j} \end{bmatrix} F_j(t) \begin{bmatrix} E_j & 0 \end{bmatrix} \\ &\triangleq \bar{B}_{ij} + \tilde{H}_{2ij}F_j(t)\tilde{E}_j \end{aligned}$$

である. ここでは, 閉ループシステム(12)をロバスト安定にするようなサンプル値オブザーバ(4)の設計である.

4.2 ロバストサンプル値オブザーバ設計

この節では, ロバストサンプル値オブザーバの設計法を提案する.

定理4.1 あるスカラー $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \Theta_{11ij} & \hat{H}_{1i} & \hat{H}_{2ij} \\ \hat{H}_{1i}^T & -\mu_{1ij}I & 0 \\ \hat{H}_{2ij}^T & 0 & -\mu_{2ij}I \end{bmatrix} < 0, \\ \Theta_{11ij} &= \Xi_{ij} + \mu_{1ij}\hat{E}_{1i}^T\hat{E}_{1i} + \mu_{2ij}\hat{E}_{2j}^T\hat{E}_{2j}, \\ \hat{H}_{1i}^T &= [0 \quad [H_{1i}^TP_1 \quad H_{1i}^TP_2] \quad 0 \quad 0], \\ \hat{H}_{2ij}^T &= [0 \quad [0 \quad -H_{2j}^TL_{bi}^T] \quad 0 \quad 0], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_{1i} &= [\tilde{E}_i \quad 0 \quad 0 \quad 0], \\ \hat{E}_{2i} &= [\tilde{E}_i \quad 0 \quad -h_M\tilde{E}_i \quad 0], \quad i, j = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (13)$$

を満たすような行列 $P_1 > 0$, $P_2 > 0$, Q_{21} , Q_{22} , L_{ai} , L_{bi} , L_{dij} とスカラー $\mu_{1ij} > 0$, $\mu_{2ij} > 0$, $i, j = 1, \dots, r$ が存在すれば, 不確かさを含むファジィシステム(11)に対するロバストサンプル値オブザーバ(4)が設計可能である. この時, (4)式におけるオブザーバゲイン行列は(9)式で与えられる.

証明: (10)式において, $\bar{A}_i$, $\bar{B}_{ij}$ をそれぞれ $\bar{A}_i + \tilde{H}_{1i}F_i(t)\tilde{E}_i$, $\bar{B}_{ij} + \tilde{H}_{2ij}F_j(t)\tilde{E}_j$ と置き換えると

$$\begin{aligned} \Xi_{ij} &+ \hat{H}_{1i}F_i(t)\hat{E}_{1i} + \hat{E}_{1i}^TF_i(t)\hat{H}_{1i}^T \\ &+ \hat{H}_{2ij}F_j(t)\hat{E}_{2j} + \hat{E}_{2j}^TF_j(t)\hat{H}_{2ij}^T < 0, i, j = 1, \dots, r \end{aligned}$$

を得る. 上式が成り立つための必要十分条件は,

$$\begin{aligned} \Xi_{ij} &+ \mu_{1ij}\hat{E}_{1i}^T\hat{E}_{1i} + \mu_{2ij}\hat{E}_{2j}^T\hat{E}_{2j} \\ &+ \frac{1}{\mu_{1ij}}\hat{H}_{1i}\hat{H}_{1i}^T + \frac{1}{\mu_{2ij}}\hat{H}_{2j}\hat{H}_{2j}^T < 0, i, j = 1, \dots, r \end{aligned}$$

を満たすような $\mu_{1ij} > 0$, $\mu_{2ij} > 0$ が存在することである. ここで, Schur の補完公式を用いると(13)式の条件式を得る.

注4.1 $h(t)$ が未知の場合は(4)式において, $\hat{A}_{dij} = 0$ としたオブザーバを考えればよい. 定理3.2, 4.1においては $L_{dij} = 0$ としてオブザーバの設計が行える.

5. 数値例

ファジィシステム(11)を考える. ここで, $r = 2$, $\lambda_1(t) = \sin^2(t)$, $\lambda_2(t) = \cos^2(t)$ であり, 各行列は, 以下のように与えられるとする.

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -0.15 & 1 \\ -1 & -0.15 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & 1.2 \\ -0.8 & -0.1 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= [1.5 \quad 0.5], C_2 = [1 \quad 0.1], \\ H_{11} &= H_{12} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, H_{21} = H_{22} = [0.1 \quad 0.1], \\ E_1 &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \\ F_i(t) &= \sin t, i = 1, 2 \end{aligned}$$

定理4.1を用いると, $h_M = 0.1$ に対して, ロバストサンプル値オブザーバが設計可能であることがわかる. $h_M = 0.1$ の時, 定理4.1において $\varepsilon = 402$ とすると,

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 &= \begin{bmatrix} -0.5140 & 0.9378 \\ -0.7867 & -0.3365 \end{bmatrix}, \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.0094 \\ -0.1250 \end{bmatrix}, \\ \hat{A}_2 &= \begin{bmatrix} -0.5029 & 0.9352 \\ -0.7967 & -0.3304 \end{bmatrix}, \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} 0.1140 \\ -0.0026 \end{bmatrix}, \\ \hat{A}_{d11} &= \begin{bmatrix} -0.0040 & -0.0229 \\ 0.0157 & -0.0488 \end{bmatrix}, \\ \hat{A}_{d12} &= \begin{bmatrix} -0.0397 & -0.0363 \\ -0.0041 & -0.0325 \end{bmatrix}, \\ \hat{A}_{d21} &= \begin{bmatrix} -0.0093 & -0.0308 \\ 0.0054 & -0.0419 \end{bmatrix}, \\ \hat{A}_{d22} &= \begin{bmatrix} -0.0122 & -0.0262 \\ 0.0061 & -0.0468 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

をオブザーバゲインとするロバストサンプル値オブザーバ(4)が設計できる。サンプリング時間 $t_k=0.1$, $\forall k$, 初期値を $x(0)=[3.0 \ -2.0]^T$, $\hat{x}(0)=[0 \ 0]^T$ とした時の状態 $x(t)$ (実線)ならびにオブザーバによる状態推定値 $\hat{x}(t)$ (点線)を図1に示す。

$h(t)$ が未知の場合, 注4.1にあるように $\hat{A}_{dij}=0$ としたオブザーバ(4)が設計できる。この場合, 定理4.1において $\varepsilon=402$ とすると,

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 &= \begin{bmatrix} -1.3884 & 0.4278 \\ -0.4568 & -1.0630 \end{bmatrix}, \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} -0.1884 \\ -0.2920 \end{bmatrix}, \\ \hat{A}_2 &= \begin{bmatrix} -1.3826 & 0.4264 \\ -0.4618 & -1.0599 \end{bmatrix}, \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} 0.2534 \\ -0.1534 \end{bmatrix}, \\ \hat{A}_{d11} &= \hat{A}_{d12} = \hat{A}_{d21} = \hat{A}_{d22} = 0\end{aligned}$$

をオブザーバゲインとするロバストサンプル値オブザーバ(4)が設計できる。サンプリング時間 $t_k=0.1$, $\forall k$, 初期値を $x(0)=[3.0 \ -2.0]^T$, $\hat{x}(0)=[0 \ 0]^T$ とした時の状態 $x(t)$ (実線)ならびにオブザーバによる状態推定値 $\hat{x}(t)$ (点線)を図2に示す。

図1, 図2よりどちらの場合も状態推定値 $\hat{x}(t)$ が状態 $x(t)$ を正しく推定していることがわかる。

6. おわりに

本論文ではファジィシステムに対するサンプル値オブザーバの設計法を提案した。出力むだ時間システムに基づいた手法を用いた。まず, 閉ループシステムがむだ時間システムとなることを示し, 閉ループシステムがロバスト安定となる条件を求めた。その条件に基づき, ロバストサンプル値オブザーバの設計を行った。最後に, 数値例により設計法の有効性を示した。

図1 状態と状態推定値

図2 状態と状態推定値

参考文献

- [1] K. Astrom and B. Wittenmark, Adaptive Control, Reading, MA: Addison - Wesley, 1989.
- [2] E. Fridman and U. Shaked, A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.47, pp.253 - 270, 2002.
- [3] E. Fridman and U. Shaked, An improved stabilization method for linear time-delay systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.47, pp.1931 - 1937, 2002.
- [4] E. Fridman, A. Seuret and J. Richard, Robust sampled-data stabilization of linear systems: an input delay approach, Automatica, Vol.40, pp.1441 - 1446, 2004.
- [5] H. Gao and T. Chen, Stabilization of nonlinear systems under variable sampling: a fuzzy control approach, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.15 pp.972 - 983, 2007.
- [6] M. Nishikawa, H. Katayama J. Yoneyama and A. Ichikawa, Design of output feedback controllers for sampled-data fuzzy systems, International Journal of

- Systems Science Vol.31, No.4, pp.438-449, 2000.
- [7] T. Takagi and M. Sugeno, Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, IEEE Transaction on Systems, Man, Cybernetics, Vol.15, pp.116-132, 1985.
 - [8] K. Tanaka and M. Sugeno, Stability analysis and design of fuzzy control systems, Fuzzy Sets and Systems, Vol.45, pp.135-156, 1992.
 - [9] M.C.M. Teixeira, E. Assuncao and R.G. Avellar, On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers, Vol.11, pp.613-623, 2003.
 - [10] H.D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo and Y. Yamamoto, Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol.9, pp.324-332, 2001.
 - [11] J. Yoneyama, Sampled-Data Stabilization of Fuzzy Systems with Input Delay, 2007 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, pp.835-840, Montreal, Canada, 2007.
 - [12] J. Yoneyama, Robust stabilization of fuzzy systems under sampled-data control, 2008 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, pp.1236-1241, Hong Kong, 2008.
- (2008年10月8日 受付)
(2009年5月21日 採録)
- [問い合わせ先]
〒229-8558 神奈川県相模市淵野辺5-10-1
青山学院大学理工学部電気電子工学科
米山 淳
TEL : 042-759-6527
E-mail : yoneyama@ee.aoyama.ac.jp

著者紹介

よねやま じゅん
米山 淳 [正会員]

1996年University of California, Los Angeles 電気工学科博士課程修了 (Ph.D.). 同年静岡大学工学部電気・電子工学科助手. 2000年青山学院大学理工学部電気電子工学科助教授. 2007年同大学准教授. 現在に到る. ファジィシステム, むだ時間システム, ロバスト制御, 確率システム制御, サンプル値制御などに関する研究に従事. IEEE会員, 計測自動制御学会会員, 電気学会会員, 日本ロボット学会会員.

Robust observer for sampled-data fuzzy systems

by

Jun YONEYAMA**Abstract :**

Takagi-Sugeno fuzzy system can describe a wide class of nonlinear systems, and is widely used in many engineering fields. Recently, system analysis and control design for nonlinear systems based fuzzy system approach have been active. This paper is concerned with robust observer for sampled-data fuzzy systems. The system is usually modelled as a continuous-time fuzzy system, while the observation is taken at discrete instants. First it is shown that the error system which stems from an original fuzzy system and a sampled-data observer becomes a time-delay systems. Sufficient conditions for the error system to be asymptotically stable are given in terms of linear matrix inequalities (LMIs). We derive such conditions via descriptor system representation under the assumption that sampling-time is not greater than some prescribed number. Based on the conditions, we propose an observer design for a fuzzy system and then extend to a robust observer for the same class of systems. Numerical examples are given to illustrate our sampled-data observer.

Keywords : Takagi-Sugeno fuzzy systems, Sampled-data systems, Time-delay, Observer design, Uncertain fuzzy systems

Contact Address : **Jun YONEYAMA**

Electrical Engineering and Electronics, Aoyama Gakuin University

5-10-1 Fuchinobe, Sagamihara, Tokyo, JAPAN

TEL : 042-759-6527

E-mail : yoneyama@ee.aoyama.ac.jp