ショートノート

共単調加法的汎関数の Riesz 型積分表示定理[†]

河邊 淳^{*1}・相馬 匡博^{*2}

共単調加法的汎関数の Daniell-Stone 型積分表示定理として有名な Greco の定理 (G.H. Greco, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 66, 21-42, 1982) から, Riesz 型積分表示定理を導く汎用的な手法を紹介し, それを用いて, 菅野らの積分表示定理 (M. Sugeno et al., Fuzzy Sets and Systems, 99, 205-211, 1998) の改良と, その別証明を与える.

キーワード: 非加法的測度, 共単調加法性, Choquet 積分, Riesz 型積分表示定理

1. はじめに

X を局所コンパクト空間とし, コンパクトな台をもつ X 上の非負実数値連続関数全体を C_0^+ で表す. 菅野[6]らは, 空間 X の局所コンパクト性を用いた直接的な手法で, 単調で正斉次的な共単調加法的汎関数 $I: C_0^+ \rightarrow [0, \infty)$ が, 外正則な非加法的測度 $\mu: 2^X \rightarrow [0, \infty]$ に関する Choquet 積分[2]で表現できることを示した. 彼らの結果は, 非加法的測度による積算概念として重要な Choquet 積分の特徴付け (Riesz 型積分表示) を与えており, 空間 X が必ずしも局所コンパクトでない場合や, 汎関数の定義空間が C_0^+ 以外の場合にも, その成立性を吟味することは, 非加法的測度論における重要な課題の一つである. 本研究では, Greco 定理[4] (Daniell-Stone 型積分表示定理) から Riesz 型積分表示定理を導く汎用的な手法を紹介し, それを用いて, 菅野らの積分表示定理の改良と, その別証明を与える.

2. 記号と準備

以下では, $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$, $\bar{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$, $\bar{\mathbb{R}}^+ := [0, \infty]$ とする. また, X は空でない集合とし, X の部分集合全体からなる集合族を 2^X で, 集合 $A \subset X$ の定義関数を χ_A で表す.

定義 1 集合関数 $\mu: 2^X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$ は (i) $\mu(\emptyset) = 0$, (ii) $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ を満たすとき, X 上の非

加法的測度という.

定義 2 μ は X 上の非加法的測度とする. 関数 $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$ の μ に関する Choquet 積分を, Lebesgue 積分を用いて

$$(C) \int_X f d\mu := \int_0^\infty \mu(\{f > t\}) dt = \int_0^\infty \mu(\{f \geq t\}) dt$$

で定義する.

関数 $f, g: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ は, 任意の $x, x' \in X$ に対して, $f(x) < f(x')$ ならば $g(x) \leq g(x')$ が成り立つとき, 共単調であるといい, $f \sim g$ で表す. Greco は 1982 年の論文[4]で, 共単調関数に対して加法的な汎関数に関する Daniell-Stone 型の積分表示定理を与えた.

Greco 定理 関数 $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ からなる空でない関数族 $\mathcal{F}$ が

- (i) $0 \in \mathcal{F}$
- (ii) $f \geq 0$ for $\forall f \in \mathcal{F}$ (非負性)
- (iii) $f \in \mathcal{F}, c \in \mathbb{R}^+$ ならば $cf, f \wedge c, f - f \wedge c = (f - c)^+ \in \mathcal{F}$ (Stone の条件)

を満たすとする. また, 汎関数 $I: \mathcal{F} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ は

- (iv) $I(0) = 0$
- (v) $f, g \in \mathcal{F}$ で $f \leq g$ ならば $I(f) \leq I(g)$ (単調性)
- (vi) $f, g \in \mathcal{F}$, $f + g \in \mathcal{F}$ かつ $f \sim g$ ならば $I(f + g) = I(f) + I(g)$ (共単調加法性)
- (vii) $\forall f \in \mathcal{F}$ に対して $\lim_{a \rightarrow +0} I(f - f \wedge a) = I(f)$
- (viii) $\forall f \in \mathcal{F}$ に対して $\lim_{b \rightarrow \infty} I(f \wedge b) = I(f)$

を満たすとする. 各 $A \subset X$ に対して

$$\alpha(A) := \sup\{I(f) : f \in \mathcal{F}, f \leq \chi_A\}$$

$$\beta(A) := \inf\{I(f) : f \in \mathcal{F}, \chi_A \leq f\}$$

で集合関数 $\alpha, \beta: 2^X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$ を定義する. ただし, $\inf \emptyset = \infty$ と約束する.

[†] A Riesz type integral representation theorem of comonotonically additive functionals

Jun KAWABE and Tadahiro SOMA

^{*1} 信州大学工学部工学基礎教育部
Department of Mathematics and Physics, Faculty of Engineering, Shinshu University

^{*2} 日立公共システムサービス株式会社
Hitachi Public System Service Co., Ltd.

- (1) α, β は X 上の非加法的測度で $\alpha \leq \beta$.
 (2) X 上の非加法的測度 λ に対して, 次の条件は同値:
 (a) $\alpha \leq \lambda \leq \beta$.

(b) 任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して $I(f) = (C) \int_X f d\lambda$.

注意 1 Greco 定理において, (v) と (vi) より, I の正斉次性, すなわち, 任意の $f \in \mathcal{F}$ と $c \in \mathbb{R}^+$ に対して $I(cf) = cI(f)$ が導ける ([4], [5] を見よ).

3. 汎用的手法

次の定理は, Greco 定理から Riesz 型 Choquet 積分表示定理を導く汎用的手法を与える.

定理 1 Greco 定理と同じ記号を用いる.

(1) 関数族 $\mathcal{F}$ と汎関数 I が

(i) $\forall f \in \mathcal{F}, \exists g \in \mathcal{F}, \chi_{|f|>0} \leq g$ かつ $I(g) < \infty$ を満たせば, Greco 定理の (vii) が成立する.

(2) 関数族 $\mathcal{F}$ が

(ii) $\forall f \in \mathcal{F}$ に対して f は有界

を満たせば, Greco 定理の (viii) が成立する.

証明 (1) $f \in \mathcal{F}$ とすると, (i) より $\exists g \in \mathcal{F}, \chi_{|f|>0} \leq g$ かつ $I(g) < \infty$. $\forall a > 0$ に対して $f \wedge a \leq a\chi_{|f|>0}$ なので, 単調増加性と正斉次性より, $I(f \wedge a) \leq I(ag) = aI(g)$. そこで, $f - f \wedge a \sim f \wedge a$ に注意すると, 共単調加法性より, $I(f) \geq I(f - f \wedge a) = I(f) - I(f \wedge a) \geq I(f) - aI(g)$. ここで, $I(g)$ は有限なので, $\lim_{a \rightarrow +0} I(f - f \wedge a) = I(f)$.

(2) $f \in \mathcal{F}$ とすると, (ii) より, 十分大きな $b > 0$ に対して $f \wedge b = f$. よって, $\lim_{b \rightarrow \infty} I(f \wedge b) = I(f)$.

4. Riesz 型積分表示定理

以下, この章を通じて, X は局所コンパクト空間とし, コンパクトな台をもつ X 上の非負実数値連続関数全体を C_0^+ で表す. また, $S(f)$ は関数 f の台, すなわち, 集合 $\{f \neq 0\}$ の X における閉包とする.

まず初めに, 菅野らの積分表示定理 [6] を, この論文で使用している用語, 記号を用いて紹介する.

定理 2 汎関数 $I: C_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ は

- (i) $f, g \in C_0^+$ で $f \leq g$ ならば $I(f) \leq I(g)$
 (ii) $f, g \in C_0^+$ で $f \sim g$ ならば $I(f+g) = I(f) + I(g)$
 (iii) $f \in C_0^+$ で $c \in \mathbb{R}^+$ ならば $I(cf) = cI(f)$

を満たすとする. 各 $A \subset X$ に対して

$$\gamma(A) := \sup \{I(f) : f \in C_0^+, 0 \leq f \leq 1, S(f) \subset A\}$$

$$\gamma^*(A) := \inf \{\gamma(G) : A \subset G, G \text{ は開集合}\}$$

で集合関数 $\gamma, \gamma^*: 2^X \rightarrow \mathbb{R}^+$ を定義する. ただし, $\inf \emptyset = \infty$ と約束する.

(1) 集合関数 γ, γ^* は X 上の非加法的測度.

(2) 任意のコンパクト集合 K に対して $\gamma^*(K) < \infty$.

(3) 任意の開集合 G に対して $\gamma^*(G) = \sup \{\gamma^*(K) : K \subset G, K \text{ はコンパクト}\}$.

(4) 任意の $f \in C_0^+$ に対して $I(f) = (C) \int_X f d\gamma^*$.

注意 2 (1) 原論文 [6] では, γ^* は X のボレル集合からなる σ -集合体上で定義されているが, 実際には, 定理 2 のように, その定義域を 2^X 上に拡大できる.

(2) 注意 1 で述べたように, 定理 2 の (iii) は, (i) と (ii) より自動的に導かれる.

Greco 定理と定理 1 より, 定理 2 の改良と, その別証明を与えることができる.

定理 3 汎関数 $I: C_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ は

(i) $f, g \in C_0^+$ で $f \leq g$ ならば $I(f) \leq I(g)$

(ii) $f, g \in C_0^+$ で $f \sim g$ ならば $I(f+g) = I(f) + I(g)$

を満たすとする. 各 $A \subset X$ に対して

$$\alpha(A) := \sup \{I(f) : f \in C_0^+, f \leq \chi_A\}$$

$$\beta(A) := \inf \{I(f) : f \in C_0^+, \chi_A \leq f\}$$

$$\gamma(A) := \sup \{I(f) : f \in C_0^+, 0 \leq f \leq 1, S(f) \subset A\}$$

$$\alpha^*(A) := \inf \{\alpha(G) : A \subset G, G \text{ は開集合}\}$$

$$\beta^*(A) := \sup \{\beta(K) : K \subset A, K \text{ はコンパクト}\}$$

$$\gamma^*(A) := \inf \{\gamma(G) : A \subset G, G \text{ は開集合}\}$$

で集合関数 $\alpha, \beta, \gamma, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*: 2^X \rightarrow \mathbb{R}^+$ を定義する. ただし, $\inf \emptyset = \infty$ と約束する.

(1) 集合関数 $\alpha, \beta, \gamma, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ は X 上の非加法的測度.

(2) X 上の非加法的測度 λ に対して, 次の条件は同値:

(a) $\alpha \leq \lambda \leq \beta$.

(b) 任意の $f \in C_0^+$ に対して $I(f) = (C) \int_X f d\lambda$.

(3) 任意のコンパクト集合 K に対して $\gamma^*(K) = \beta(K) < \infty$.

(4) 任意の開集合 G に対して $\gamma^*(G) = \sup \{\gamma^*(K) : K \subset G, K \text{ はコンパクト}\}$.

(5) 任意の集合 A に対して $\gamma^*(A) = \inf \{\gamma^*(G) : A \subset G, G \text{ は開集合}\}$.

(6) 任意の集合 A に対して $\beta^*(A) = \sup \{\beta^*(K) : K \subset A, K \text{ はコンパクト}\}$.

(7) 任意のコンパクト集合 K に対して $\beta^*(K) = \inf \{\beta^*(G) : K \subset G, G \text{ は開集合}\}$.

(8) 任意の開集合 G に対して $\beta^*(G) = \gamma(G)$.

(9) $\alpha, \beta, \gamma, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ は比較可能, すなわち, $\alpha = \gamma \leq \beta^* \leq \alpha^* = \gamma^* \leq \beta$. それゆえ, これらはすべて I の表現測度となる.

証明 (1) 容易に示せる.

(2) $\mathcal{F} = C_0^+$ とおくと, Greco 定理の (i)–(iii), (v), (vi) が成り立つ. 以下では, (iv), (vii), (viii) を示す.

(iv) $0 \in C_0^+$ で $0 \sim 0$ なので, 共単調加法性より

$I(0) = I(0+0) = I(0) + I(0)$. よって, $I(0) = 0$.

(vii) $f \in C_{00}^+$ とする. $S(f)$ はコンパクトなので, [1, § 54 Theorem 3] より, $\exists g \in C_{00}^+, \chi_{S(f)} \leq g$. ここで, $\chi_{\{f>0\}} \leq \chi_{S(f)}$ なので $\chi_{\{f>0\}} \leq g$. ゆえに, 定理 1 の (i) が成り立つ.

(viii) 任意の $f \in C_{00}^+$ は有界なので, 定理 1 の (ii) が成り立つ.

(3) K はコンパクト集合とする. 定理 [1, § 54 Theorem 3] より, $\exists f_0 \in C_{00}^+, \chi_K \leq f_0$. よって, $\beta(K) \leq I(f_0) < \infty$.

次に, $\gamma^*(K) \leq \beta(K)$ を示す. 任意に $f \in C_{00}^+$ をとり, $\chi_K \leq f$ とする. 各 $0 < r < 1$ に対して, $G_r := \{f > r\}$ とおくと, $K \subset G_r$. さて, 任意の $g \in C_{00}^+$ に対して $0 \leq g \leq 1$ かつ $S(g) \subset G_r$ とすると, $rg \leq f$. よって, $\gamma^*(K) \leq \gamma(G_r) \leq I(f/r) = I(f)/r$. そこで, $r \uparrow 1$ とすると, $\gamma^*(K) \leq I(f)$. ゆえに, $\gamma^*(K) \leq \beta(K)$ が成り立つ.

$\gamma^*(K) \geq \beta(K)$ の証明は以下の通り. 任意に $\varepsilon > 0$ を固定して, $G \supset K$ かつ $\gamma(G) \leq \gamma^*(K) + \varepsilon$ を満たす開集合 G を選ぶ. 定理 [1, § 54 Theorem 3] より, $\exists f_0 \in C_{00}^+, 0 \leq f_0 \leq 1, S(f_0) \subset G, \chi_K \leq f_0 \leq \chi_G$. よって, $\gamma^*(K) + \varepsilon \geq I(f_0) \geq \beta(K)$. そこで, $\varepsilon \downarrow 0$ とすると, $\gamma^*(K) \geq \beta(K)$ が得られる.

(4) G は開集合とする. $\gamma^*(G) \geq \sup \{\gamma^*(K) : K \subset G, K \text{ はコンパクト}\}$ は明らか. よって, 逆向きの不等式を示す. 任意に $r < \gamma^*(G) = \gamma(G)$ をとり, $0 \leq f_0 \leq 1, S(f_0) \subset G, r < I(f_0)$ を満たす $f_0 \in C_{00}^+$ を選ぶ. $K_0 := S(f_0)$ とおく. このとき, 任意の開集合 $H \supset K_0$ に対して, $\gamma(H) \geq I(f_0) > r$. よって, $\gamma^*(K_0) \geq r$. K_0 はコンパクトなので, $r \leq \sup \{\gamma^*(K) : K \subset G, K \text{ はコンパクト}\}$. そこで, $r \uparrow \gamma^*(G)$ とすれば, 逆向きの不等式が得られる.

(5), (6) これらの証明は明らか.

(7) K はコンパクト集合とする. 明らかに, $\beta^*(K) \leq \inf \{\beta^*(G) : K \subset G, G \text{ は開集合}\}$. よって, 逆向きの不等式を示す. 任意に $0 < r < 1$ を固定して, $\chi_K \leq f_0, I(f_0) \leq \beta(K) + r$ を満たす $f_0 \in C_{00}^+$ をとる. $G_r := \{f_0 > 1-r\}$ とおくと, $K \subset G_r, \chi_{G_r} \leq f_0/(1-r)$. さて, 任意のコンパクト集合 $L \subset G_r$ に対して, $\chi_L \leq f_0/(1-r)$ なので, $\beta(L) \leq I(f_0/(1-r)) = I(f_0)/(1-r)$. ゆえに, $\beta^*(G_r) \leq I(f_0)/(1-r)$. よって, $\inf \{\beta^*(G) : K \subset G, G \text{ は開集合}\} \leq (\beta(K) + r)/(1-r) = (\beta^*(K) + r)/(1-r)$. そこで, $r \downarrow 0$ とすると, 逆向きの不等式が得られる.

(8) この定理の (3) と (4) より導ける.

(9) 以下では, $\beta^* \leq \gamma^*, \alpha = \gamma, \alpha \leq \beta^*, \alpha^* \leq \beta$ を

示す. このとき, α^*, γ^* の定義と $\alpha = \gamma$ より, $\alpha^* = \gamma^*$ となるので, 大小関係が決定する.

$A \subset X$ とする. 任意のコンパクト集合 K と開集合 G が $K \subset A \subset G$ を満たせば, [1, § 54 Theorem 3] より, $\exists f_0 \in C_{00}^+, 0 \leq f_0 \leq 1, S(f_0) \subset G, \chi_K \leq f_0 \leq \chi_G$. よって, $\beta(K) \leq \gamma(G)$. それゆえ, $\beta^* \leq \gamma^*$.

定義より $\gamma \leq \alpha$ は明らか. よって, $\alpha \leq \gamma$ を示す. この定理の (2) と (8) より, 任意の $f \in C_{00}^+$ に対して, $I(f) = (C) \int_X f d\beta = \int_0^\infty \beta(\{f \geq t\}) dt = \int_0^\infty \beta(\{f > t\}) dt = \int_0^\infty \gamma(\{f > t\}) dt = (C) \int_X f d\gamma$. よって, 再び (2) より, $\alpha \leq \gamma$. 同様にして, $\alpha \leq \beta^*$ と $\alpha^* \leq \beta$ も示せる.

注意 3 菅野らが [6] で構成した非加法的測度は γ^* である.

5. おわりに

この論文では, Greco 定理と定理 1 を用いて, 菅野らの Riesz 型積分表示定理の改良と, その別証明を与えた. 実際には, われわれの汎用的な手法を用いれば, 様々な関数空間や数列空間上の共単調加法的な汎関数に対する Riesz 型積分表示定理が得られる.

参考文献

- [1] S.K. Berberian, Measure and Integration, Macmillan, New York, 1965.
- [2] G. Choquet, Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier Grenoble 5 (1953-54) 131-295.
- [3] D. Denneberg, Non-Additive Measure and Integral, second ed., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
- [4] G.H. Greco, Sulla rappresentazione di funzionali mediante integrali, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 66 (1982) 21-42.
- [5] Y. Narukawa, T. Murofushi, M. Sugeno, Regular fuzzy measure and representation of comonotonically additive functional, Fuzzy Sets and Systems 112 (2000) 177-186.
- [6] M. Sugeno, Y. Narukawa, T. Murofushi, Choquet integral and fuzzy measures on locally compact space, Fuzzy Sets and Systems 99 (1998) 205-211.

(2011年1月31日 受付)

(2011年4月21日 採録)

[問い合わせ先]

〒380-8553 長野市若里4-17-1

信州大学工学部

河邊 淳

TEL : 026-269-5562 5562(内線)

FAX : 026-269-5562

E-mail : jkawabe@shinshu-u.ac.jp

著者紹介

 かわべ じゅん
河邊 淳 [非会員]

1986年東京工業大学大学院理工学研究科博士後期課程情報科学専攻修了。信州大学工学部講師，助教授を経て，2003年教授，現在に至る。理学博士。非加法的測度論，実解析学，関数解析学の研究に従事。日本数学会，国際数理科学協会会員。

 そうま ただひろ
相馬 匡博 [非会員]

2011年信州大学大学院工学系研究科修士課程電気電子工学専攻修了。工学修士。現在，日立公共システムサービス株式会社にてシステム運営の仕事に従事。

A Riesz type integral representation theorem of comonotonically additive functionals

by

Jun KAWABE and Tadahiro SOMA

Abstract :

The famous Greco theorem (G.H. Greco, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 66, 21-42, 1982) and our new method of proof lead us to an improvement and another proof of Sugeno-Narukawa-Murofushi's Riesz type integral representation theorem (M. Sugeno et al., Fuzzy Sets and Systems, 99, 205-211, 1998) for comonotonically additive functionals.

Keywords : nonadditive measure, comonotonic additivity, Choquet integral, Riesz type integral representation theorem

Contact Address : **Jun KAWABE**

Faculty of Engineering, Shinshu University
4-17-1, Wakasato, Nagano, 380-8553, JAPAN
TEL : 026-269-5562 (5562)
FAX : 026-269-5562
E-mail : jkawabe@shinshu-u.ac.jp