原著論文

不完備情報の下での協力ゲームの基礎的考察†

梶屋 聡*・乾口 雅弘*

古典的な協力ゲームの理論では、すべての提携に対してそれらの提携の得る利得はわかっているものと仮定している。しかし、現実の問題では、いくつかの提携に対する利得がわかっていないことが多い。本研究では、提携値に関する情報が不完備な協力ゲームについて考察する。不完備情報協力ゲームに関するいくつかの概念を提案するとともに、個人提携と全体提携の値のみが与えられる協力ゲームの解概念について考察し、プレイヤーが参考にすると考えられる焦点解を示す。

キーワード：協力ゲーム、上限ゲーム、下限ゲーム、参照点ゲーム、Shapley 値、仁

1. はじめに

協力ゲーム理論は、費用(便益)分担問題や投票における影響力などの分析を行う有用な道具となっている。協力ゲームは、 n 人のプレイヤーとプレイヤー全体の各部分集合(これを提携と呼ぶ)に対して実数値を与えるような関数(これを特性関数と呼ぶ)によって記述される。協力ゲームの解には、 n 次元実数ベクトルの集合で表されるものと、値(value)や一点解と呼ばれる唯一つの n 次元実数ベクトルで表されるものがある。これらの n 次元実数ベクトルは、全体で生じるコストに対する各プレイヤーの負担額や全体利得に対する分け前、もしくはプレイヤー間の力関係などを表す。これまでに提案されてきた代表的な協力ゲームの解には、コア、Shapley値、仁などがある。コアは利得ベクトルの集合によって表現され、Shapley値や仁は一点解である。

von NeumannとMorgenstern[14]による従来の協力ゲームの理論では、すべての提携に対する特性関数値(提携値という)がわかっているような状況を仮定している。しかし、提携の数はプレイヤー数に対して指数的に増大するので、現実問題においてはすべての提携値が容易にわかるとは限らない。提携値が不明確な状況を取り扱った協力ゲームは、未だあまり研究されていない。PolkowskiとAraszkiewicz[8]では、提携構造に対して部分的にしか情報が与えられていないような協力ゲームに対して、各提携値およびShapley値を予測する問題について考察し、ラフ集合[7]を用いて上近似ゲームと下近似ゲームを推定し、上近似

Shapley値、下近似Shapley値を求めている。

協力ゲームと同様にべき集合のすべての要素集合に値が必要なファジィ測度の分野でも、すべての要素集合に対する値を得ることが困難であることから、一部の要素集合の値の情報からファジィ測度の性質を仮定して全体の値を補うため、 k -加法性[4]や包除族[12]の概念が導入されている。

本研究では、各プレイヤーがゲームの構造を完全に理解できておらず、いくつかの提携値を把握していない状況下での協力ゲーム、すなわち、不完備情報の下での協力ゲームを、より素朴で単純な方法で取り扱う。PolkowskiとAraszkiewicz[8]の研究では、いくつかのアレンジメント(全体提携の分割)とそれぞれのアレンジメントの下での各プレイヤーが得る値が与えられると仮定している。一方、 k -加法性[4]や包除族[12]では、提携間の性質を仮定することになる。本研究では、アレンジメントに関する既知情報や他の提携値からある提携の値が一意に定まるといほど強い性質を仮定しないが、優加法性を仮定する。提携値が完全にわかっていない協力ゲームを単に“不完備ゲーム”と呼び、すべての提携値がわかっている協力ゲーム、すなわち、通常の協力ゲームを“完備ゲーム”と呼ぶことにする。

不完備ゲームが与えられると、それから想定できる協力ゲームの範囲を示しうる上限ゲームと下限ゲームとが求められる。考えている協力ゲームが優加法的であると仮定すると、下限ゲームは優加法的となるが、上限ゲームは必ずしも優加法的とならないことが示される。そこで、各提携に依存して上限値が定められる優加法な完備ゲームが導入され、上限ゲームの意義が述べられる。次に、不完備ゲームの解について考察する。ここでは、最も単純な不完備ゲームを取り上げる。すなわち、全体提携の値と各個人提携の値のみが

† Fundamental Study for the Theory of Cooperative Games under Incomplete Information

Satoshi MASUYA and Masahiro INUIGUCHI

* 大阪大学大学院基礎工学研究科
Graduate School of Engineering Science, Osaka University

わかっている不完備ゲームについて考える. この不完備ゲームに対する下限ゲームと上限ゲームのShapley値と仁がすべて一致することが示される. この不完備ゲームと整合する任意の優加法ゲームが $(2^n - n - 1)$ 個の完備ゲームの線形結合として表されることを示すとともに, $(2^n - n - 1)$ 個の完備ゲームのShapley値と仁を示す. また, 参照点ゲームが導入され, 任意の参照点ゲームのShapley値と仁が下限ゲームと上限ゲームのそれらと一致することが示される. これにより, この解が多くの観点から一致して得られる焦点解であることが述べられる.

本論文は以下のような構成となっている. 第2節では, 通常の協力ゲームとここで用いる代表的な解概念について簡単に説明する. 第3節では, 不完備情報の下での協力ゲームとそれから得られる上限ゲーム, 下限ゲームについて吟味される. また, 全体提携値とすべての個人提携値のみがわかっている不完備ゲームが考察される. 第4節では, 全体提携値とすべての個人提携値のみがわかっている不完備ゲームに対するShapley値と仁が検討される. 第5節では, 結論と今後の研究課題が与えられる.

2. 古典的な協力ゲームの理論

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ をプレイヤーの集合とし, v を $v(\emptyset) = 0$ を満たす 2^N から $\mathbb{R}$ への関数とする. このとき, 協力ゲームは対 (N, v) で与えられる. プレイヤーの集合 $S \subseteq N$ は提携と呼ばれ, 関数値 $v(S) \in \mathbb{R}$ は提携 S が形成されたときに, S が得る利得を表す. $v(S)$ は S の提携値と呼ばれる.

次式(1), (2), (3)を満たすとき, かつそのときに限り, それぞれ, (N, v) は単調(monotone), 優加法的(superadditive), 凸(convex)であるという.

$$v(T) \geq v(S), \forall S \subseteq T \subseteq N \quad (1)$$

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \forall S, T \subseteq N \text{ such that } S \cap T = \emptyset \quad (2)$$

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T), \forall S, T \subseteq N \quad (3)$$

優加法性は, より大きな提携を形成させる誘因を与える自然な性質である. また, 任意の $j \in N$ について, $v(\{j\}) \geq 0$ となるとき, 優加法的な協力ゲームは単調となる. 凸性は優加法性よりも強い性質であり, 凸性は次のように表わすこともできる.

$$v(T \cup \{i\}) - v(T) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S), \quad \forall S \subseteq T \subseteq N \setminus i, \forall i \in N \quad (4)$$

ただし, 簡単のため, $S \setminus \{i\}$ を $S \setminus i$ と表している.

この式は, 各プレイヤーの限界貢献度が提携の包含関係に関して単調であることと, 協力ゲームが凸であることは同値であることを表している.

凸性より強い性質として, 正值性(positivity)がある. 任意の $T \subseteq N$ に対して, (Harsanyi) dividend [5, 13] $d_T(v)$ は,

$$d_T(v) = \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|T| - |S|} v(S) \quad (5)$$

と定められる. ただし, $|T|$ は集合 T の基数で, T の要素の数を示している. dividend $d_T(v)$ は v の Möbius 変換 [16, 17] における提携 T の値である. dividend $d_T(v)$ は,

$$d_T(v) = \begin{cases} 0, & \text{if } T = \emptyset \\ v(\{i\}), & \text{if } T = \{i\} \text{ for } i \in N \\ v(T) - \sum_{S \subset T} d_S(v), & \text{if } T \subseteq N, |T| > 1 \end{cases} \quad (6)$$

と表すことができる. v は $d_T(v)$ を用いて次式で表せることが知られている.

$$v(S) = \sum_{T \subseteq S} d_T(v) \quad (7)$$

ただし, $d_\emptyset(v) = 0$ と定義する.

式(7)より, $d_T(v)$, $\forall T \subseteq N (T \neq \emptyset)$ を与えることにより, 協力ゲーム (N, v) を任意に定められることがわかる.

dividend $d_T(v)$ が次式(8), (9)を満たすとき, かつそのときに限り, それぞれ, (N, v) は正值(positive), ほとんど正值(almost positive)であるという [13].

$$d_T(v) \geq 0, \forall T \subseteq N \quad (8)$$

$$d_T(v) \geq 0, \forall T \subseteq N \text{ such that } |T| > 1 \quad (9)$$

なお, 集合関数 v が式(8)を満たすとき, Choquet [2] は v は ∞ -単調(∞ -monotone)であると定めており, ∞ -単調は全単調(totally monotone)と呼ばれることもある [3]. 一方, Chateauneuf と Jaffray [1] は, v が式(9)を満たすとき, v を ∞ -単調と定めている [1]. また, $v(N) = 1$ となる正值な v は belief 関数 [10] とも呼ばれる.

(N, v) がほとんど正值であるとき, かつそのときに限り,

$$v\left(\bigcup_{i=1,2,\dots,p} S_i\right) \geq \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,p\}} (-1)^{|I|+1} v\left(\bigcap_{i \in I} S_i\right), \quad \forall S_i \subseteq N, i = 1, 2, \dots, p \quad (10)$$

が成立する。実際、任意の $T(|T|>1)$ に対して、 $S_i = T \setminus j(i)$, $j(i) \in T$ ($j(i)$ は T 内の i 番目のプレイヤー) と $|T|$ 個の S_i を定め、式(10)を適用すると、式(6)より $d_T(v) \geq 0$ が得られるので、式(10)から式(9)が導ける。逆は、いずれの $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ に対しても $T \subseteq S_i$ が成立しない $T \subseteq \bigcup_{i=1, 2, \dots, p} S_i$ が存在しうること、そのような T が存在すれば必ず $|T|>1$ となることに注意すれば、式(7)と式(9)から、式(10)が導ける。

(N, v) がほとんど正直であることは、式(10)が成立することと等価であり、 $p=2$ のとき、式(10)は式(3)に帰着するので、ほとんど正直であることは凸性より強い性質であることがわかる。これを少し強めたものが正直であることとなる。

次に、協力ゲームにおける主な解概念を紹介する。協力ゲーム理論では、全体提携 N が形成されると仮定され、得られる利得 $v(N)$ を各プレイヤー間でどのように分配するかが議論される。したがって、解は n 次元実数ベクトル $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 、あるいはその集合となる。ここで、 x_i はプレイヤー i の受取る配分利得を表すので、 x を利得ベクトルと呼ぶこともある。これまでにたくさんの解概念が提案されているが、ここではコア、Shapley値および仁について述べる。

いずれの解も、次の配分の集合 $I(N, v)$ の要素、あるいは部分集合である。

$$I(N, v) = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \sum_{i \in N} x_i = v(N), \quad x_i \geq v(\{i\}), \quad \forall i \in N \end{array} \right. \right\}. \quad (11)$$

条件 $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ は効率性と呼ばれ、各プレイヤーの得られる配分利得は $v(N)$ を過不足なく分け与えたものであることを意味する。また、条件 $x_i \geq v(\{i\})$, $\forall i \in N$ は個人合理性と呼ばれ、各プレイヤーの得る配分利得は、そのプレイヤーが1人で行動したときに得られる利得を下回らないことを意味する。

(N, v) に対するコア $C(N, v)$ は、どのような提携 $S \subseteq N$ に対しても、得られる利得が改善できないような利得ベクトルの集合のことで、次式で定義される。

$$C(N, v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \sum_{i \in N} x_i = v(N), \\ \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad \forall S \subseteq N \end{array} \right. \right\}. \quad (12)$$

明らかに、 $C(N, v) \subseteq I(N, v)$ が成り立つ。条件 $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$, $\forall S \subseteq N$ は提携合理性と呼ばれ、どのような

提携も、提携を形成するプレイヤーの得る利得の総和よりも高い利得を得ることはできないことを意味する。したがって、コアに属する利得ベクトルのもとでは、どのプレイヤーも全体提携から逸脱する動機をもたないことになる。

コアは利得ベクトルの集合と考えられているが、空になることや逆に大きな集合となることもある。これにより、コアは各プレイヤーの得られる利得の範囲を見積もる場合には有用であるが、利得配分問題や費用分担問題などに用いる場合には、唯一つの利得ベクトルから構成される解が必要となる場合が多い。

Shapley値と仁は一点解である。仁は常に配分に含まれ、コアが存在する場合には、必ずコアに含まれる。また、Shapley値は、協力ゲームが優加法的である場合は、配分に含まれ、凸である場合はコアに含まれ、その重心となる。

$G(N)$ を優加法的な協力ゲーム (N, v) の全体とする。簡便のため、プレイヤーの集合は固定されているので、協力ゲーム (N, v) を単に v と表すことにする。協力ゲームに対して利得ベクトルを与える関数を $\pi: G(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ とする。 π の第 i 成分を π_i と表すことにする。

Shapley値は4つの公理、ナルプレイヤーのゼロ評価、対称性、効率性、加法性により特徴付けられる。プレイヤー i を含む任意の提携 $S \subseteq N$ に対して、 $v(S) - v(S \setminus i) = 0$ となると、プレイヤー i をナルプレイヤーという。ナルプレイヤーのゼロ評価の公理とは、 i がナルプレイヤーであれば、 $\pi_i(v) = 0$ が成り立つということを用いる。対称性公理とは、 $\{i, j\} \subseteq S$ なる任意の $S \subseteq N$ に対して、 $v(S \setminus i) = v(S \setminus j)$ が成立するとき、 $\pi_i(v) = \pi_j(v)$ が成り立つということを用いる。効率性公理とは、 $\sum_{i \in N} \pi_i(v) = v(N)$ が成り立つことをいう。2つの協力ゲーム $v, w \in G(N)$ の和ゲーム $v+w \in G(N)$ を $(v+w)(S) = v(S) + w(S)$, $\forall S \subseteq N$ と定義すると、加法性公理は、 $\pi(v+w) = \pi(v) + \pi(w)$ $\forall v, w \in G(N)$ を満たすことをいう。Shapley値はこれら4つ公理を満たす唯一つの $\pi: G(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ であることが知られており[11]、これを ϕ で表すと、次のように表現される。

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{S \ni i \\ S \subseteq N}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} (v(S) - v(S \setminus i)), \quad \forall i \in N \quad (13)$$

ただし、 ϕ_i は ϕ の第 i 成分を表し、 $|S|$ は提携 S に帰属するプレイヤー数を表す。

Shapley値はdividend $d_T(v)$ を用いて次のように表せることが知られている[13, 17]。

$$\phi_i(v) = \sum_{T \subseteq N, T \ni i} \frac{d_T(v)}{|T|} \quad (14)$$

式(13)に示すように、Shapley値 $\phi_i(v)$ がプレイヤー i の限界貢献度 $v(S) - v(S \setminus i)$ ($i \in S \subseteq N$)の期待値であるのに対して、仁は、プレイヤーの不満を辞書式に最小化する配分として定義される[9]。提携 $S \subseteq N$ の利得ベクトル $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対する余剰分は、 $e(S, x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$ となる。これは提携 S に帰属するプレイヤーの不満と考えることができる。 $S \neq \emptyset$ なる $S \subseteq N$ に対して、 $e(S, x)$ を大きい順に並べた $(2^n - 2)$ 次元ベクトル $\theta(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \dots, \theta_{2^n-2}(x))$ を考える。このとき、 $\theta_1(x) < \theta_1(y)$ が成り立つとき、または、すべての $i < h$ に対して $\theta_i(x) = \theta_i(y)$ かつ $\theta_h(x) < \theta_h(y)$ となる $h \leq 2^n - 2$ が存在するとき、利得ベクトル x は利得ベクトル y よりも辞書式に小さいという。ゲーム v に対する仁とは、辞書式に最も小さい配分のことをいう。仁は唯一つに定まることが知られており、これを $\eta(v) = (\eta_1(v), \eta_2(v), \dots, \eta_n(v))$ と表すことにする。

ゲーム v に対する仁は、次の手順に示すように、線形計画問題(LP問題)を繰り返し解くことによって求められる[6]。

手順 1. $q=1$, $\mathcal{V}_1 = \{S \mid S \subseteq N, S \neq \{i\}, S \neq N\}$, $\mathcal{F}_1 = \emptyset$ と定める。

手順 2. 次の線形計画問題を解き、最適解 $(\hat{x}, \hat{\varepsilon})$ を求める。

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \varepsilon, \\ & \text{subject to } v(S) - \sum_{i \in S} x_i \leq \varepsilon, \quad \forall S \in \mathcal{V}_q, \\ & \quad v(S) - \sum_{i \in S} x_i \leq e_S, \quad \forall S \in \mathcal{F}_q, \\ & \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = v(N), \\ & \quad x_i \geq v(\{i\}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (15)$$

手順 3. $(\hat{x}, \hat{\varepsilon})$ が問題(15)の唯一解であれば、仁は $\eta(v) = \hat{x}$ と求められ、終了する。そうでなければ、 $\mathcal{A}_q = \{S \in \mathcal{V}_q \mid v(S) - \sum_{i \in S} \hat{x}_i = \hat{\varepsilon}\}$ を求め、 $\mathcal{V}_{q+1} = \mathcal{V}_q - \mathcal{A}_q$, $\mathcal{F}_{q+1} = \mathcal{F}_q \cup \mathcal{A}_q$ と定めるとともに、 $S \in \mathcal{A}_q$ に対して $e_S = \hat{\varepsilon}$ とする。

手順 4. $q=q+1$ として手順 2 に戻る。

$\mathcal{V}_q$ は、最適解 $(\hat{x}, \hat{\varepsilon})$ においてアクティブになる線形問題の制約条件をもつ提携の集合である。また、手順における定義から明らかなように、任意の q に対して、 $\mathcal{V}_q \cap \mathcal{F}_q = \emptyset$, $\mathcal{V}_q \cup \mathcal{F}_q = \mathcal{V}_1$ となる。

任意の $S, T \subseteq N$ に対して、 $|S|=|T|$ ならば $v(S) = v(T)$ が成立するゲーム v は対称ゲームと呼ばれる。対称ゲームのShapley値と仁は一致し、次式で容易に求められる[15]。

$$\phi_i(v) = \eta_i(v) = \frac{v(N)}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

2つの協力ゲーム (N, v) , (N, v') について、ある実数 $c > 0$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ が存在して、

$$v'(S) = c \cdot v(S) + \sum_{i \in S} a_i, \quad \forall S \subseteq N, \quad (17)$$

が成り立つとき、 (N, v') は (N, v) に戦略的同等であるという。特に、ゲーム (N, v) に対して、 $\bar{v}(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(\{i\})$ $\forall S \subseteq N$ と定義される戦略的同等なゲーム $(N, \bar{v})$ をゼロ正規化ゲームと呼ぶ。ゼロ正規化ゲーム $(N, \bar{v})$ に対して、明らかに $\bar{v}(\{i\}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ が成り立つ。

協力ゲーム (N, v) の解を $\zeta(v) = (\zeta_1(v), \zeta_2(v), \dots, \zeta_n(v))$ とすると、

$$\zeta_i(v') = c \cdot \zeta_i(v) + a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

が成立すれば、解 $\zeta(v)$ は戦略的同等な変換に対して不変であるという。特に、ゼロ正規化ゲーム $(N, \bar{v})$ に対して、式(18)は次のようになる。

$$\zeta_i(v) = \zeta_i(\bar{v}) + v(\{i\}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

本節で述べたShapley値と仁はいずれも戦略的同等な変換に対して不変である。また、 (N, v') を式(17)で定められる (N, v) と戦略的同等なゲームとすると、これらのゲームのコア $C(N, v)$ と $C(N, v')$ に対して、次式が成立する。

$$C(N, v') = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \mid y_i = cx_i + a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C(N, v)\}$$

この意味で、コアは戦略的同等な変換に対して、不変であるをとらえることもできる。

本節の最後に、ゼロ正規化ゲーム $(N, \bar{v})$ のdividendに関する性質を次の命題に示す。

命題 1 $(N, \bar{v})$ を協力ゲーム (N, v) のゼロ正規化ゲームとする。このとき、以下が成り立つ。

$$(a) \quad d_T(\bar{v}) = 0 \text{ for } |T| = 1$$

$$(b) \quad d_T(\bar{v}) = d_T(v), \quad \forall T \subseteq N \text{ and } |T| > 1$$

3. 不完備情報の下での協力ゲーム

3.1 一般の場合：上下限ゲームとそれらの性質

通常の協力ゲームでは、すべての提携値はわかっているものと仮定している。しかし、現実には、いくつかの提携に対する提携値がわからないことが少なくない。本研究では、いくつかの提携値がわからない不完備ゲームについて考察する。

不完備ゲームは、プレイヤーの集合を $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 、提携値がわかっている提携の集合を $K \subseteq 2^N$ 、関数 $\nu: K \rightarrow \mathbb{R}$ によって特徴づけることができる。すなわち、不完備ゲームは3重対 (N, K, ν) によって定められる。ただし、 $\emptyset \in K$ とし、 $\nu(\emptyset) = 0$ と仮定する。また、各プレイヤー1人からなる提携と全体提携に対する提携値は必ずわかっているものと仮定する。すなわち、 $\{i\} \in K, i = 1, 2, \dots, n$ と $N \in K$ が成り立つものと仮定する。本研究では、単調で優加法的な協力ゲームを考えるので、不完備ゲーム ν にも単調性と優加法性を仮定する。すなわち、次が成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned} \nu(S) &\geq \sum_{i=1}^s \nu(T_i), \forall S, T_i \in K, i = 1, 2, \dots, s \\ \text{such that } \bigcup_{i=1, 2, \dots, s} T_i &\subseteq S \text{ and } T_i, i = 1, 2, \dots, s \\ &\text{are disjoint.} \end{aligned} \quad (20)$$

任意の $j \in N$ について、 $S = \{j\}, s = 1, T_1 = \emptyset$ とすると、 $\nu(\{j\}) \geq 0$ となることに注意しよう。

本研究では、 N と K は固定して考えるので、不完備ゲーム (N, K, ν) を単に ν と記すこともある。

不完備ゲーム (N, K, ν) に対して、次の2つの完備ゲーム $(N, \underline{\nu})$ 、 $(N, \overline{\nu})$ を考える。

$$\underline{\nu}(S) = \max_{\substack{T_i \in K, i=1, 2, \dots, s \\ \cup_i T_i \subseteq S, T_i \text{ are disjoint}}} \sum_{i=1}^s \nu(T_i) \quad (21)$$

$$\overline{\nu}(S) = \min_{\hat{S} \in K, \hat{S} \supseteq S} \left(\nu(\hat{S}) - \underline{\nu}(\hat{S} \setminus S) \right) \quad (22)$$

ν の優加法性より、 $\underline{\nu}(S) = \overline{\nu}(S)$ 、 $\forall S \in K$ が成り立つ。また、優加法性より、 $\nu(\{i\}) \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ となるので、 $\{i\} \in K, i = 1, 2, \dots, n$ より、

$$\underline{\nu}(S) = \max_{\substack{T_i \in K, i=1, 2, \dots, s \\ \cup_i T_i = S, T_i \text{ are disjoint}}} \sum_{i=1}^s \nu(T_i) \quad (23)$$

と書ける。

本研究では、 $v(T) = \nu(T)$ 、 $\forall T \in K$ となる完備ゲーム (N, v) を、 ν に関連する完備ゲームと呼ぶ。 (N, v) を ν に関連する完備ゲームとするとき、 v が優

加法的であるための必要十分条件は、

$$v(S) \geq \max_{\substack{T_i \in K, i=1, 2, \dots, s \\ \cup_i T_i \subseteq S, T_i \text{ are disjoint}}} \sum_{i=1}^s \nu(T_i), \forall S \subseteq N \quad (24)$$

となる。このことから、 $\underline{\nu}(S)$ は、不完備ゲーム ν に関連する優加法的な完備ゲームが定める S の提携値の下限を示していることがわかる。また、 $\overline{\nu}(S)$ は、不完備ゲーム ν に関連する完備ゲームが定める S の提携値の上限を示している。実際、式(20)および(23)より、任意の $\hat{S} \in K$ 、任意の $S \subseteq \hat{S}$ について、

$$\nu(\hat{S}) \geq \max_{\substack{T_i \in K, i=1, 2, \dots, s \\ \cup_i T_i = \hat{S} \setminus S, T_i \text{ are disjoint}}} \sum_{i=1}^s \nu(T_i) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} &+ \max_{\substack{T_i \in K, i=1, 2, \dots, s \\ \cup_i T_i = S, T_i \text{ are disjoint}}} \sum_{i=1}^s \nu(T_i) \\ &= \underline{\nu}(\hat{S} \setminus S) + \underline{\nu}(S) \end{aligned} \quad (26)$$

が成立するので、

$$\overline{\nu}(S) \geq \underline{\nu}(S), \forall S \subseteq N \quad (27)$$

となる。以上の説明から、完備ゲーム $(N, \underline{\nu})$ および $(N, \overline{\nu})$ をそれぞれ、不完備ゲーム (N, K, ν) の下限ゲーム、上限ゲームと呼ぶ。

これらの完備ゲームに関して次が成立する。

定理1 不完備ゲーム (N, K, ν) の下限ゲーム $(N, \underline{\nu})$ は単調で優加法的であり、上限ゲーム $(N, \overline{\nu})$ は単調性を満たすが、優加法的とは限らない。

証明 $A \cap B = \emptyset$ となる任意の $A, B \subseteq N$ を考える。このとき、明らかに、

$$\begin{aligned} &\left\{ \left\{ T_i \in K \mid i = 1, 2, \dots, s \right\} \mid \bigcup_{i=1, 2, \dots, s} T_i \subseteq A \cup B, \right. \\ &\quad \left. T_i \text{ are disjoint} \right\} \supseteq \\ &\left\{ \left\{ T_i \in K \mid i = 1, 2, \dots, s_A \right\} \mid \bigcup_{i=1, 2, \dots, s_A} T_i \subseteq A, \right. \\ &\quad \left. T_i \text{ are disjoint} \right\} \cup \left\{ \left\{ T_i \in K \mid i = 1, 2, \dots, s_B \right\} \mid \right. \\ &\quad \left. \bigcup_{i=1, 2, \dots, s_B} T_i \subseteq B, T_i \text{ are disjoint} \right\} \end{aligned}$$

が成立する。また、 $A \cap B = \emptyset$ より、

$$\left\{ \left\{ T_i \in \mathcal{K} \mid i = 1, 2, \dots, s_A \right\} \mid \bigcup_{i=1,2,\dots,s_A} T_i \subseteq A, \right. \\ \left. T_i \text{ are disjoint} \right\} \cap \left\{ \left\{ T_i \in \mathcal{K} \mid i = 1, 2, \dots, s_B \right\} \mid \right. \\ \left. \bigcup_{i=1,2,\dots,s_B} T_i \subseteq B, T_i \text{ are disjoint} \right\} = \emptyset$$

となる。Kに関する優加法性，すなわち，式(20)より，

$$\begin{aligned} \underline{\nu}(A \cup B) &= \max_{\substack{T_i \in \mathcal{K}, i=1,2,\dots,s \\ \bigcup_i T_i \subseteq A \cup B, T_i \text{ are disjoint}}} \sum_{i=1}^s \nu(T_i) \\ &\geq \max_{\substack{T_i \in \mathcal{K}, i=1,2,\dots,s_A \\ \bigcup_i T_i \subseteq A, T_i \text{ are disjoint}}} \sum_{i=1}^{s_A} \nu(T_i) \\ &\quad + \max_{\substack{T_i \in \mathcal{K}, i=1,2,\dots,s_B \\ \bigcup_i T_i \subseteq B, T_i \text{ are disjoint}}} \sum_{i=1}^{s_B} \nu(T_i) \\ &= \underline{\nu}(A) + \underline{\nu}(B). \end{aligned}$$

が成立し，下限ゲームでは優加法的であることが示せる。また，式(21)より，任意の $S \subseteq N$ について， $\underline{\nu}(S) \geq \nu(\emptyset) = 0$ となるので，下限ゲームは単調でもある。

次に上限ゲームが単調であることを示そう。 $S' \supseteq S$ なる任意の提携 S' と S を考える。明らかに，

$$\{\hat{S} \in \mathcal{K} \mid \hat{S} \supseteq S'\} \subseteq \{\hat{S} \in \mathcal{K} \mid \hat{S} \supseteq S\}$$

である。また，下限ゲームの単調性より， $T \in \{\hat{S} \in \mathcal{K} \mid \hat{S} \supseteq S'\}$ に対して，

$$\underline{\nu}(T \setminus S) \geq \underline{\nu}(T \setminus S')$$

となる。このことと式(22)より，

$$\begin{aligned} \overline{\nu}(S') &= \min_{\hat{S} \in \mathcal{K}, \hat{S} \supseteq S'} \left(\nu(\hat{S}) - \underline{\nu}(\hat{S} \setminus S') \right) = \overline{\nu}(S') \\ &\geq \min_{\hat{S} \in \mathcal{K}, \hat{S} \supseteq S'} \left(\nu(\hat{S}) - \underline{\nu}(\hat{S} \setminus S) \right) \\ &\geq \min_{\hat{S} \in \mathcal{K}, \hat{S} \supseteq S} \left(\nu(\hat{S}) - \underline{\nu}(\hat{S} \setminus S) \right) = \overline{\nu}(S) \end{aligned}$$

となり，上限ゲームの単調性が示せる。上限ゲームが優加法性を満たさない例を例1に示すので，この証明は省略する。□

不完備ゲーム ν に関連するすべての単調で優加法的な完備ゲームの集合を $V(\nu)$ と書くことにする。 ν に関して単調性と優加法性を仮定していることから， $\nu(\{i\}) \geq 0$ ， $\forall i \in N$ となり， $V(\nu)$ は次のように表現できる。

$$V(\nu) = \{v : 2^N \rightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ is superadditive and } v(S) = \nu(S), \forall S \in \mathcal{K}\} \quad (28)$$

ここで，任意の $i \in N$ について， $\{i\} \in \mathcal{K}$ であるので， $\nu(\{i\}) \geq 0$ となることより，完備ゲーム $v \in V(\nu)$ は単調でもある。

定理1より， $\underline{\nu} \in V(\nu)$ が成立するが， $\overline{\nu}$ については $V(\nu)$ に帰属するとは限らない。そこで， $\overline{\nu}$ の $V(\nu)$ に対する意義を明らかにするため，各提携 $T \subseteq N$ について， $\overline{\nu}(T) = \max \{v(T) \mid v \in V(\nu)\}$ となることを確認しよう。 $T \neq \emptyset$ ， $T \subseteq N$ に対して， $\overline{\nu}(T)$ は，不完備ゲーム ν に関連する完備ゲームが定める T の提携値の上限を示しているが，次の完備ゲーム v^T を考えれば，任意の $T \subseteq N$ に対して， $v^T(T) = \overline{\nu}(T)$ となる不完備ゲーム ν に関連する優加法的な完備ゲームが存在することがわかる。

$$v^T(S) = \begin{cases} \overline{\nu}(S) & \text{if } S \supseteq T \\ \underline{\nu}(S) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (29)$$

明らかに， $T = N$ のとき， $v^T = \underline{\nu}$ となる。

定理2 式(29)で与えられる完備ゲーム (N, v^T) ($T \neq \emptyset$) は，単調で優加法的である。

証明： $A \cap B = \emptyset$ なる任意の提携 A ， $B \subseteq N$ を考える。

$A \cup B \not\supseteq T$ であれば， $A \not\supseteq T$ かつ $B \not\supseteq T$ となるので， $v^T(A \cup B) = \underline{\nu}(A \cup B)$ ， $v^T(A) = \underline{\nu}(A)$ ， $v^T(B) = \underline{\nu}(B)$ となり，下限ゲームの優加法性より $v^T(A \cup B) \geq v^T(A) + v^T(B)$ となる。

$A \cup B \supseteq T$ のとき， $A \cap B = \emptyset$ より， $A \not\supseteq T$ あるいは $B \not\supseteq T$ となる。 $A \not\supseteq T$ とすると， $v^T(A \cup B) = \overline{\nu}(A \cup B)$ ， $v^T(A) = \underline{\nu}(A)$ となる。 $S^* \supseteq A \cup B$ なる $S^* \in \mathcal{K}$ を

$$\begin{aligned} \overline{\nu}(A \cup B) &= \min_{\hat{S} \in \mathcal{K}, \hat{S} \supseteq A \cup B} \left(\nu(\hat{S}) - \underline{\nu}(\hat{S} \setminus A \cup B) \right) \\ &= \nu(S^*) - \underline{\nu}(S^* \setminus A \cup B) \end{aligned}$$

と定めると， $S^* \supseteq B$ かつ $S^* \in \mathcal{K}$ であるので，

$$\begin{aligned} \overline{\nu}(A \cup B) - \overline{\nu}(B) &= \nu(S^*) - \underline{\nu}(S^* \setminus A \cup B) \\ &\quad - \min_{\hat{S} \in \mathcal{K}, \hat{S} \supseteq B} \left(\nu(\hat{S}) - \underline{\nu}(\hat{S} \setminus B) \right) \\ &\geq \nu(S^*) - \underline{\nu}(S^* \setminus A \cup B) - (\nu(S^*) - \underline{\nu}(S^* \setminus B)) \\ &= \underline{\nu}(S^* \setminus B) - \underline{\nu}(S^* \setminus A \cup B) \end{aligned}$$

となる。 $A \cap B = \emptyset$ より， $(S^* \setminus A \cup B) \cup A = S^* \setminus B$ となるので，下限ゲームの優加法性より，

$$\underline{\nu}(S^* \setminus B) - \underline{\nu}(S^* \setminus A \cup B) \geq \underline{\nu}(A)$$

が得られる。定義より，明らかに， $v^T(B) \leq \overline{\nu}(B)$ となるので，以上の不等号をまとめれば，

$$v^T(A \cup B) - v^T(B) \geq \overline{\nu}(A \cup B) - \overline{\nu}(B) \geq v^T(A)$$

が得られる。

$A \cup B \supseteq T$ かつ $B \not\supseteq T$ の場合も同様に、 $v^T(A \cup B) - v^T(A) \geq v^T(B)$ が示され、 v^T が優加法的であることが示される。

単調性は、定義より明らかに $v^T(\{i\}) = \nu(\{i\}) \geq 0$, $\forall i \in N$ であることと、優加法性より導かれる。

□

定理2より、任意の $T \subseteq N$ に対して、 $v^T \in V(\nu)$ となることがわかる。

任意の完備ゲームを v としたとき、優加法性の条件は、 $v(S)$, $S \in \mathcal{K}$ を変数とするような線形不等式によって記述することができるので、 $V(\nu)$ は凸多面集合となる。また、 $\underline{\nu}(S) \leq v(S) \leq \bar{\nu}(S)$, $\forall S \subseteq N$ より、 $V(\nu)$ は有界である。すなわち、 $V(\nu)$ は凸多面体である。 $V(\nu)$ の頂点のすべてを列挙することは容易ではないが、 v^T , $T \neq \emptyset$ がその一部となっていることがわかる。また、定理1より、上限ゲーム $\bar{\nu}$ は $V(\nu)$ に含まれるとは限らない。しかし、上限ゲーム $\bar{\nu}$ は、不完備情報の下でプレイヤーそれぞれが最大限の力を発揮すると主張した場合の完備ゲームである。

3.2 最低限の情報下での不完備ゲーム

本研究では、不完備ゲームの解について考察する。不完備ゲーム $(N, \mathcal{K}, \nu)$ が与えられると、これに関連する完備ゲーム v の集合 $V(\nu)$ が定められる。 $v \in V(\nu)$ なる任意の完備ゲーム v の配分を不完備ゲーム $(N, \mathcal{K}, \nu)$ の配分と呼ぶことにする。不完備ゲーム $(N, \mathcal{K}, \nu)$ の配分の全体を $I(N, \mathcal{K}, \nu)$ と書くことにすると、条件 $\mathcal{K} \supseteq \{\emptyset, N, \{i\}, i=1, 2, \dots, n\}$ より、不完備ゲーム $(N, \mathcal{K}, \nu)$ の配分の集合は、 $V(\nu)$ に含まれる任意の完備ゲームの配分の集合と一致する。たとえば、下限ゲームの配分の集合 $I(N, \underline{\nu})$ を考えてもよい。しかし、一般の不完備ゲームに対する他の解概念を議論することは複雑であるので、本研究では、研究の第1段階として、最も単純な不完備ゲームを考察する。最も単純な不完備ゲームは、全体提携に対する値と各プレイヤー1人だけの提携に対する値のみがわかっている不完備ゲームとなる。すなわち、 $\mathcal{K} = \{\emptyset, N, \{i\}, i=1, 2, \dots, n\}$ である場合を考察する。言い換えれば、最低限の情報しか得られない場合を考える。

現実問題においては、このような最も単純な不完備ゲームに遭遇することも少なくはないと考えられる。たとえば、全員で協力した場合の利得と各人が1人で行動した場合の利得はわかっているが、それ以外の、何人かが協力した場合の利得が、調査費用を投入しないとわからないような場合が考えられる。調査費用を投入してそれらの値を調べるのは、各プレイヤーに対

する配分利得が減少するから必ずしも得策ではない。

$\mathcal{K} = \{\emptyset, N, \{i\}, i=1, 2, \dots, n\}$ の場合、下限ゲームと上限ゲームは、次式で与えられる。

$$\underline{\nu}(S) = \begin{cases} 0 & \text{if } S = \emptyset \\ \nu(N) & \text{if } S = N \\ \sum_{i \in S} \nu(\{i\}) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (30)$$

$$\bar{\nu}(S) = \begin{cases} 0 & \text{if } S = \emptyset \\ \nu(\{i\}) & \text{if } S = \{i\} \\ \nu(N) - \sum_{i \notin S} \nu(\{i\}) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (31)$$

この場合、上限ゲームと下限ゲームとの間に次の関係が成立する。

$$\underline{\nu}(S) \leq \bar{\nu}(S), \forall S \subseteq N.$$

$$\underline{\nu}(S) = \bar{\nu}(S) = \nu(S), \forall S \in \mathcal{K}.$$

$$\bar{\nu}(S) = \nu(N) - \underline{\nu}(N \setminus S), \forall S \subset N \text{ such that } |S| > 1.$$

$$\underline{\nu}(S) = \nu(N) - \bar{\nu}(N \setminus S), \forall S \subset N \text{ such that } |S| < n-1.$$

全体提携が形成されたときの超過分 Δ を

$$\Delta = \nu(N) - \sum_{i \in N} \nu(\{i\}) \quad (32)$$

と定めると、式(20)より $\Delta \geq 0$ であり、

$$\underline{\nu}(S) = \begin{cases} 0 & \text{if } S = \emptyset \\ \Delta + \sum_{i \in N} \nu(\{i\}) & \text{if } S = N \\ \sum_{i \in S} \nu(\{i\}) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (33)$$

$$\bar{\nu}(S) = \begin{cases} 0 & \text{if } S = \emptyset \\ \nu(\{i\}) & \text{if } S = \{i\} \\ \Delta + \sum_{i \in S} \nu(\{i\}) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (34)$$

と書くこともできる。この表現より、下限ゲームでは、超過分 Δ を $S=N$ の場合に限り提携値に加えるのに対し、上限ゲームでは、超過分 Δ を $|S|>1$ であれば提携値に加えていることがわかる。

$|T|>1$ に対する式(29)の v^T についても具体的に示せば、次のようになる。

$$v^T(S) = \begin{cases} 0 & \text{if } S = \emptyset \\ \Delta + \sum_{i \in S} \nu(\{i\}) & \text{if } S \supseteq T \\ \sum_{i \in S} \nu(\{i\}) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (35)$$

これより、 v^T のゼロ正規化ゲームを $\bar{v}^T$ とすると、 $|T|>1$ なる $T \subseteq N$ に対して次式が得られる。

$$\bar{v}^T(S) = \begin{cases} \Delta & \text{if } S \supseteq T, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (36)$$

次の定理が得られる.

定理 3 下限ゲーム (N, ν) , および $|T| > 1$ なる任意の $T \subseteq N$ に対する完備ゲーム (N, v^T) は正值である.

証明: $T=N$ のとき, v^T は下限ゲームに一致するので, 完備ゲーム (N, v^T) が正值であることを示せば十分である.

命題 1 より, 完備ゲーム (N, v^T) のゼロ正規化ゲーム $(N, \bar{v}^T)$ が正值であることを示す. $S \supset T$, $S=T$, $S \subset T$ の 3 つのケースに分けて dividend $d_S(\bar{v}^T)$ を求めると, 以下ようになる.

$S \supset T$ のとき, $q = |T \setminus S|$ とすると, 式 (5) より, 次が得られる.

$$\begin{aligned} d_S(\bar{v}^T) &= \sum_{S' \subset T \setminus S} (-1)^{|S'|} \Delta \\ &= \left(\sum_{j=0}^q (-1)^j \binom{q}{j} \right) \Delta \\ &= 0 \end{aligned}$$

$S=T$ のとき, $T' \subset S$ に対して $\bar{v}^T(T') = 0$ となるので, $d_S(\bar{v}^T) = \Delta \geq 0$ となる.

$S \subset T$ のとき, $d_S(\bar{v}^T) = 0$ となる.

以上より, 任意の $S \subseteq N$ に対して, $d_S(\bar{v}^T) \geq 0$ となる. 命題 1 より, v がほとんど正值であることがわかる.

$S = \{i\}$, $i \in N$ に対して, $d_S(v^T) = v^T(\{i\}) = \nu(\{i\}) \geq 0$ となるので, 結局, v^T は正值となる. $\square$

定理 3 より, 完備ゲーム ν , および $|T| > 1$, $T \subseteq N$ である v^T は凸であるので, コアは必ず存在し, それらの Shapley 値はコアの重心となることがわかる.

いま, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ なる任意の $T_1, T_2 \subseteq N$ に対して,

$$E(T_1, T_2) = \{T \subseteq N \mid T \not\subseteq T_1, T \not\subseteq T_2, T \subseteq T_1 \cup T_2\} \quad (37)$$

と定義する.

次の定理が得られる.

定理 4 $v(\{i\}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $v(N) = \Delta$ を満たす任意の協力ゲーム (N, v) は, $|T| > 1$ なるすべての $T \subseteq N$ に対する v^T を用いて,

$$v = \sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T \bar{v}^T \quad (38)$$

と表せる. ただし, $(N, \bar{v})$ はゲーム (N, v) のゼロ正規化ゲームであり, $\sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T = 1$ となる. また, (N, v) が優加法的であるとき, かつそのときに限り, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ なる任意の $T_1, T_2 \subseteq N$ に対して次式が成立する.

$$\sum_{T \in E(T_1, T_2)} k_T \geq 0, \quad (39)$$

さらに, (N, v) が正值であるとき, かつそのときに限り, $|T| > 1$ なるすべての $T \subseteq N$ に対して, $k_T \geq 0$ となる.

証明: $|T| > 1$ について $\bar{v}^T(\{i\}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ であるので, 式 (7) および (36) より, $v(\{i\}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ を満たす任意の協力ゲーム (N, v) は,

$$v = \sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T \bar{v}^T$$

と表せることがわかる. また, $|T| > 1$ なるすべての $T \subseteq N$ に対して, $\bar{v}^T(N) = \Delta$ であるので, $v(N) = \Delta$ であるためには, $\sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T = 1$ でなければならない. さらに, 式 (38) で表される v の dividend $d_T(v)$ は, 式 (7) との対応から, $d_T(v) = k_T \Delta$ となることが容易にわかる. (N, v) が優加法的であることは, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ なる任意の $T_1, T_2 \subseteq N$ に対して,

$$\begin{aligned} v(T_1 \cup T_2) &= \sum_{T \subseteq T_1 \cup T_2} d_T(v) \geq v(T_1) + v(T_2) \\ &= \sum_{T \subseteq T_1} d_T(v) + \sum_{T \subseteq T_2} d_T(v) \end{aligned}$$

が成立することである. $d_T(v) = k_T \Delta$ であり, $\Delta \geq 0$ であることに注意すると, 式 (39) が成立することが (N, v) が優加法的であることの必要十分条件となる. 同様に, (N, v) が正值であるとき, かつそのときに限り, 任意の $T \subseteq N$ に対して, $d_T(v) = k_T \Delta \geq 0$ となるので, $|T| > 1$ なるすべての $T \subseteq N$ に対して, $k_T \geq 0$ となることが (N, v) が正值であることの必要十分条件となる. 以上より, 補題が得られる. $\square$

ゼロ正規化ゲームの定義より, 次の系が得られる.

系 1 $v(\{i\}) = \nu(\{i\})$, $i = 1, 2, \dots, n$, $v(N) = \nu(N)$ を満たす任意の協力ゲーム (N, v) は, $|T| > 1$ なるすべての $T \subseteq N$ に対する v^T , および $\sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T = 1$ なる k_T を用いて,

$$v = \sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T v^T \quad (40)$$

と表せる. v が優加法的, 正值である場合には, それ

ぞれ、式(39), $k_T \geq 0$ を満たす。

さらに、次の定理を得る。

定理 5 $\mathcal{K} = \{\emptyset, N, \{i\}, i=1, 2, \dots, n\}$ に対する $V(\nu)$ は次式が成立する。

$$V(\nu) = \left\{ v : 2^N \rightarrow \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} v = \sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T v^T, \\ \sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T = 1, \sum_{T \in E(T_1, T_2)} k_T \geq 0, \\ \forall T_1, T_2 \subseteq N \text{ such that } T_1 \cap T_2 = \emptyset \end{array} \right. \right\} \quad (41)$$

特に、 $V(\nu)$ に帰属する正直な完備ゲームの集合を $\hat{V}(\nu)$ とする。このとき、次式が成立する。

$$\hat{V}(\nu) = \left\{ v : 2^N \rightarrow \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} v = \sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T v^T, \\ \sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T = 1, \\ k_T \geq 0, \forall T \subseteq N \text{ such that } |T| > 1 \end{array} \right. \right\} \quad (42)$$

証明：簡便のため、式(41), (42)の右辺の式で定められる集合をそれぞれ、 $U, \hat{U}$ と記す。

系 1 より、 $V(\nu) \subseteq U, \hat{V}(\nu) \subseteq \hat{U}$ は明らかである。したがって、(i) $v \in U$ が優加法的であること、(ii) $\hat{v} \in \hat{U}$ が正直であることを示せばよい。

まず、(i)を示す。 $\sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T = 1$ となることと v^T の定義より、 $v(\{i\}) = \nu(\{i\}), i=1, 2, \dots, n, v(N) = \nu(N)$ を満たすことは明らかである。 $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ なる任意の $T_1, T_2 \subseteq N$ を考える。 $\sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T = 1$ より、

$$\begin{aligned} v(T_1 \cup T_2) &= \sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T v^T(T_1 \cup T_2) \\ &= \sum_{T \subseteq T_1 \cup T_2, |T| > 1} k_T \Delta + \sum_{i \in T_1 \cup T_2} \nu(\{i\}) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} v(T_j) &= \sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T v^T(T_j) \\ &= \sum_{T \subseteq T_j, |T| > 1} k_T \Delta + \sum_{i \in T_j} \nu(\{i\}), j=1, 2 \end{aligned}$$

が得られる。 $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ であることに注意すると、式(39)より、

$$v(T_1 \cup T_2) \geq v(T_1) + v(T_2)$$

が成立する。したがって、 $v \in U$ は優加法的となる。

次に(ii)を示す。任意の $\hat{v} \in \hat{U}$ を考える。 $\hat{v}$ に対応して、

$$\sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T = 1, k_T \geq 0, \forall T \subseteq N \text{ such that } |T| > 1$$

なる k_T が存在して、

$$\hat{v} = \sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T v^T,$$

と表せる。式(7)より、各 v^T は、任意の $S' \subseteq N$ について、

$$v^T(S') = \sum_{S \subseteq S'} d_S(v^T)$$

と表せるので、

$$\hat{v}(S') = \sum_{S \subseteq S'} \sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T d_S(v^T)$$

と書ける。このことより、任意の $S \subseteq N$ に対する $\hat{v}$ の dividend $d_S(\hat{v})$ は、

$$d_S(\hat{v}) = \sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T d_S(v^T)$$

となる。定理 3 より、 v^T は正直であるので、 $d_S(v^T) \geq 0$ となり、 $k_T \geq 0$ であったので、 $d_S(\hat{v}) \geq 0$ となる。すなわち、 $\hat{v}$ は正直となり、(ii) が得られる。□

定理 5 の後半は、 $|T| > 1$ であるような v^T は、 ν から得られる正直な完備ゲームの集合 $\hat{V}(\nu)$ の頂点になっていること、およびそれらの凸結合としてすべての正直な完備ゲームが得られることを示している。

不完備ゲームの一例を示す。

例 1 $N = \{1, 2, 3, 4\}$ とし、 $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, N\}$ とする。また、次の不完備ゲーム $(N, \mathcal{K}, \nu)$ を考える。

$$\begin{aligned} \nu(\{1\}) &= 8, \nu(\{2\}) = 7, \nu(\{3\}) = 3, \nu(\{4\}) = 1, \\ \nu(\{1, 2, 3, 4\}) &= 30. \end{aligned}$$

この不完備ゲームに対応する下限ゲーム $\underline{\nu}$ 、上限ゲーム $\overline{\nu}$ および $T = \{1, 2\}$ に対する完備ゲーム v^T 、ならびに、それらの dividend d_S の値を表 1 に示す。

下限ゲーム $(N, \underline{\nu})$ および完備ゲーム (N, v^T) では、すべての S に対して、 d_S が非負の値をとっており、正直なゲームであることがわかる。一方、上限ゲーム $(N, \overline{\nu})$ は単調である。たとえば、 $S_1 = \{1, 2\}, S_2 = \{3, 4\}$ とすると、 $30 = \overline{\nu}(S_1 \cup S_2) < \overline{\nu}(S_1) + \overline{\nu}(S_2)$

表1 下限ゲーム $\underline{v}$, 上限ゲーム $\bar{v}$ と v^T ($T = \{1, 2\}$)

S	$\underline{v}(S)$	$d_S(\underline{v})$	$\bar{v}(S)$	$d_S(\bar{v})$	$v^T(S)$	$d_S(v^T)$
$\{1\}$	8	8	8	8	8	8
$\{2\}$	7	7	7	7	7	7
$\{3\}$	3	3	3	3	3	3
$\{4\}$	1	1	1	1	1	1
$\{1,2\}$	15	0	26	11	26	11
$\{1,3\}$	11	0	22	11	11	0
$\{1,4\}$	9	0	20	11	9	0
$\{2,3\}$	10	0	21	11	10	0
$\{2,4\}$	8	0	19	11	8	0
$\{3,4\}$	4	0	15	11	4	0
$\{1,2,3\}$	18	0	29	-22	29	0
$\{1,2,4\}$	16	0	27	-22	27	0
$\{1,3,4\}$	12	0	23	-22	12	0
$\{2,3,4\}$	11	0	22	-22	11	0
$\{1,2,3,4\}$	30	11	30	33	30	0

$=26+15=41$ となり, 優加法的でないことがわかる.

以降, 最低限の情報下での不完備ゲームの解について考察する.

4. 最低限の情報下での正直な不完備ゲームの解

4.1 Shapley値

$\mathcal{K} = \{\emptyset, N, \{i\}, i=1, 2, \dots, n\}$ をもつ不完備ゲーム $(N, \mathcal{K}, \nu)$, すなわち, 最低限の情報下での不完備ゲームの解について考察する.

まず, 上限ゲームと下限ゲームに対するShapley値について次の定理が得られる.

定理6 $\mathcal{K} = \{\emptyset, N, \{i\}, i=1, 2, \dots, n\}$ をもつ不完備ゲーム $(N, \mathcal{K}, \nu)$ に対する下限ゲームと上限ゲームを, それぞれ $(N, \underline{\nu})$, $(N, \bar{\nu})$ とするとき, 次式が成り立つ.

$$\phi_i(\underline{\nu}) = \phi_i(\bar{\nu}) = \nu(\{i\}) + \frac{\Delta}{n}, \quad \forall i \in N \quad (43)$$

証明: 上限ゲームと下限ゲームのいずれについても, 式(33), (34)を用いて, Shapley値の定義に従い計算すればよいので省略する. $\square$

定理6は, 上限ゲームに対するShapley値と下限ゲームに対するShapley値が一致することを示すとともに, その値は, 各プレイヤーが1人で行動したときの利得に超過分 Δ を全プレイヤーで等分割したものを加えた値になることを示す.

定理7 完備ゲーム (N, v^T) ($T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$) に対す

るShapley値 $\phi(v^T) = (\phi_1(v^T), \phi_2(v^T), \dots, \phi_n(v^T))$ は次式で与えられる.

$$\phi_i(v^T) = \begin{cases} \nu(\{i\}) + \frac{1}{|T|}\Delta & \text{if } i \in T \text{ and } T \neq \{i\}, \\ \nu(\{i\}), & \text{if } i \notin T \text{ and } |T| > 1, \\ \nu(\{i\}) + \frac{n-1}{n}\Delta & \text{if } T = \{i\}, \\ \nu(\{i\}) + \frac{1}{n(n-1)}\Delta & \text{if } T = \{j\} \subset N \\ & \text{and } i \neq j. \end{cases} \quad (44)$$

証明:

$|T| > 1$ の場合の v^T を求めると,

$$v^T(S) = \begin{cases} 0 & \text{if } S = \emptyset \\ \Delta + \sum_{i \in S} \nu(\{i\}) & \text{if } S \supset T \\ \sum_{i \in S} \nu(\{i\}) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (45)$$

となる.

式(45)より, 定理3の証明と同様に $d_S(v^T)$ を求めると,

$$d_S(v^T) = \begin{cases} \nu(\{i\}), & \text{if } S = \{i\} \\ \Delta & \text{if } S = T, |T| > 1 \\ (-1)^{|S|}\Delta, & \text{if } S \supset T, |T| = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる. 4つの場合に分けて式(44)を証明する. (i) $i \in T$ かつ $T \neq \{i\}$ のとき, 式(14)より, $\phi_i(v^T) = \nu(\{i\}) + \Delta/|T|$ となる. (ii) $i \notin T$ かつ $|T| > 1$ のとき, 式(14)より, $\phi_i(v^T) = \nu(\{i\})$ となる. (iii) $T = \{i\}$ のとき, $s = |S|$ とすると, 式(14)より,

$$\begin{aligned} \phi_i(v^T) &= \nu(\{i\}) + \sum_{s=2}^n \binom{n-1}{s-1} (-1)^s \frac{\Delta}{s} \\ &= \nu(\{i\}) + \frac{\Delta}{n} \sum_{s=2}^n \binom{n}{s} (-1)^s 1^{n-s} \\ &= \nu(\{i\}) + \frac{\Delta}{n} ((1-1)^n - 1 + n) \\ &= \nu(\{i\}) + \frac{n-1}{n}\Delta \end{aligned}$$

となる. (iv) $T = \{j\} \subseteq N$ かつ $i \neq j$ のとき, (N, v^T) のゼロ正規化ゲーム $(N, \bar{v}^T)$ を考えると, 任意の $k \neq j$, $k \in N$ に対して,

$$v^T(S \setminus i) = v^T(S \setminus k), \quad \forall S \supseteq \{i, k\}$$

が成立するので, $\phi_i(\bar{v}^T) = \phi_k(\bar{v}^T)$ となる. また, (iii)の結果と式(19)より, $\phi_j(\bar{v}^T) = (n-1)\Delta/n$ となる.

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(\bar{v}^T) = \bar{v}^T(N) = \Delta \text{より,}$$

$$\phi_i(\bar{v}^T) = \frac{1}{n-1} \left(\Delta - \frac{n-1}{n} \Delta \right) = \frac{1}{n(n-1)} \Delta$$

となる。再び、式(19)を用いると、 $\phi_i(v^T) = \nu(\{i\}) + \Delta / (n(n-1))$ を得る。□

これを用いると、定理5とShapley値の線形性から、不完備ゲーム ν に関連する単調で優加法的な完備ゲームに対するプレイヤー i のShapley値の集合は次のようになる。

$$\Phi_i(\nu) = \left\{ \theta_i = \sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T \phi_i(v^T) \mid \begin{aligned} & \sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T = 1, \quad \sum_{T \in E(T_1, T_2)} k_T \geq 0, \\ & \forall T_1, T_2 \subseteq N \text{ such that } T_1 \cap T_2 = \emptyset \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

k_T は $|T| > 1$ に対して、dividend $d_T(v) / \Delta$ であったこと、任意の $S \subseteq N$ に対して、 $v(S)$ が式(7)のように、 S に包含される T のdividend $d_T(v)$ の総和で表されることを鑑みれば、 k_T は提携 T が形成されることによる報酬とコストの差を Δ を基準として表したものと考えることができる。

不完備ゲーム (N, K, ν) に関する追加情報が無ければ、プレイヤー間の関係は一様で、ある提携 T ($|T| > 1$)の報酬・コストが同じ大きさの他の提携の報酬・コストより大きくなる十分な理由も小さくなる十分な理由はない。したがって、 $V(\nu)$ の参照点として、 $|T| = |S|$ であれば $k_T = k_S$ となる優加法的な完備ゲームを考えることができる。すなわち、参照点ゲームの集合 $V^{\text{ref}}(\nu)$ は次式のようになる。

$$V^{\text{ref}}(\nu) = \left\{ v : 2^N \rightarrow \mathbb{R} \mid v = \sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T v^T, \begin{aligned} & \sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T = 1, \quad \sum_{T \in E(T_1, T_2)} k_T \geq 0, \\ & \forall T_1, T_2 \subseteq N \text{ such that } T_1 \cap T_2 = \emptyset, \\ & k_T = k_S, \quad \forall T, S \subseteq N \text{ such that } |T| = |S| \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

参照点ゲームのShapley値について次の定理が得られる。

定理8 任意の $v \in V^{\text{ref}}(\nu)$ に対して、プレイヤー i のShapley値 $\phi_i(v)$ は次のようになる。

$$\phi_i(v) = \nu(\{i\}) + \frac{1}{n} \Delta, \quad i \in N \quad (48)$$

証明：任意の $v \in V^{\text{ref}}(\nu)$ を考えると、これに対応して、

$$v = \sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T v^T, \quad \sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T = 1, \\ \sum_{T \in E(T_1, T_2)} k_T \geq 0, \quad \forall T_1, T_2 \subseteq N \\ \text{such that } T_1 \cap T_2 = \emptyset, \\ k_T = k_S, \quad \forall T, S \subseteq N \text{ such that } |T| = |S|,$$

を満たす k_T 、 $\forall T \subseteq N$ 、 $|T| > 1$ が存在する。 $|T| = |S|$ のとき、 $k_T = k_S$ であることから、要素数 s である提携 T に対する係数 k_T を α_s と表すと、 $\sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T = 1$ より、

$$\binom{n}{2} \alpha_2 + \binom{n}{3} \alpha_3 + \cdots + \binom{n}{n} \alpha_n = \sum_{s=2}^n \binom{n}{s} \alpha_s = 1 \quad (49)$$

が成立する。

一方、式(36)および(7)より、 $|T| > 1$ なる $T \subseteq N$ に対して、 v のdividend $d_T(v)$ が $d_T(v) = k_T \Delta$ となることに注意すると、 $d_{|i|}(v) = \nu(\{i\})$ 、 $\forall i \in N$ であるので、式(14)より、

$$\phi_i(v) = \sum_{T \subseteq N, T \ni i, |T| > 1} \frac{k_T \Delta}{|T|} + \nu(\{i\})$$

となる。これを α_s を用いて書き直すと、式(49)より、

$$\begin{aligned} \phi_i(v) &= \sum_{s=2}^n \binom{n-1}{s-1} \frac{\alpha_s \Delta}{s} + \nu(\{i\}) \\ &= \left(\sum_{s=2}^n \binom{n}{s} \alpha_s \right) \frac{\Delta}{n} + \nu(\{i\}) \\ &= \frac{\Delta}{n} + \nu(\{i\}) \end{aligned}$$

となり、定理が示せる。□

$|T| = |S|$ のとき $k_T = k_S$ で、任意の互いに素な T_1, T_2 に対して $\sum_{T \in E(T_1, T_2)} k_T \geq 0$ となり、 $\sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T = 1$ となる k_T は無限に存在する。定理8はこのような k_T のどんな組み合わせに対しても、プレイヤー i のShapley値は $\nu(\{i\}) + \frac{1}{n} \Delta$ となり、上限ゲームと下限ゲームに対するShapley値と一致することを示している。

定理8の証明から、 $|T| = |S|$ のとき $k_T = k_S$ で、 $\sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T = 1$ であれば、式(48)が成立することが

わかる. なお, 定理8は, 後に述べるように, 任意の $v \in V^{\text{ref}}(\nu)$ が対称ゲームとなることを用いても証明することができる.

4.2 仁

次に, 不完備ゲーム $(N, \mathcal{K}, \nu)$ に対する仁について考える. 上限ゲームと下限ゲームに対する仁について次のような定理が得られる.

定理9 $\mathcal{K} = \{\emptyset, N, \{i\}, i=1, 2, \dots, n\}$ をもつ不完備ゲーム $(N, \mathcal{K}, \nu)$ に対する下限ゲーム, 上限ゲームをそれぞれ $(N, \underline{\nu})$, $(N, \bar{\nu})$ とする. このとき, これらのゲームに対する仁 $\eta(\underline{\nu})$, $\eta(\bar{\nu})$ は次のようになる.

$$\eta_i(\underline{\nu}) = \eta_i(\bar{\nu}) = \nu(\{i\}) + \frac{\Delta}{n}, \quad \forall i \in N \quad (50)$$

証明: 式(33), (34)より, 下限ゲーム $(N, \underline{\nu})$ および上限ゲーム $(N, \bar{\nu})$ のゼロ正規化ゲーム $(N, \underline{\nu}')$ および $(N, \bar{\nu}')$ はいずれも対称ゲームとなる. $\underline{\nu}'(N) = \bar{\nu}'(N) = \Delta$ となるので, 式(16)および(19)より, 式(50)が導かれ, 定理が得られる. $\square$

Shapley値と同様に, 上限ゲームに対する仁と下限ゲームに対する仁は一致する. また, 定理6より, これらの値は上限ゲームまたは下限ゲームのShapley値と一致していることがわかる.

完備ゲーム (N, v^T) ($T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$) に対する仁は次の定理で得られる.

定理10 完備ゲーム (N, v^T) ($T \subseteq N$, $T \neq \emptyset$) に対する仁 $\eta(v^T) = (\eta_1(v^T), \eta_2(v^T), \dots, \eta_n(v^T))$ は次式で与えられる.

$$\eta_i(v^T) = \begin{cases} \nu(\{i\}) + \frac{1}{|T|} \Delta & \text{if } i \in T \\ \nu(\{i\}) & \text{if } i \notin T \end{cases} \quad (51)$$

証明: $(N, \bar{v}^T)$ を (N, v^T) のゼロ正規化ゲームとする. 第2節で述べた手順で $(N, \bar{v}^T)$ の仁 $\eta(\bar{v}^T)$ を求めると, 最初に次の線形計画問題を解くことになる.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \varepsilon, \\ & \text{subject to } \Delta - \sum_{i \in S} x_i \leq \varepsilon, \text{ if } S \supseteq T, \\ & \quad \text{such that } |S| \neq 1, n, \\ & \quad - \sum_{i \in S} x_i \leq \varepsilon, \text{ if } S \not\supseteq T, \\ & \quad \text{such that } |S| \neq 1, n, \\ & \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = \Delta, \\ & \quad x_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (52)$$

この問題の実行可能解 $\varepsilon = 0$,

$$x_i = \begin{cases} \frac{1}{|T|} \Delta & \text{if } i \in T \\ 0 & \text{if } i \notin T \end{cases} \quad (53)$$

を考え, まず, $|T|=1$ の場合と $|T|>1$ の場合に分けて, これが最適解であることを示す. 特に, $|T|=1$ の場合には唯一の最適解であることも示す. この実行可能解における目的関数値は $\varepsilon = 0$ である.

$|T|=1$ のとき, $T = \{j\}$, $j \in N$ と書ける. $T = \{j\}$ に対する問題(52)の実行可能解において, $x_j < \Delta$ とすると, $\sum_{i \in N} x_i = \Delta$ より, $\bar{J} = \{i \in N \mid x_i > 0, i \neq j\} \neq \emptyset$ となる. $|\bar{J}|>1$ とすると, $S' \subset \bar{J}$ を用いて $S = S' \cup \{j\} \cap T$ に対して, $\varepsilon \geq \Delta - \sum_{i \in S} x_i > 0$ となり, 式(53)の実行可能解より目的関数値は悪くなる. したがって, 最適解で $|\bar{J}|>1$ でない. 次に, $\bar{J} = \{i^*\}$ ($i^* \neq j$) とすると, $T \subseteq S \subseteq N \setminus \{i^*\}$ なる S に対して, $\varepsilon \geq \Delta - \sum_{i \in S} x_i > 0$ となり, 式(53)の実行可能解より目的関数値は悪くなる. したがって,

$$x_i = 0, \quad \forall i \notin T \quad (54)$$

が成立し, $\sum_{i \in N} x_i = \Delta$ より, 最適解は式(53)に示すもの唯一となる.

$|T|>1$ のとき, $\sum_{i \in N \setminus T} x_i > 0$ とすると, $\sum_{i \in N} x_i = \Delta$ より, $\sum_{i \in T} x_i < \Delta$ となる. すなわち, $0 < \Delta - \sum_{i \in T} x_i \leq \varepsilon$ となり, 目的関数値は正となり, 目的関数値は上の実行可能解より大きい. したがって, $\sum_{i \in N \setminus T} x_i \leq 0$ でなければならない. $x_i > 0, \forall i \in N$ であるので, 問題(52)の最適解では, $|T|>1$ の場合も式(54)が成立しなければならない. これを満たす範囲では, $S \not\supseteq T$, $|S| \neq 1, n$ に対しては $-\sum_{i \in S} x_i \leq 0$ となり, $\sum_{i \in T} x_i = \Delta$ となるので, $S \supseteq T$, $|S| \neq 1, n$ に対しては $\Delta - \sum_{i \in S} x_i = 0$ となるので, 最適値は 0 となり, 式(53)は最適解の一つとなる.

次に, $|T|>1$ に対しては, 仁の計算手順で2回目に解く線形計画問題

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \varepsilon, \\ & \text{subject to } - \sum_{i \in S} x_i \leq \varepsilon, \text{ if } S \cap T \neq \emptyset, \\ & \quad S \cap (N \setminus T) \neq \emptyset, \\ & \quad \Delta - \sum_{i \in S} x_i \leq 0, \text{ if } S \supseteq T, \\ & \quad \text{such that } |S| \neq 1, n, \\ & \quad - \sum_{i \in S} x_i \leq 0, \text{ if } S \subseteq N \setminus T, \\ & \quad \text{such that } |S| \neq 1, n, \\ & \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = \Delta, \\ & \quad x_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (55)$$

の最適解が式(53)の解のみであることを示す. 式(53)

の問題(55)における ε の値, すなわち, 目的関数値は $\varepsilon = -\Delta/|T|$ となる.

問題(52)の最適解で式(54)が成立することよりも当然であるが, 問題(55)の2番目の制約条件より, 任意の実行可能解において,

$$\sum_{i \in T} x_i = \Delta \quad (56)$$

が必ず成立する. いま, $x_j < \Delta/|T|$, $j \in T$ なる実行可能解を考えると, 式(54)が成立するので, $S = (N \setminus T) \cup \{j\}$ に対して,

$$\varepsilon \geq -\sum_{i \in S} x_i = -x_j > -\Delta/|T|$$

となり, その目的関数値は式(53)の解のものより大きくなる. したがって, 問題(55)の最適解では, $x_j \geq \Delta/|T|$, $j \in T$ が成立しなければならない. これと式(56)より, 式(53)が問題(55)唯一の最適解となる.

以上より, ゼロ正規化ゲーム $(N, \bar{v}^T)$ の仁が

$$\eta_i(\bar{v}^T) = \begin{cases} \frac{1}{|T|}\Delta & \text{if } i \in T \\ \nu(\{i\}) & \text{if } i \notin T \end{cases}$$

となることが示され, 式(18)より定理が得られる. $\square$

式(44)と比較すると, 完備ゲーム v^T に対するShapley値 $\phi(v^T)$ と仁 $\eta(v^T)$ の値は $|T|=1$ のときに異なることがわかる. $T = \{i\}$ のとき, $\phi_i(v^T)$ は $\eta_i(v^T)$ よりも小さくなるが, $\phi_j(v^T)$ は $\eta_j(v^T)$ よりも大きくなる. ただし, $j \neq i$ とする. $|T| > 1$ の場合は, v^T に対するShapley値と仁は一致する.

$V(\nu)$ に対するプレイヤー i の仁の集合を $H_i(\nu)$ と記すことにすると, 仁はShapley値と異なり線形性を満たさないことから, $H_i(\nu)$ の構造は複雑になる. そこで, 今回は参照点ゲームに対する仁について考察する.

参照点ゲームに対する仁について考察するため, 次の補題を示す.

補題 1 任意の $v \in V^{\text{ref}}(\nu)$ なる協力ゲーム (N, v) のゼロ正規化ゲーム $(N, \bar{v})$ は対称ゲームである.

証明: 補題の仮定より,

$$\bar{v} = \sum_{T \subseteq N, |T| > 1} k_T \bar{v}^T$$

と表せる. k_T は

$$k_{T_1} = k_{T_2}, \forall T_1, T_2 \subseteq N \text{ such that } |T_1| = |T_2|$$

を満たすので, $|T|=t$ なる T に対して $k_T = k_t$ と表す

ことができる. $T \subseteq S$ となる $|T|=t$ なる T の数は, $\binom{|S|}{t}$ となる. したがって, $\bar{v}$ は式(36)より, 任意の $S \subseteq N$ について,

$$\bar{v}(S) = \left(\sum_{T \subseteq S, |T| > 1} k_T \right) \Delta = \left(\sum_{t=2}^{|S|} \binom{|S|}{t} k_t \right) \Delta$$

となる. このことより, $|S_1|=|S_2|$ なる任意の $S_1, S_2 \subseteq N$ について, $\bar{v}(S_1) = \bar{v}(S_2)$ となることがわかる. $\square$

補題 1 より, 次の定理が得られる.

定理11 任意の $v \in V^{\text{ref}}(\nu)$ に対して, プレイヤー i の仁 $\eta_i(v)$ は次のようになる.

$$\eta_i(v) = \nu(\{i\}) + \frac{1}{n}\Delta \quad (57)$$

証明: $v \in V^{\text{ref}}(\nu)$ なる協力ゲーム (N, v) のゼロ正規化ゲーム $(N, \bar{v})$ を考える. 補題 1 より, ゼロ正規化ゲーム $(N, \bar{v})$ は対称ゲームとなる. 対称ゲームに対して, 式(16)が成立することより,

$$\eta_i(\bar{v}) = \frac{1}{n}\Delta$$

となる. これと式(19)が仁に対して成立することより, 定理が得られる. $\square$

この定理より, いずれの参照点ゲームの仁も $\nu(\{i\}) + \frac{1}{n}\Delta$ となることがわかる. すなわち, 参照点ゲーム, 上限ゲームおよび下限ゲームにおいては, Shapley値と仁は一致し, それらの値はいずれも $\nu(\{i\}) + \frac{1}{n}\Delta$ となることがわかる.

以上の議論から, $x_i = \nu(\{i\}) + \frac{1}{n}\Delta$ で定義される解 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ は, $\mathcal{K} = \{\emptyset, N, \{i\}, i=1, 2, \dots, n\}$ をもつ不完備ゲーム $(N, \mathcal{K}, \nu)$ に対する解として, 多くの観点から一致して得られる合理的な解(焦点解)であるといえる.

例 2 例 1 であげた不完備ゲーム ν に対して, 下限ゲームに対するShapley値と仁は次のようになる.

$$\phi(\underline{\nu}) = \eta(\underline{\nu}) = \left(\frac{43}{4}, \frac{39}{4}, \frac{23}{4}, \frac{15}{4} \right).$$

さらに, これは上限ゲームと任意の参照点ゲームに対するShapley値と仁に一致する. つまり, $\phi(\underline{\nu}) = \eta(\underline{\nu}) = \phi(\bar{\nu}) = \eta(\bar{\nu}) = \phi(v) = \eta(v)$, $\forall v \in V^{\text{ref}}(\nu)$, となる.

5. 結論と今後の課題

本研究では、一部の提携値しかわかっていない協力ゲームについて考察した。関連する完備ゲームの優加法性を仮定し、不完備ゲームに対して上限ゲームと下限ゲームを定義した。下限ゲームは優加法性を満たすが、上限ゲームは単調性しか満たさないことを示した。提携がプレイヤー集合 $T \neq \emptyset$ を包含するときに上限ゲームの値を、包含しないときに下限ゲームの値をとる完備ゲーム v^T を考え、これが優加法性を満たすことを示した。これにより、上限ゲームの各提携値を取る優加法的なゲームが存在することが明らかになった。

次に、最も単純な不完備ゲームである、全体提携と各プレイヤー1人からなる提携の値のみがわかっている不完備ゲームに対する解について考察した。この不完備ゲームから得られる上限ゲームと下限ゲームのShapley値と仁はすべて等しいことを示した。また、提携 $T \neq \emptyset$ に対して定められる優加法的ゲーム v^T のShapley値と仁を陽に求めた。さらに、この不完備ゲームと整合する正值な完備ゲームの集合が $(2^n - n - 1)$ 個の v^T ($|T| > 1$) を頂点とする凸多面体となること、および、この不完備ゲームと整合する優加法的な任意の完備ゲームが $(2^n - n - 1)$ 個の v^T ($|T| > 1$) の線形結合として表せることを示した。これらより、この不完備ゲームに整合する優加法的な任意の完備ゲームのShapley値もまた、 $(2^n - n - 1)$ 個の v^T ($|T| > 1$) のShapley値の線形結合として表されることになる。

また、不完備ゲームの解評価の基礎になりうる参照点ゲームを与え、Shapley値と仁を考察した。いずれの参照点ゲームのShapley値も仁もすべて等しく、上限ゲームと下限ゲームのそれらの値とも一致することが示された。このことより、この値は不完備ゲームの合理的な解の一つと考えることができる。

本研究により、提携値に関して情報が不完全な協力ゲームの理論という未開拓の研究課題に対する一つのアプローチを示すことができたと考えられるが、未だ多くの課題が残っている。特に、より一般の不完備ゲームの解について考察する必要がある。しかし、一般の不完備ゲームに対しては、多くの観点から共通に支持される焦点解を発見するのは容易ではないと考えられる。これに対する1つのアプローチは、1点解を求めるのではなく、合理的と考えられる解集合を求めていくことであろう。一方、不完備ゲームの解を特徴付ける公理系を見出すことも今後の課題である。

参考文献

- [1] A. Chateauneuf and J.Y. Jaffray. Some characterizations of lower probabilities and other monotone capacities through the use of Möbius inversion. *Mathematical Social Sciences*, 17 : 263–283, 1989.
- [2] G. Choquet. Theory of capacities. *Annals de l'Institut Fourier*, 5 : 131–295, 1953.
- [3] I. Gilboa and D. Schmeidler. Additive representations of non-additive measures and the Choquet integral. *Annals of Operations Research*, 52 : 43–65, 1994.
- [4] M. Grabisch. k -order additive discrete fuzzy measures and their representation. *Fuzzy Sets and Systems*, 92 : 167–189, 1997.
- [5] J.C. Harsanyi. A simplified bargaining model for the n -person cooperative game. *International Economic Review*, 4 : 194–220, 1963.
- [6] A. Kopelowitz. Computation of the kernels of simple games and the nucleolus of cooperative games as locuses in the strong ϵ -core. Research memo. 31, Department of Mathematics, Hebrew University, 1967.
- [7] Z. Pawlak. *Rough Sets. Theoretical Aspects of Reasoning about Data*. Kluwer, 1991.
- [8] L. Polkowski and B. Araszkiewicz. A rough set approach to estimating the game value and the Shapley value from data. *Fundamenta Informaticae*, 53 : 335–343, 2002.
- [9] D. Schmeidler. The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17 : 1163–1170, 1969.
- [10] G. Shafer. *A Mathematical Theory of evidence*. Princeton University Press, 1976.
- [11] L.S. Shapley. A value for n -person games. In H. Kuhn and A. Tucker, editors, *Contributions to the theory of games II*, pages 307–317. Princeton, 1953.
- [12] M. Sugeno, K. Fujimoto, and T. Murofushi. A hierarchical decomposition of Choquet integral model. *International Journal of Fuzziness and Knowledge-based Systems*, 3 : 1–15, 1995.
- [13] T. Tanino. On dividends for cooperative games. 京都大学数理解析研究所講義録, 1484 : 5–15, 2006.
- [14] J. Von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1953.
- [15] 中山幹夫. 社会的ゲームの理論入門. 勁草書房, 2005.
- [16] 藤本勝成. 意思決定とメビウス反転. 日本ファジィ学会誌, 10 : 206–214, 1998.
- [17] 藤本勝成. 入門：ファジィ測度とその周辺—第3回：価値を表すファジィ測度(1)—. 知能と情報, 20 : 601–608, 2008.

(2011年6月16日 受付)

(2011年10月31日 採録)

[問い合わせ先]

〒560-8531 大阪府豊中市待兼山町1-3

大阪大学大学院基礎工学研究科

榊屋 聡

TEL : 06-6850-6353

E-mail : masuya@inulab.sys.es.osaka-u.ac.jp

著者紹介

まさや さとし
柊屋 聡 [正会員]

2004年関西大学工学部管理工学科卒業。2010年大阪大学大学院基礎工学研究科システム創成専攻博士後期課程修了。(博士(工学))。同年大阪大学基礎工学研究科システム創成専攻招へい研究員。現在に至る。主として、協力ゲームの理論に関する研究に従事。日本オペレーションズ・リサーチ学会、日本知能情報ファジィ学会、日本経済学会の会員。

いぬいぐち まさひろ
乾口 雅弘 [正会員]

1987年大阪府立大学大学院工学研究科博士前期課程修了。同年大阪府立大学助手。1992年広島大学助教授。1997年大阪大学助教授。2003年同教授。現在に至る。主として、ファジィ数値計画法、可能性理論およびラフ集合理論の意思決定問題への応用に関する研究に従事。1997年日本ファジィ学会論文賞などを受賞。(博士(工学))。Fuzzy Sets and Systemsなど3件の国際誌のarea editor。計測自動制御学会、システム制御情報学会、日本知能情報ファジィ学会、日本OR学会、電子情報通信学会などの会員。

Fundamental Study for the Theory of Cooperative Games under Incomplete Information

by

Satoshi MASUYA and Masahiro INUIGUCHI

Abstract :

In the conventional cooperative games, it is assumed that the payoff of each coalition is known. However, in the real world problems, there may exist situations in which some coalitional values are unknown. In this paper, we investigate the theory of cooperative games under incomplete information of coalitional values. Assuming the superadditivity, we propose some concepts related to cooperative games under incomplete information. We investigate the solution concepts in a special case when only values of the grand coalition and singleton coalitions are known and show that there exists a focal point solution which is commonly suggested in many points of view.

Keywords : Cooperative game, Upper game, Lower game, Reference point game, Shapley value, Nucleolus

Contact Address : **Satoshi MASUYA**

Graduate School of Engineering Science, Osaka University
1-3, Machikaneyama, Toyonaka, Osaka, 560-8531, JAPAN
 TEL : 06-6850-6353
 E-mail : masuya@inulab.sys.es.osaka-u.ac.jp